现代数学基础丛书



算子代数上线性映射引论

● 侯晋川 崔建莲 著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-1690.0101)

责任编辑：刘嘉善

现代数学基础丛书

拓扑群引论
公理集合率导引
丢番图逼近引论
Banach代数
紧黎曼曲面引论
广义哈密顿系统理论及其应用
解析数论基础
数理统计引论
多元统计分析引论
概率论基础
微分动力系统原理
二阶椭圆型方程与椭圆型方程组
分析概率论
非线性发展方程
黎曼曲面
傅里叶积分算子理论及其应用
微分方程定性理论
概率论基础和随机过程
复解析动力系统
反应扩散方法引论
离散鞅及其应用
动力系统的周期解与分支理论
环与代数
仿微分算子引论
实分析导论
对称性分岔理论基础
线性微分方程的非线性扰动
随机点过程及其应用
复变函数逼近论
线性整数规化的数学基础
组合矩阵论
算子代数
Banach空间中的非线性逼近理论
Gel'fond-Baker方法在丢番图方程中的应用
实用微分几何引论
半群的S-系理论
有限典型群子空间轨道生成的格
有限群导引（上册、下册）
随机模型的密度演化方法
非线性偏微分复方程
调和分析及其在偏微分方程中的应用
惯性流形与近似惯性流形
数学规划导论
拓扑空间中的反例
拓扑空间论
非经典数理逻辑与近似推理
序半群引论
动力系统的定性与分支理论
金兹堡－朗道方程
微分方法中的变分方法
算子代数上线性映射引论



ISBN 7-03-010942-2
定 价：30.00 元

现代数学基础丛书

算子代数上线性映射引论

侯晋川 崔建莲 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统介绍了国内外算子代数上线性映射及其保持问题研究的进展，也是作者近年来研究成果的总结. 全书共分十章. 内容包括预备知识，保持算子秩不变以及保持各种谱函数的线性和可加映射，Banach 代数和 C^*-代数上的线性映射，von Neumann 代数上的可加映射，以及套代数和初等算子及其保持问题等.

本书读者对象为高等院校数学系高年级学生、研究生和有关科研人员.

图书在版编目(CIP)数据

算子代数上线性映射引论/侯晋川，崔建莲著．—北京：科学出版社，2002

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-010942-2

Ⅰ.算… Ⅱ.①侯… ②崔… Ⅲ.算子代数-线性-映射(数学) Ⅳ.O177.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 087311 号

责任编辑：刘嘉善/责任校对：钟　洋

责任印制：安春生/封面设计：韦万里

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2002年12月第 一 版　开本：850×1168　1/32

2002年12月第一次印刷　印张：14 7/8

印数：1—3 000　字数：387 000

定价：30.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

20 世纪 30 年代，F. J. Murray 和 J. von Neumann 创立了算子代数理论. 现在这一理论已成为现代数学中一个起领头作用的热门分支，它与量子力学，微分几何，线性系统和控制理论，甚至数论以及其他一些重要数学分支都有着出人意料的联系和相互渗透. 它是非交换数学的基础，例如是由 Alain Connes 发展的非交换几何和由 D. Voiculescu 发展的非交换概率论或非交换自由概率论的基础.

对于算子代数，常规的研究课题主要是探讨代数的结构，利用同态映射研究代数的分类. 然而，由于算子代数结构极其复杂，即使是性质最好的 von Neumann 代数和 C*- 代数，分类问题也远未解决. 另一方面，算子代数作为特殊的 Banach 空间，对其上的线性映射以及这些映射对代数结构的影响却研究极少，过去仅限于态、导算子、等距、完全正及完全有界线性映射的讨论. 近 20 年来，国内外许多学者另辟溪径，开始注意到根据算子本身的特殊性，与算子理论相结合，开展对代数上把算子或代数的某种特征作为其不变量的线性映射的研究，为算子代数研究的突破带来一线曙光，这就是所谓的线性保持问题的研究，且已取得一系列深刻而又漂亮的成果，形成 20 世纪末本研究领域的一个新亮点. 目前，算子代数上线性映射的研究越来越受到人们的关注，成为当今算子理论和算子代数的一个非常活跃的交叉研究领域之一. 此项研究不仅丰富了算子代数理论的研究，而且作为副产品，刺激了算子理论中新结果的出现，进而，其成果往往从新的角度揭示了算子代数的固有性质以及与其上线性映射的联系. 例如，在许多情形下，这样的线性映射是代数同态或代数反同态. 这表明在某些条件下，算子代数上映射的线性蕴涵其可乘性，从而使人

们进一步加深对算子代数的认识和理解. 算子代数上线性保持问题研究的最终目的之一是利用线性手段探讨和解决拓扑代数的问题, 即通过刻画保持代数元某种特征不变的线性映射、初等线性映射等, 反馈算子代数的整体结构性质, 从新的角度提供对算子代数分类的信息. 这在理论上和应用上都有着重要的意义. 如果把 $M_n(\mathbb{C})(=\mathcal{B}(\mathbb{C}^n))$ 看作是有限维复空间上的算子代数, 那么线性保持问题的研究可追溯到 19 世纪末 G. Frobenius 的开创性工作. 近 40 多年来, 矩阵代数上线性保持问题研究一直是矩阵理论中最活跃最富有成果的领域之一. 人们对无限维算子代数上线性保持问题研究的普遍关注则是近十几年的事, 并得到快速发展, 所用的方法与有限维情形也不同. 本书的目的主要是以作者在这方面的一些工作为主线, 介绍国内外在算子代数上线性保持问题方面研究的概况, 现状以及最新进展.

全书共分 10 章. 第一章是预备知识, 简单介绍 Banach 空间, Hilbert 空间算子理论和算子代数方面的基本概念以及本书后面常用的一些性质. 这部分内容大多可在泛函分析基础教程中找到. 对于那些普通教程不加介绍的概念和结果, 我们都指出参考文献, 以方便读者查阅. 第二章介绍保持算子秩不变或秩不增的线性和可加映射的刻画. 注意到, 可以把算子代数看作环而更一般地研究其上可加映射的保持问题, 因而, 我们尽可能地只在可加而不是线性的假设下进行讨论. 本章是线性保持和可加保持问题研究的基础之一, 因为算子代数上线性和可加映射的保持问题在许多情形可转化到保秩一或秩一不增的情形, 并借助于该章的结果而得到解决. 第三章用统一的方法处理标准算子代数上保持或压缩各种谱函数, 保持各种与可逆性有关以及与算子的零空间和值域性质有关的线性和可加映射的刻画问题. 第四章则给出 Banach 代数和 C*- 代数上压缩某些谱函数, 保各种可逆性, 保极大理想, 谱半径不增的线性映射以及 von Neumann 代数上保零积或完全迹秩不增的线性映射的刻画, 并且在注记一节中介绍著名的 Kaplansky 问题研究的史料和进展情况. 第五章介绍 von Neumann 代数上可

加保持问题研究的一些工作，主要对保零积，保正交性以及与算子函数 $|\cdot|^k$ 交换的可加映射进行了讨论. 第六章对算子代数上保某个给定多项式的零化元不变的线性和可加映射进行了较详尽的研究. 作为应用，还获得标准算子代数上保谱半径可加映射的具体结构. 第七章介绍套代数 (nest algebras) 上线性保持问题的研究成果. 与前面几章不同，非平凡套代数不是半单的 Banach 代数，而且是一类最重要的非自伴算子代数，它的有限维模型就是上三角块矩阵代数，而无限维情形则要复杂得多. 对于套代数上线性保持问题的研究，目前还仅停留在上三角矩阵代数的范围. 本章是第一次对无限维套代数的情形进行系统的探讨，主要考虑套代数上保秩一性，完全秩不增，保幂等性，保零积，保数值域闭包，保数值半径等的线性映射，并由此获得套代数的自同构，局部自同构以及 Jordan 同构的新刻画. 初等算子是算子代数上一类重要的线性映射，是联结算子理论与算子代数的桥梁之一. 第八章介绍初等算子及其保持问题，获得保自伴性初等算子，正初等算子，完全正初等算子及保谱初等算子的刻画，同时还获得有限秩初等算子和初等算子局部线性组合 (线性插值) 的刻画. 初等算子虽然一直是人们研究的重点对象，但除定义外再没有其他等价的抽象刻画. 本章利用完全秩不增性质，给出初等算子的一个等价描述. 第九章研究 Hilbert 空间情形初等算子作为算子理想 $\mathcal{C}_2$ 上线性算子时的性质，并在更一般的算子张量积的框架下进行讨论，主要是获得初等算子限制到 $\mathcal{C}_2$ 上成为自伴算子，正规算子，亚正规算子，拟正规算子，紧算子，有限秩算子，$\mathcal{C}_p$ 类算子等的充分必要条件. 以上涉及的都是线性或可加映射，然而除加法和数乘运算外，算子代数中还有一种基本的代数运算，即乘法运算. 因此，类似地也可考虑可乘保持问题. 我们在最后一章，即第十章介绍算子代数上可乘保持问题方面的一些结果，内容包括矩阵代数上可乘映射的刻画及保正性、保酉性可乘映射的刻画；标准算子代数上秩一不增可乘映射和保秩可乘映射的结构性质；保谱(或谱半径) 和保数值域 (或数值半径) 可乘映射的刻画以及自同构

的一些新特征等.

本书的写作曾得到中国科学院数学所李炳仁教授、复旦大学数学所严绍宗教授的鼓励和支持；白朝芳博士详细阅读了本书的初稿，在此谨表谢意. 对于国家自然科学基金、数学天元基金和中国科学院科学出版基金、山西省自然科学基金和山西省回国留学人员科研基金对本书出版的资助深表感谢.

由于作者水平有限，加上文献收集不全，新成果不断出现，缺陷与不足之处在所难免，倘有纰漏，热忱欢迎读者批评指正.

著　者

2002 年 1 月于临汾

山西师范大学



目　录

前言
第一章　预备知识 1
§1.1　Banach 空间及算子 1
§1.2　Banach 代数 10
§1.3　C*- 代数和 von Neumann 代数 13
§1.4　套代数 16
第二章　$\mathcal{F}(X)$ 上的保秩线性和可加映射 18
§2.1　保秩线性映射 18
§2.2　完全秩不增线性映射 27
§2.3　保秩可加映射 33
§2.4　保秩一幂等性的可加映射 45
§2.5　保秩一幂零性的可加映射 50
§2.6　注记 61
第三章　标准算子代数上谱函数压缩映射 62
§3.1　谱函数压缩的线性映射 63
§3.2　谱函数保持的可加映射 73
§3.3　保可逆性或零因子的可加映射 85
§3.4　注记 98
第四章　Banach 代数与 C*- 代数上的线性映射 101
§4.1　Banach 代数上谱函数压缩的线性映射 102
§4.2　C*- 代数上保可逆性的线性映射 108
§4.3　C*- 代数上保理想的线性映射 111
§4.4　von Neumann 代数上保零积的线性映射 114
§4.5　von Neumann 代数上保迹秩的线性映射 118
§4.6　Banach 代数上谱有界的线性映射 127

§4.7 相似不变子空间和保相似性的线性映射 136
§4.8 注记 147
第五章 von Neumann 代数上的可加映射 151
§5.1 保零积的可加映射 151
§5.2 保正交性的可加映射 157
§5.3 与 $|\cdot|^k$ 交换的可加映射 162
§5.4 注记 168
第六章 保多项式零化元的线性和可加映射 169
§6.1 代数上保多项式零化元的线性映射 170
§6.2 算子代数上保多项式零化元的线性映射 177
§6.3 $\mathcal{B}(H)$ 上保平方幂零性的可加映射 185
§6.4 保算子幂零性的可加映射 195
§6.5 $\mathcal{B}(H)$ 上保多项式零化元的可加映射 205
§6.6 保谱半径的可加映射 213
§6.7 注记 221
第七章 套代数上的线性映射 223
§7.1 保秩一性的线性映射 224
§7.2 同构与局部自同构的刻画 237
§7.3 完全秩不增的线性映射 244
§7.4 保幂等性的线性映射 267
§7.5 保零积的线性和可加映射 282
§7.6 保多项式零化元的线性映射 290
§7.7 保数值域闭包的线性映射 294
§7.8 保数值半径的线性映射 303
§7.9 注记 308
第八章 初等算子的刻画 311
§8.1 自伴和完全正初等算子 311
§8.2 正初等算子的刻画 314
§8.3 算子的线性组合和局部线性组合 321
§8.4 完全正初等算子的进一步刻画 333

§8.5　初等算子的局部线性组合 336
§8.6　k- 秩不增线性映射和初等算子的刻画 345
§8.7　保谱初等算子 352
§8.8　注记 367
第九章　算子理想上的初等算子　算子张量积 370
§9.1　自伴张量积算子和亚正规张量积算子 371
§9.2　次正规张量积算子 376
§9.3　紧张量积算子和本质正规张量积算子 378
§9.4　拟正规张量积算子 381
§9.5　$\mathcal{C}_p$ 类张量积算子 389
§9.6　有限秩张量积算子 393
§9.7　应用: $\mathcal{C}_2$ 上的初等算子 397
§9.8　注记 398
第十章　算子代数上的可乘映射 399
§10.1　矩阵代数上的保秩可乘映射 399
§10.2　矩阵代数上保谱及保正规性可乘映射 406
§10.3　$\mathcal{B}(X)$ 上的保秩可乘映射 414
§10.4　$\mathcal{B}(X)$ 上可乘映射及同构的刻画 429
§10.5　$\mathcal{B}(H)$ 上可乘映射及 *- 同构的刻画 439
§10.6　保恒等和的可乘映射 444
§10.7　注记 448
参考文献 450

第一章 预备知识

本章我们将给出在后面几章中经常用到的有界线性算子，Banach 代数，C*- 代数，von Neumann 代数和套代数的一些概念及结论.

§1.1 Banach 空间及算子

定义 1.1.1 设 X 是实或复线性空间，如果在 X 上定义了非负函数 $\|\cdot\|$, 满足下列公理：

(1) 三角不等式：对任意的 $x, y \in X$, $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$;

(2) 对任意的 $x \in X$, 任意的数 a, 有 $\|ax\| = |a|\|x\|$;

(3) $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$,

称 X 为赋范空间. 进而，如果还满足

(4) 对 X 中的任意 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ (即当 $n, m \to \infty$, $\|x_n - x_m\| \to 0$), 存在 $x \in X$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$,

则称 X 是 Banach 空间.

满足 (1)—(3) 的非负函数 $\|\cdot\|$ 称为 X 上的范数. 满足 (1)—(2) 的非负函数称为半范数.

设 f 为 X 上的线性泛函. 如果 $\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1}|f(x)| < \infty$, 称 f 为 X 上的有界线性泛函. 记 Banach 空间 X 上的有界线性泛函全体为 X^*, 则 X^* 按通常函数的加法和数乘法成为线性空间. $(X^*, \|\cdot\|)$ 也是 Banach 空间，称此空间为 X 的共轭空间.

我们有时也用 $\langle x, f\rangle$ 表示泛函 f 在 x 处的值 $f(x)$.

设 X 和 Y 是 Banach 空间， $T: X \to Y$ 是线性映射. 如果 $\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\| < \infty$, 称 T 有界. T 是连续的当且仅当 T 是有界的，而 $\|T\|$ 称为 T 的范数.

在 Banach 空间及算子理论中，通常认为开映射定理、闭图定

理、 Hahn-Banach 延拓定理和一致有界原理是最基本的定理，我们列举如下：

定理 1.1.1 (开映射定理) 设 T 是 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子，且 $TX = Y$, 则 T 为开映射.

定理 1.1.2 (闭图定理) 设 $T: X \to Y$ 为 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的线性算子，且 T 的图像 $\{(x, Tx) \mid x \in X\}$ 为 $X \times Y$ 中的闭集，那么 T 是有界的.

定理 1.1.3 (Hahn-Banach 延拓定理) 如果 f 为 X 的闭线性子空间上的有界线性泛函，则 f 可保范地延拓为 X 上的有界线性泛函.

定理 1.1.4 (一致有界原理或共鸣定理) 设 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 中的一族有界线性算子. 如果对任意的 $x \in X$, 有 $\sup\{\|T_\alpha x\| \mid \alpha \in \Lambda\} < \infty$, 那么 $\sup\{\|T_\alpha\| \mid \alpha \in \Lambda\} < \infty$.

从 X 到 Y 的所有有界线性算子的集合记为 $\mathcal{B}(X,Y)$; 如果 $X = Y$, 简记为 $\mathcal{B}(X)$. 赋予算子范数，$\mathcal{B}(X,Y)$ 成为 Banach 空间. 范数定义的拓扑又称一致拓扑. 除范数拓扑外，$\mathcal{B}(X,Y)$ 中还有其他一些重要的算子拓扑，下面是本书常用的几种.

定义 1.1.2 设 X, Y 是 Banach 空间.

(1) 由半范族

$$\{\phi_{x,f}(\cdot) = |\langle(\cdot)x, f\rangle| \mid x \in X, f \in Y^*\}$$

确定的 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上局部凸拓扑称为弱算子拓扑 (简记为 WOT);

(2) 由半范族

$$\{\psi_x(\cdot) = \|(\cdot)x\| \mid x \in X\}$$

确定的 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上局部凸拓扑称为强算子拓扑 (简记为 SOT).

(3) 设 φ 是 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上的线性泛函，如果存在序列 $\{x_i\} \subset X$ 和 $\{f_i\} \subset Y^*$ 使得 $\sum\limits_i \|x_i\|^2\|f_i\|^2 < \infty$ 且对所有的 $T \in \mathcal{B}(X,Y)$,

有 $\varphi(T)=\sum_i\langle Tx_i,f_i\rangle$, 则称 φ 是 σ-w 连续的. 由所有 σ-w 连续线性泛函决定的 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上局部凸拓扑称为 $\mathcal{B}(X,Y)$ 的 σ-w 拓扑.

设 $T\in\mathcal{B}(X,Y)$, 符号 $\operatorname{rng}(T)$ 和 $\ker T$ 分别代表 T 的值域和零空间. 算子 $T\in\mathcal{B}(X,Y)$ 称为有限秩的, 如果 T 的值域 $\operatorname{rng}(T)$ 是有限维子空间, $\operatorname{rng}(T)$ 的维数也称之为 T 的秩. 用 $\mathcal{F}(X,Y)$ 表示 $\mathcal{B}(X,Y)$ 中所有有限秩算子的集合. 设 $y\in Y$, $f\in X^*$ 非零, 则由 $x\mapsto\langle x,f\rangle y$ 定义的算子是一秩的, 通常记为 $y\otimes f$. $\mathcal{B}(X,Y)$ 中的每个一秩算子都可表示为这种形式.

命题 1.1.5 $\mathcal{B}(X,Y)$ 中的秩 n 算子可表示为 n 个一秩算子的和.

命题 1.1.6 $\mathcal{B}(X)$ 中有限秩算子理想在 $\mathcal{B}(X)$ 中按照弱算子拓扑是稠密的.

命题 1.1.7 $\mathcal{B}(X)$ 的换位是平凡的, 即若 $T\in\mathcal{B}(X)$ 与 $\mathcal{B}(X)$ 中每个算子 S 都交换 ($TS=ST$), 则存在数 λ 使得 $T=\lambda I$, 其中 I 表示 X 上的恒等算子.

定义 1.1.3 令 $T\in\mathcal{B}(X,Y)$. 由 T 按如下方式可定义另一算子 T^*:

$$T^*(f)x=f(Tx),\quad \forall x\in X,\ f\in Y^*,$$

T^* 是 Y^* 到 X^* 的线性算子, 称 T^* 是 T 的共轭算子. 易验证 T^* 也有界且 $\|T\|=\|T^*\|$.

定义 1.1.4 设 X 是 Banach 空间且 $T\in\mathcal{B}(X)$. 如果存在多项式 $p(t)$ 使得 $p(T)=0$, 称 T 是代数算子; 如果对每个 $x\in X$, 存在与 x 有关的多项式 $p_x(t)$ 使得 $p_x(T)x=0$, 称 T 是局部代数算子.

定理 1.1.8 (局部代数算子的 Kaplansky 定理 [181]) 局部代数算子一定是代数算子.

定理 1.1.9 (Liouville 定理) 设 $x(\cdot)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 到 Banach 空间 X 中的有界解析函数, 则存在 X 中的固定元 x_0, 使得对任意的 $z\in\mathbb{C}$, 有 $x(z)=x_0$, 即整个复平面上定义的有界解析向量值函

数是常函数.

定理 1.1.10 (次调和函数的 Liouville 定理 [9]) 整个复平面上的有界次调和函数是常函数.

定义 1.1.5 设 X 是复 Banach 空间且 $T \in \mathcal{B}(X)$.

(1) T 的谱 $\sigma(T)$ 是集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T$ 在 $\mathcal{B}(X)$ 中不可逆 $\}$.

(2) T 的左谱 $\sigma_l(T)$ 是集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T$ 在 $\mathcal{B}(X)$ 中不左可逆 $\}$.

(3) T 的右谱 $\sigma_r(T)$ 是集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T$ 在 $\mathcal{B}(X)$ 中不右可逆 $\}$.

(4) T 的点谱 $\sigma_p(T)$ 是集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid$ 存在非零向量 $x \in X$, 使得 $(\lambda I - T)x = 0\}$.

(5) T 的近似点谱 $\sigma_{ap}(T)$ 是集合 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid$ 存在单位向量序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ 使得 $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0\}$.

(6) T 的满谱 $\sigma_s(T)$ 是 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - T)X \neq X\}$.

(7) T 的压缩谱 $\sigma_c(T)$ 是 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{rng}(\lambda I - T)$ 在 X 中不稠密 $\}$.

(8) T 的谱半径 $r(T) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}(= \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le \|T\|.)$

以后, 我们也常把算子 $\lambda I - T$ 简记为 $\lambda - T$.

命题 1.1.11 设 X 是复 Banach 空间且 $T \in \mathcal{B}(X)$. 则下列成立:

(1) $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma_l(T)$.

(2) $\sigma_s(T) \subseteq \sigma_r(T)$.

(3) 集合 $\sigma(T)$, $\sigma_l(T)$, $\sigma_r(T)$, $\eta\sigma(T)$, $\sigma_{ap}(T)$ 和 $\sigma_s(T)$ 都包含 $\partial\sigma(T)$, 其中集合 $\partial\sigma(T)$ 代表 T 的谱边界, $\eta\sigma(T)$ 代表 $\sigma(T)$ 的多项式凸包, 称之为 T 的全谱 (full spectrum).

证明 只需证明 (3) 成立, 显然只需证明 $\sigma_{ap}(T)$ 和 $\sigma_s(T)$ 都包含 $\partial\sigma(T)$ 即可. 事实上, 由 [51; p.215, 命题 6.7] 可知, $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. 下证 $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_s(T)$. 设 $\lambda \in \partial\sigma(T)$ 但 $\lambda \notin \sigma_s(T)$, 那么

$\text{rng}(\lambda-T)$ 满且 $\lambda-T$ 不是单射算子，由 [196; p.285, 问题 1c] 知，λ 属于 $\sigma(T)$ 的内部，矛盾. 所以 $\partial\sigma(T)\subset\sigma_s(T)$. 证毕.

定义 1.1.6 设 X 和 Y 是 Banach 空间，$T\in\mathcal{B}(X,Y)$.

(1) 如果 T 把有界集映为列紧集，称 T 是紧算子. $\mathcal{B}(X,Y)$ 中的紧算子全体之集合记为 $\mathcal{K}(X,Y)$(当 $X=Y$ 时简记为 $\mathcal{K}(X)$，它是 $\mathcal{B}(X)$ 的范闭理想).

(2) 称商代数 $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ 为 Calkin 代数，记作 $\mathcal{C}(X)$. 设 $\pi(\cdot)$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ 的商映射. 如果 $\pi(T)$ 是 $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ 中的可逆元，则称 T 为 Fredholm 算子.

T 为 Fredholm 算子当且仅当 T 具有闭值域且 $\dim(\ker T)<\infty$, $\dim(\text{rng}(T))^{\perp}<\infty$. 紧算子 T 具有许多类似于有限维空间算子的谱性质，例如 T 的每个非零谱点都是点谱 (即特征值) 且只要 $\lambda\neq 0$, $\lambda-T$ 就是 Fredholm 算子.

定义 1.1.7 设 H 是线性空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是其上的一个二元函数. 如果 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 关于第一个变元是线性的而关于第二个变元是共轭线性的，且满足下列条件：对任意 $x,y\in H$,

(1) $\langle x,x\rangle\geq 0$, 而 $\langle x,x\rangle=0\Rightarrow x=0$;

(2) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$,

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 H 上的内积. 设 H 是 Banach 空间且具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 如果 H 上的范数 $\|\cdot\|$ 由此内积导出，即对任意的 $x\in H$, 有 $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$, 则称 H 为 Hilbert 空间.

设 H 为 Hilbert 空间，如果 $x,y\in H$ 满足 $\langle x,y\rangle=0$, 称 x 与 y 正交. 如果 $\{e_i\mid i\in\Lambda\}$ 是 H 中一族相互正交的单位向量，且其线性张在 H 中稠密，则称它为 H 的一个标准正交基. 此时，任意 $x\in H$ 可惟一表示为 $x=\sum\limits_{i\in\Lambda}\langle x,e_i\rangle e_i$. 可分 Hilbert 空间存在可数标准正交基.

定义 1.1.8 设 H 是 Hilbert 空间，其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 令 $A\in\mathcal{B}(H)$. 则存在 $A^*\in\mathcal{B}(H)$ 使得对任意 $x,y\in H$ 都有 $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle$ 成立，称 A^* 为 A 的共轭算子或伴随算子.

(1) 如果 $A^*=A$, 称 A 是自伴算子.

(2) 如果 A 自伴且对每个 $x\in H$, 有 $\langle Ax,x\rangle\geq 0$, 称 A 是正算子.

(3) 如果 $A^k=A$, 称 A 是 k- 阶幂等算子, 其中 k 是一自然数; 2- 阶幂等算子称为幂等算子.

(4) 如果存在自然数 k 使 $A^k=0$, 称 A 是幂零算子; 如果 $A^k=0$ 但 $A^{k-1}\neq 0$, 称 A 为 k- 阶幂零算子.

(5) 如果 A 是正算子且 A 是 2- 阶幂等算子, 称 A 是投影.

(6) 如果 $AA^*=A^*A$, 称 A 是正规算子.

(7) 如果 $AA^*=A^*A=I$, 称 A 是酉算子; 如果 $A^*A=I$, 称 A 是等距算子; 如果 A^*A 和 AA^* 都是投影算子, 称 A 是部分等距算子, 而 A^*A 和 AA^* 分别称为 A 的始投影和终投影.

(8) 如果存在正规算子 B 及 B 的不变子空间 M 使得 $A=B|_M$, 称 A 是次正规算子.

(9) 如果 $A^*A\geq AA^*$, 称 A 是亚正规算子.

对 Banach 空间情形同样可定义幂零算子, k- 阶幂零算子和 k- 阶幂等算子的概念.

定理 1.1.12 ([176]) 设 H 是无限维的 Hilbert 空间. 则对任意的 $T\in\mathcal{B}(H)$, T 可表示为 $\mathcal{B}(H)$ 中有限多个平方零算子的和以及有限多个幂等算子的和; 当 H 为复空间时, T 可表示为最多 5 个平方零算子的和, 最多 5 个幂等算子的和以及有限多个投影的线性组合.

命题 1.1.13 设 H 是 Hilbert 空间且 $T\in\mathcal{B}(H)$ 是亚正规算子, 则 $r(T)=\|T\|$. 即, 亚正规算子的谱半径等于其范数.

定理 1.1.14 (亚正规算子的 Fuglede-Putnam 定理 [97]) 设 H 是 Hilbert 空间. 令 $T,S^*\in\mathcal{B}(H)$ 是亚正规算子. 对于 $W\in\mathcal{B}(H)$, 如果 $TW=WS$, 则 $T^*W=WS^*$, 并且 $T|_{\overline{\mathrm{rng}(W)}}$ 和 $S|_{(\ker W)^\perp}$ 是酉等价的正规算子.

定义 1.1.9 设 $A\in\mathcal{B}(X)$ 且 $M\subset X$ 是闭线性子空间. 如果对任意的 $x\in M$, 有 $Ax\in M$, 称 M 是 A 的不变子空间. $\mathrm{Lat}A$

表示 A 在 X 中的所有不变子空间的集合；如果 $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}(X)$, 则 $\mathrm{Lat}\mathcal{L} = \cap_{A\in\mathcal{L}}\mathrm{Lat}A$.

命题 1.1.15 设 H 是 Hilbert 空间. 如果 $A, P \in \mathcal{B}(H)$ 且 P 是到 H 的子空间 M 上的投影, 则 $M \in\mathrm{Lat}A$ 当且仅当 $AP = PAP$.

命题 1.1.16 设 X 是 Banach 空间, $A, P \in \mathcal{B}(H)$. 如果 $P^2 = P$, 则 $\mathrm{rng}(P), \ker P \in\mathrm{Lat}A$ 当且仅当 $AP = PA$.

定义 1.1.10 设 X 是 Banach 空间且 M 是 X 的子空间. 令 $M^\perp = \{f \in X^* \mid f(M) = 0\}$, 称 $M^\perp$ 是 M 的零化子. 当 X 是 Hilbert 空间时, 有 $M^\perp \subset X$, 称 $M^\perp$ 是 M 的正交补.

定义 1.1.11 设 H 是 Hilbert 空间且 M 是 H 的子空间. 令 $A \in \mathcal{B}(H)$. 如果 $M, M^\perp \in\mathrm{Lat}A$, 称 M 约化 A, 即 M 是 A 的约化子空间.

显然 M 约化 A 当且仅当 $M \in (\mathrm{Lat}A)\cap(\mathrm{Lat}A^*)$. 命题 1.1.16 蕴涵 M 约化 A 当且仅当到 M 上的投影与 A 交换.

定义 1.1.12 设 $A \in \mathcal{B}(H)$. 如果 A 不存在任何非平凡约化子空间, 称 A 是不可约算子.

命题 1.1.17 ([69], [71]) 设 H 是 Hilbert 空间且 $T, S \in \mathcal{B}(H)$. 则下列陈述等价:

(1) $\mathrm{rng}(T) \subseteq\mathrm{rng}S$.

(2) 存在算子 $R \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $T = SR$.

(3) 存在正数 δ 使得 $TT^* \le \delta SS^*$.

定义 1.1.13 设 H 是 Hilbert 空间. 令 $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$ 是 H 的一组标准正交基, $A \in \mathcal{B}(H)$. 对于 $1 \le p < \infty$, 定义

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i\in\Lambda}\langle Ae_i, e_i\rangle,$$

$$\|A\|_p = (\mathrm{tr}(|A|^p))^{\frac{1}{p}},$$

$\mathrm{tr}(A)$ 称为算子 A 的迹. 易验证, 迹与标准正交基的选取无关. 如果 $\|A\|_p < \infty$, 称 A 是 Schatten p- 类算子, 而当 $p = 1$ 时, 称 A 为迹类算子, 当 $p = 2$ 时, 称 A 是 Hilbert-Schmidt 算子.

H 上全体有限秩算子, 全体紧算子, 全体 Schatten p- 类算子分别记为 $\mathcal{F}(H)$, $\mathcal{K}(H)$ $(=\mathcal{C}_\infty(H))$ 和 $\mathcal{C}_p(H)$.

命题 1.1.18 设 H 是 Hilbert 空间.

(1) $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p < \infty)$ 是 $\mathcal{C}_p(H)$ 上的范数.

(2) $(\mathcal{C}_p(H), \|\cdot\|_p)$ $(1 \le p < \infty)$ 是 Banach 空间.

(3) 对任意的 A, $B \in \mathcal{C}_2(H)$, 定义 $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^*A)$, 则 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathcal{C}_2(H)$ 上的内积, 且 $\|\cdot\|_2$ 是由 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 诱导出的范数, 故 $\mathcal{C}_2(H)$ 是 Hilbert 空间.

(4) $\mathcal{F}(H), \mathcal{K}(H), \mathcal{C}_p(H)$ $(1 \le p < \infty)$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的理想.

(5) $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{C}_1(H) \subseteq \mathcal{C}_2(H) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}_p(H) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{K}(H)$ 且 $\mathcal{F}(H)$ 在 $\mathcal{C}_p(H)$ $(1 \le p < \infty)$ 中按照范数 $\|\cdot\|_p$ 稠密.

(6) 如果 H 可分, 则紧算子理想 $\mathcal{K}(H)$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的惟一非平凡闭双边理想.

定义 1.1.14 设 $A \in \mathcal{B}(H)$ 是紧算子. 则存在 H 的一组标准正交向量列 $\{e_n\}$ 使得

$$|A|x = (A^*A)^{\frac{1}{2}}x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad \forall x \in H,$$

其中 $\{\lambda_n\}$ 是非负不增且趋于零的数列. 我们把 $\{\lambda_n\}$ 称为 A 的 s 数, 即奇异数.

命题 1.1.19 设 $\{\lambda_n\}$ 是 $A \in \mathcal{K}(H)$ 的奇异数. 则对于 p $(1 \le p < \infty)$, 有

$$\|A\|_p = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

定理 1.1.20 ([179; p.215]) 令 H 和 K 是 Hilbert 空间且 $1 \le p < \infty$. 则 $A \in \mathcal{B}(H, K)$ 属于 $\mathcal{C}_p(H)$ 当且仅当对所有的 $S \in \mathcal{B}(l_2, H)$ 及 $T \in \mathcal{B}(l_2, K)$, 有 $(\langle ASe_i, Te_i \rangle) \in l_p$, 其中 $\{e_i\}$ 是 l_2 的一组标准正交基.

定义 1.1.15 设 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是可分 Hilbert 空间 H 的一组标准

正交基. 定义 $Se_n = e_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则 S 称为单侧移位算子.

命题 1.1.21 设 S 是 Hilbert 空间 H 上的单侧移位算子, 则下列断言成立:

(1) $\|S\| = 1$ 且 S 是等距,

(2) $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$,

(3) S 是不可约算子, 即没有非平凡约化子空间.

命题 1.1.22 设 S 是 Hilbert 空间 H 上的单侧移位算子, 如果 $W \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $SW = WS^*$, 则 $W = 0$.

定义 1.1.16 设 $P, Q \in \mathcal{B}(H)$,

(1) 形式为 $PQ - QP$ 的算子称为交换子, 记为 $[Q, P]$.

(2) P 与 P^* 的交换子记为 $[P] = P^*P - PP^*$.

命题 1.1.23 紧算子和恒等算子非零常数倍的和不是交换子. 换句话说, 换位子的平移不是紧算子.

在本节的剩余部分, 我们介绍算子的数值域和数值半径及其常用的一些性质.

定义 1.1.17 设 H 是 Hilbert 空间. 对任意的 $A \in \mathcal{B}(H)$, A 的数值域和数值半径分别定义为

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle \mid x \in H, \| x \| = 1\},$$

$$w(A) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in W(A)\}.$$

下面是有关数值域和数值半径的一些基本结论. 关于这两个概念更多的信息, 读者可参考文献 [95] 的第一章和文献 [84].

命题 1.1.24 ([84]) 设 H 是 Hilbert 空间且 $A \in \mathcal{B}(H)$.

(1) $W(A) = W(A^{tr})$, 其中 A^{tr} 表示 A 关于 H 的任意但预先固定的标准正交基的转置.

(2) 对任意的酉算子 $U \in \mathcal{B}(H)$, $W(A) = W(UAU^*)$.

(3) 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $W(\lambda A) = \lambda W(A)$.

(4) 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $W(\lambda I + A) = \lambda + W(A)$.

命题 1.1.25 ([84]) 设 $A \in \mathcal{B}(H)$, 则 $W(A)$ 总是凸集. 特别地, 如果 $A \in M_2(\mathbb{C})$ 酉相似于 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 那么 $W(A)$ 是焦点为 λ_1 和 λ_2, 短轴长度为 $|b|$ 的椭圆盘, 其中 $M_2(\mathbb{C})$ 代表 2×2 复矩阵代数.

命题 1.1.26 ([84]) 设 $A \in \mathcal{B}(H)$, 那么 $W(A) = \{\lambda\}$ 当且仅当 $A = \lambda I$.

命题 1.1.27 ([84, 95]) 设 $N \subseteq H$ 是闭子空间且 $A \in \mathcal{B}(H)$, 那么

$$W(P_N A|_N) \subseteq W(A) \quad \text{且} \quad w(P_N A|_N) \leq w(A).$$

命题 1.1.28 ([95; §1.2.9]) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $A + A^*$ 分别以 λ_n 和 λ_1 作为最大和最小特征值, 那么

$$[\lambda_1, \lambda_n] = \{z + \bar{z} \mid z \in W(A)\}.$$

命题 1.1.29 ([84]) 如果 $A \in \mathcal{B}(H)$ 酉相似于 $A_1 \oplus A_2$, 那么

$$W(A) = \text{conv}\{W(A_1) \cup W(A_2)\}.$$

其中 conv(Ω) 代表集合 Ω 的凸包.

命题 1.1.30 ([84]) $w(\cdot)$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的范数且这个范数等价于通常的算子范数.

§1.2 Banach 代数

一般地, 我们指的算子代数是 von Neumann 代数 (常简记为 vN 代数), C*- 代数或更一般地是 Banach 代数. 本节及后面两节, 我们将分别介绍 Banach 代数, C*- 代数, vN 代数和套代数的概念及一些在后面章节中经常用到的基本结论, 其证明及详细讨论, 参见文献 [64], [133], [142],[168] 和 [184].

定义 1.2.1 设 $\mathcal{A}$ 是一个代数, $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{A}$ 上的范数. 如果 $\mathcal{A}$

按此范数成为 Banach 空间，且满足

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \qquad \forall A,\ B \in \mathcal{A},$$

则称 $\mathcal{A}$ 为 Banach 代数.

设 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数, 则存在 Banach 空间 X 及同态 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(X)$ 使得 $\pi(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 的闭子代数, 称 π 是 $\mathcal{A}$ 在 X 上的表示. 因而 Banach 代数也可看作是算子代数.

定义 1.2.2 设 $\mathcal{A}$ 是含单位元 I 的复 Banach 代数且 $A \in \mathcal{A}$. A (相对于 $\mathcal{A}$) 的谱 $\sigma(A)$ 与谱半径 $r(A)$ 分别定义为

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \text{ 在 } \mathcal{A} \text{ 中不可逆}\},$$

$$r(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

$\mathcal{A}$ 中每个元的谱都是复平面 $\mathbb{C}$ 的非空紧子集. 如果 A 的谱半径等于 0, 称 A 是拟幂零元.

有时为明确起见, 用 $\sigma^{\mathcal{A}}(A)$ 表示 A 相对于代数 $\mathcal{A}$ 的谱.

定理 1.2.1 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是包含单位元的 Banach 代数且 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. 令 $A \in \mathcal{B}$, 则 $\sigma^{\mathcal{A}}(A) \subseteq \sigma^{\mathcal{B}}(A)$, $\partial\sigma^{\mathcal{B}}(A) \subseteq \partial\sigma^{\mathcal{A}}(A)$.

命题 1.2.2 ([9]) 谱半径是次调和函数.

定理 1.2.3 ([9]) 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 Banach 代数且 $\mathcal{B}$ 半单. 令 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是线性满射. 如果 Φ 是谱半径不增的, 即, 对任意的 $A \in \mathcal{A}$, $r(\Phi(A)) \leq r(A)$, 则 Φ 连续.

定义 1.2.3 设 $\mathcal{A}$ 是包含单位元 I 的 Banach 代数且 $A \in \mathcal{A}$. 记

$$H(A) = \{f \mid f \text{ 是在 } \sigma(A) \text{ 的某个领域中解析的复值函数 }\}.$$

如果 $f \in H(A)$, 则

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)(zI - A)^{-1}dz,$$

其中 Γ 是 f 的解析区域中可度长的封闭曲线, 并且包围 $\sigma(A)$.

定理 1.2.4 (函数演算) 设 $\mathcal{A}$ 是包含单位元的 Banach 代数且 $A \in \mathcal{A}$.

(1) $f \mapsto f(A)$ 是 $H(A)$ 到 $\mathcal{A}$ 中的 (代数) 同态;

(2) 设 $f_n, f \in H(A)$, 并且在 $\sigma(A)$ 的某个紧领域中, f_n 一致地收敛于 f, 则 $f_n(A) \to f(A)$;

(3) 设 $f(z) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k z^k$ 在 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ 中解析, 其中 $r > r(A)$, 则 $f(A) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k A^k$, 右边的级数依范数绝对收敛.

定义 1.2.4 设 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数, 未必包含单位元. 假定 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{A}$ 的线性子空间且 $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$. 如果 $\mathcal{A}\mathcal{J} = \{AB \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{J}\} \subset \mathcal{J}$ (或 $\mathcal{J}\mathcal{A} \subset \mathcal{J}$), 称 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{A}$ 的左理想 (或右理想). 如果 $\mathcal{J}$ 既是 $\mathcal{A}$ 的右理想又是 $\mathcal{A}$ 的左理想, 称 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{A}$ 的双边理想或理想.

令 rad$\mathcal{A}$ 代表 Banach 代数 $\mathcal{A}$ 的 Jocobson 根基, rad$\mathcal{A}$ 的等价定义很多, 在这儿我们只给出一种定义 (参见文献 [9] 和 [64]).

定义 1.2.5 $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \{A \in \mathcal{A} \mid$ 对所有的 $B \in \mathcal{A}$, AB 都是拟幂零的 $\}$.

显然 rad$\mathcal{A}$ 包含在 $\mathcal{A}$ 的所有拟幂零元的集合中.

定理 1.2.5 ([9]) 设 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数. 则下列陈述等价:

(1) $A \in$rad$\mathcal{A}$,

(2) 对任意的拟幂零元 $Q \in \mathcal{A}$, $r(A+Q) = 0$.

定义 1.2.6 设 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数.

(1) 如果 $\mathcal{A}$ 不包含任何非平凡闭理想, 称 $\mathcal{A}$ 是简单的.

(2) 如果 rad$\mathcal{A} = \{0\}$, 称 $\mathcal{A}$ 是半单的.

(3) 对任意的 $T, S \in \mathcal{A}$, 如果 $T\mathcal{A}S = 0$ 蕴涵 $T = 0$ 或 $S = 0$, 称 $\mathcal{A}$ 是素的.

例 1.2.1 设 H 是可分的 Hilbert 空间, 则 Calkin 代数 $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ 是简单的, 素的.

例 1.2.2 (1) 设 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数, 则 $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ 是半单的.

(2) 设 X 是 Banach 空间，则 $\mathcal{B}(X)$ 是半单的，素的 Banach 代数.

定义 1.2.7 令 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 是两个环，设 $\phi:\mathcal{R}\to\mathcal{R}'$ 是可加映射. 如果对任意的 $A, B\in\mathcal{R}$, $\phi(AB+BA)=\phi(A)\phi(B)+\phi(B)\phi(A)$, 称 ϕ 为 Jordan 同态. 如果环 R' 的特征不等于 2, 则 ϕ 为 Jordan 同态当且仅当对任意的 $A\in\mathcal{R}$, $\phi(A^2)=\phi(A)^2$.

双射 Jordan 同态称为 Jordan 同构，显然同构和反同构是 Jordan 同构，然而也存在不是同构或反同构的 Jordan 同构.

例 1.2.3 任取两个同构的非交换环 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_1'$ 以及两个反同构的非交换环 $\mathcal{R}_2$ 和 $\mathcal{R}_2'$. 令 $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1\oplus\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}'=\mathcal{R}_1'\oplus\mathcal{R}_2'$ 且令 $\phi_1:\mathcal{R}_1\to\mathcal{R}_1'$ 是同构， $\phi_2:\mathcal{R}_2\to\mathcal{R}_2'$ 是反同构. 定义映射 $\varphi:\mathcal{R}\to\mathcal{R}'$ 为 $\varphi(a_1\oplus a_2)=\phi_1(a_1)\oplus\phi_2(a_2)$, 则 φ 是 Jordan 同构. 但容易验证 φ 既不是同构也不是反同构. 事实上， Herstein [92] 有关 Jordan 同态的研究表明，只要环 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 其中之一包含两个乘积为零的非零理想，则可找到异于同构或反同构的 Jordan 同构.

定理 1.2.6 ([93]) 令 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}'$ 是两个环，设 $\phi:\mathcal{R}\to\mathcal{R}'$ 是满值域的 Jordan 同态. 如果 $\mathcal{R}'$ 是素环，则 ϕ 是同态或反同态.

定理 1.2.7 ([28]) 局部矩阵代数上的 Jordan 同态是同态与反同态的和.

定理 1.2.8 ([1]) (1) 实数域到其自身的环同态是恒等映射.

(2) 复数域到其自身的连续环同态是恒等映射或共轭映射.

§1.3 C*- 代数和 von Neumann 代数

定义 1.3.1 设 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数. 如果 $\mathcal{A}$ 中具有对合运算 $*:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 且满足下面的四个条件，称 $\mathcal{A}$ 是 C*- 代数:

(1) $(\alpha A+\beta B)^*=\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*$,

(2) $(AB)^*=B^*A^*$,

(3) $(A^*)^*=A$,

(4) $\| A^*A \| = \| A \|^2$.

定义 1.3.2 设 $\mathcal{A}$ 是 C*- 代数且 $A, B \in \mathcal{A}$.

(1) 如果 $A^* = A$, 称 A 是自伴元.

(2) 如果 A 自伴且 $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$, 称 A 是正元，其中 $\mathbb{R}^+$ 代表非负实数集合.

(3) 如果 $A^2 = A$, 称 A 是幂等元.

(4) 如果 A 是正幂等元，称 A 是投影.

(5) 如果 A 和 B 是投影且 $AB = 0$, 称 A 和 B 正交.

(6) 如果 $A^*A = AA^*$, 称 A 是正规元.

类似于定义 1.1.8 也可定义 C*- 代数中的酉元等.

命题 1.3.1 每个 C*- 代数都是半单的.

证明 设 $\mathcal{A}$ 是 C*- 代数. 令 $Z \in \text{rad}\mathcal{A}$, 那么 $ZZ^* \in \text{rad}\mathcal{A}$. 从而 ZZ^* 是谱为 $\{0\}$ 的自伴元，因此 $ZZ^* = 0$, $Z = 0$, 即 $\text{rad}\mathcal{A} = \{0\}$. 所以 $\mathcal{A}$ 是半单的. 证毕.

定理 1.3.2 ([34]) 设 $\mathcal{A}$ 是 C*- 代数. 则 $\mathcal{A}$ 是实秩零的当且仅当 $\mathcal{A}$ 中正交自伴幂等元实线性组合的全体在 $\mathcal{A}$ 的自伴元集合中是稠密的.

定义 1.3.3 如果 $\mathcal{A}$ 是包含恒等算子的 $\mathcal{B}(H)$ 的 C*- 子代数且具有前对偶，即存在 Banach 空间 Y 使得 Y 的对偶空间是 $\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是 von Neumann 代数 (有时简记为 vN 代数), 其中 H 是 Hilbert 空间.

定义 1.3.4 设 $\mathcal{A}$ 是 von Neumann 代数，$E, F \in \mathcal{A}$ 是投影.

(1) 如果代数 $E\mathcal{A}E$ 是交换的，称 E 是交换投影.

(2) 如果存在部分等距 $V \in \mathcal{A}$ 使得 $VV^* = E$ 且 $V^*V = F$, 称 E 和 F 等价，记为 $E \sim F$.

(3) 如果不存在 E 的任何非零子投影与 E 等价，称 E 是有限投影；否则称 E 是无限投影.

(4) 如果 E 是无限投影且对每个中心投影 P, PE 要么为零要么是无限投影，称 E 是真无限投影.

(5) 如果 E 的每个非零正交子投影族是可数的，称 E 相对于代数 $\mathcal{A}$ 是可数可分解的.

定义 1.3.5 设 $\mathcal{A}$ 是 vN 代数且 $T \in \mathcal{A}$, 则 T 的中心覆盖 C_T 是投影 $I-P$, 其中 P 是 $\mathcal{A}$ 中满足 $P_\alpha T = 0$ 的所有中心投影 P_α 的并，即 C_T 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 中满足 $QT = T$ 的最小中心投影 Q, 其中 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 代表 $\mathcal{A}$ 的中心.

定义 1.3.6 设 $\mathcal{A}$ 是 vN 代数.

(1) 如果 $\mathcal{A}$ 包含一个交换投影且其中心覆盖是单位算子 I, 称 $\mathcal{A}$ 是 I 型的；如果恒等算子 I 可表示为 n 个等价交换投影的和，称 $\mathcal{A}$ 是 I_n 型的.

(2) 如果 $\mathcal{A}$ 不包含任何交换投影，但有一个有限投影具有中心覆盖是单位算子 I, 称 $\mathcal{A}$ 是 II 型的；如果 I 是有限投影，称 $\mathcal{A}$ 是 II_1 的；如果 I 真无限，称 $\mathcal{A}$ 是 II_∞ 型的.

(3) 如果 $\mathcal{A}$ 没有任何非零有限投影，称 $\mathcal{A}$ 是 III 型的.

(4) 如果 $\mathcal{A}$ 不是 III 型的，则称 $\mathcal{A}$ 是半有限的.

(5) 如果恒等算子 I 是真无限投影，称代数 $\mathcal{A}$ 是真无限的.

(6) 如果恒等算子 I 是可数可分解的，称代数 $\mathcal{A}$ 是可数可分解的.

(7) 如果 $\mathcal{A}$ 的中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}I$, 称 $\mathcal{A}$ 是因子，其中 $\mathbb{C}$ 代表复数域.

定理 1.3.3 ([133]) vN 代数有限当且仅当它有一个忠实的正规中心值迹.

定理 1.3.4 ([133]) 设 ρ 是在有限 vN 代数 $\mathcal{A}$ 的中心上恒等的正规中心值迹，$E, F \in \mathcal{A}$ 是投影. 则 $E \sim F$ 当且仅当 $\rho(E) = \rho(F)$.

定理 1.3.5 ([133]) 每个有限因子是简单的.

定理 1.3.6 ([133]) 每个可数可分解的 III 型因子是简单的.

定理 1.3.7 ([133]) 设 $\mathcal{R}$ 是可数可分解的 I_∞ 或 II_∞ 型因子，则具有有限值域投影的算子构成的理想的范数闭包是 $\mathcal{R}$ 的惟一真范闭双边理想.

命题 1.3.8 ([184]; 命题 2.9.24, 2.9.25, 2.9.26) 有限，或 III 型，或半有限但其换位真无限的因子 von Neumann 代数的 *- 自同构 Φ 是空间的，即存在酉算子 U 使得对代数中任意元 T 都有 $\Phi(T) = UTU^*$.

§1.4 套代数

前一节介绍的 C*- 代数和 von Neumann 代数都是半单代数且是自伴代数，本节介绍一类重要的非半单、非自伴的算子代数，即套代数，的一些基本性质.

定义 1.4.1 Banach 空间 X 上的套 (nest) $\mathcal{N}$ 是包含 $\{0\}$ 和 X 且在任意闭线性张 (由 $\bigvee$ 表示) 和交 (由 $\bigwedge$ 表示) 运算之下封闭的 X 的闭子空间链. 与套 $\mathcal{N}$ 相应的套代数记为 Alg$\mathcal{N}$,

$$\text{Alg}\mathcal{N} = \{T \in \mathcal{B}(X) \mid \text{对任意的 } N \in \mathcal{N}, \text{有 } TN \subseteq N\}.$$

$\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} = \text{Alg}\mathcal{N} \cap \mathcal{F}(X)$ 代表 Alg$\mathcal{N}$ 中的有限秩算子集合. 对于 $N \in \mathcal{N}$, 记

$$N_+ = \wedge\{M \in \mathcal{N} \mid N \subset M\}, \qquad N_- = \vee\{M \in \mathcal{N} \mid M \subset N\}.$$

命题 1.4.1 设 $\mathcal{N}$ 是 Banach 空间 X 上的套， Alg$\mathcal{N}$ 是相应的套代数，则 Alg$\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 的弱闭子代数.

命题 1.4.2 对于 $x \in X$ 及 $f \in X^*$, 一秩算子 $x \otimes f \in \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 当且仅当存在 $N \in \mathcal{N}$ 使得 $x \in N$ 且 $f \in N_-^{\perp}$.

命题 1.4.3 ([64]) 设 $\mathcal{N}$ 是 Banach 空间 X 上的套，$T \in \text{Alg}\mathcal{N}$. 则 T 是一秩算子当且仅当对任意 S, $R \in \text{Alg}\mathcal{N}$, $STR = 0$ 蕴涵 $ST = 0$ 或 $TR = 0$.

命题 1.4.4 套代数中的秩 n 算子可写为该套代数中 n 个秩一算子的和，且套代数中有限秩算子的集合在该代数中按照强算子拓扑是稠密的.

命题 1.4.5 套代数的换位是平凡的，即套代数的换位由恒等算子的倍数组成.

设 $\mathcal{N}$ 是 Banach 空间 X 上的套. 如果 $\mathcal{N}=\{\{0\},X\}$, 则相应的套代数是平凡的, 因为 $\text{Alg}\mathcal{N}=\mathcal{B}(X)$; 如果 $\mathcal{N}\neq\{\{0\},X\}$, 我们称 $\mathcal{N}$ 是非平凡套, 相应的套代数称为非平凡套代数.

命题 1.4.6 非平凡套代数不是半单的.

定理 1.4.7 设 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 分别是 Banach 空间 X 和 Y 上的两个非平凡套, 如果存在可逆算子 $S\in\mathcal{B}(X,Y)$ 使得 $S(\mathcal{N})=\{S(N)\mid N\in\mathcal{N}\}=\mathcal{M}$, 称 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 相似. 显然由 $\theta_S(N)=S(N)$ 所定义的 θ_S 是 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 之间的保维序同构.

定义 1.4.2 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的套. 如果 $N\in\mathcal{N}$ 满足 $N\ominus N_-\neq 0$, 称 $N\ominus N_-$ 是 $\mathcal{N}$ 的原子; 如果 H 由 $\mathcal{N}$ 的原子张成, 称 $\mathcal{N}$ 是原子套; 如果 $\mathcal{N}$ 不含任何原子, 称 $\mathcal{N}$ 是连续套; 如果 $\mathcal{N}$ 是原子套且所有的原子都是一维的, 称 $\mathcal{N}$ 是极大原子套.

在本章结束之前, 我们再介绍一些本书常采用的符号. 设 X,Y 是 Banach 空间, 对于 $T\in\mathcal{B}(X)$, 用 $\overline{\text{rng}}(T)$ 表示 $\text{rng}(T)$ 的闭包. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 的子代数, 用 $\text{GL}(\mathcal{A})$ 代表 $\mathcal{A}$ 中的可逆元群. 令 M 是 X 的子空间, 用 $\dim M$ 表示 M 的维数; 符号 $\text{rank}(T)$ 代表 T 的秩, 即 $\text{rank}(T)=\dim\text{rng}(T)$; $T|_M$ 表示 T 到 M 的限制. $M^\perp=\{f\in X^*\mid$ 对任意的 $x\in M$, 有 $f(x)=0\}$ 表示 M 的零化子. 正如通常一样, 我们用 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示复数域, 实数域, 有理数域, 整数集和自然数集.

第二章　$\mathcal{F}(X)$上的保秩线性和可加映射

本章总假定 X 和 Y 是数域 $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$) 上维数大于 2 的 Banach 空间. 设 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ 为一映射, k 是正整数, 如果 Φ 把 $\mathcal{F}(X)$ 中的每个 k 秩算子映为 $\mathcal{F}(Y)$ 中的 k 秩算子, 则称 Φ 是保 k 秩的; 如果 Φ 保持每个有限秩算子的秩不变, 则称 Φ 保秩. 如果 Φ 把每个 k 秩算子映为秩不大于 k 的算子, 则称 Φ 为秩 k 不增的; 类似可定义秩不增映射的概念. 本章讨论秩不增和保秩线性映射以及可加映射的表示问题, 是后续一些章节的基础. 因为不少保持问题的讨论都可转化为保秩一或秩一不增的情形. 第一和第二节讨论线性的情形, 分别刻画了秩不增和完全秩不增, 保秩和完全保秩的线性映射. 第三、四、五节则讨论更一般的可加情形, 分别给出秩不增、保秩一幂等性以及保秩一幂零性可加映射的具体形式.

§2.1　保秩线性映射

本节讨论保秩和秩不增线性映射的表示问题. 设 $x\in X$, $f\in X^*$ (X 的共轭空间), 用张量积 $x\otimes f$ 表示一秩算子 $\langle\cdot,f\rangle x$. 下面定理在以后经常用到.

定理 2.1.1　设 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ 是线性映射. 则 Φ 秩不增当且仅当下列之一成立:

(i) 存在线性映射 $A:X\to Y$ 和 $C:X^*\to Y^*$ 使得 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$ 对所有 $x\in X$ 及 $f\in X^*$ 都成立;

(ii) 存在线性映射 $A:X^*\to Y$ 和 $C:X\to Y^*$ 使得 $\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cx$ 对所有 $x\in X$ 及 $f\in X^*$ 都成立;

(iii) 存在线性映射 $\varphi:\mathcal{F}(X)\to Y$ 和线性泛函 $f_0\in Y^*$ 使得对任意的 $T\in\mathcal{F}(X)$, 有 $\Phi(T)=\varphi(T)\otimes f_0$;

(iv) 存在向量 $x_0 \in Y$ 和线性映射 $\psi : \mathcal{F}(X) \to Y^*$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{F}(X)$, 有 $\Phi(T) = x_0 \otimes \psi(T)$.

先给出两个基本引理. 设 $x \in X, f \in X^*$, 记

$$L_x = \{x \otimes g \mid g \in X^*\}, \qquad R_f = \{z \otimes f \mid z \in X\}.$$

引理 2.1.2 设 $\Phi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ 为线性映射, 且把一秩算子映为秩最多为一的算子, 则下列之一成立:

(i) 对所有的 $x \in X$ 都有 $\Phi(L_x) \subset L_{y(x)}$;

(ii) 对所有的 $x \in X$ 都有 $\Phi(L_x) \subset R_{f(x)}$.

证明 为叙述方便, 不妨设 $Y = X$.

如果对每个 $x \in X$, $\Phi(L_x)$ 都是最多一维的子空间, 则 (i) 和 (ii) 都成立. 下设存在 x_0 使得 $\dim\Phi(L_{x_0}) \geq 2$. 如果 $\Phi(L_{x_0})$ 即不含于某个 L_x 又不含于某个 R_f, 则存在 $f_1, f_2 \in X^*$ 使得 $\Phi(x_0 \otimes f_1) = x_1 \otimes g_1, \Phi(x_0 \otimes f_2) = x_2 \otimes g_2$, 其中 x_1 与 x_2, g_1 与 g_2 都是线性无关的. 此蕴涵 $\Phi(x_0 \otimes (f_1 + f_2))$ 为秩二算子, 与假设条件矛盾. 因此 $\Phi(L_{x_0})$ 要么包含于某个 L_{y_0}, 要么包含于某个 R_{f_0}.

现在设 $\Phi(L_{x_0}) \subset L_{y_0}$. 令 $M = \{x \in X \mid \Phi(L_x) \subset L_{y(x)}\}, N = \{x \in X \mid \Phi(L_x) \subset R_{f(x)}$ 且 $\dim\Phi(L_x) \geq 2\}$. 显然有 $M \cap N = \emptyset$, $M \cup N = X$. 如果 $N \neq \emptyset$, 取 $x_1 \in N$, 则对任意的 $f \in X^*$, 有

$$\Phi(x_0 \otimes f) = y_0 \otimes g_0(f), \qquad \Phi(x_1 \otimes f) = y_1(f) \otimes g_1,$$

$$\Phi((x_0 + x_1) \otimes f) = y_0 \otimes g_0(f) + y_1(f) \otimes g_1. \tag{2.1.1}$$

不妨设 $x_0 + x_1 \in N$ (属于 M 的情形可类似处理), 于是 $\Phi((x_0 + x_1) \otimes f) = y_2(f) \otimes g_2$, 由 (2.1.1) 式得

$$y_0 \otimes g_0(f) + y_1(f) \otimes g_1 = y_2(f) \otimes g_2. \tag{2.1.2}$$

因 $\dim\Phi(L_{x_1}) \geq 2$, 故存在 f 使得 $y_1(f)$ 与 y_0 线性无关, 从而由 (2.1.2) 式知存在复数 α 使得 $g_2 = \alpha g_1$, 但由此导出 $\dim\Phi(L_{x_0}) < 2$, 矛盾. 所以 $M = X$, 即 (i) 成立.

类似可证，如果 $\Phi(L_{x_0})\subset R_{f_0}$，则必有 (ii) 成立．证毕．

同理对于 $\Phi(R_f)$ 的情形有下面的结论．

引理 2.1.2′ 设 Φ 如同引理 2.1.2 所设，则下列之一成立：

(i) 对所有的 $f\in X^*$ 都有 $\Phi(R_f)\subset R_{g(f)}$；

(ii) 对所有的 $f\in X^*$ 都有 $\Phi(R_f)\subset L_{y(f)}$．

引理 2.1.3 令 $A,B\in\mathcal{B}(X)$．则对每个 $x\in X$，Ax 与 Bx 都线性相关的充分必要条件是下列之一成立：

(1) A 和 B 线性相关；

(2) 存在 $x_0\in X$ 以及 $f_1,f_2\in X^*$ 使得 $A=x_0\otimes f_1$，$B=x_0\otimes f_2$．

特别地，如果还满足 $\ker B\subseteq\ker A$，则存在常数 λ 使得 $B=\lambda A$．

证明 充分性显然，只需证必要性．为此，假定对所有 $x\in X$，Ax 与 Bx 都线性相关，但 A 与 B 线性无关．容易看出，$\ker A\cap\ker B\neq\ker A$ 且 $\ker A\cap\ker B\neq\ker B$．于是可取到 X 中向量 x_0 和 y_0 使得 $Ax_0\neq 0$，$By_0\neq 0$ 而 $Ay_0=Bx_0=0$．令 $M=\mathrm{span}\{\ker A,\ker B\}$，则 $A|_M$ 和 $B|_M$ 都是从 M 到 X 中的一秩算子，从而也有相同的值域．我们断言 $M=X$．如若不然，则 A 和 B 中至少有一个的秩大于 1，不妨设 A 的秩大于 1，那么可找到向量 $x\in X\backslash M$ 使得 Ax 与 Ax_0 线性无关，而此将蕴涵 $A(x+x_0)$ 与 $B(x+x_0)$ 线性无关，与假设矛盾．故 $M=X$，从而 A 和 B 是具有相同值域的一秩算子，即 (2) 成立．证毕．

引理 2.1.4 令 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ 为线性映射．

(i) 若对 $x\in X$，$f\in X^*$ 都有 $\Phi(L_x)\subset L_{\varphi(x)}$，$\Phi(R_f)\subset R_{r(f)}$，且存在线性无关的 $\varphi(x_1),\varphi(x_2)$ (或 $r(f_1),r(f_2)$)，则存在线性算子 $A:X\to Y$ 和 $C:X^*\to Y^*$ 使得 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$ 对所有 $x\in X$ 和 $f\in X^*$ 都成立；

(ii) 若对 $x\in X$，$f\in X^*$ 都有 $\Phi(L_x)\subset R_{\varphi(x)}$，$\Phi(R_f)\subset L_{r(f)}$，且存在线性无关的 $\varphi(x_1),\varphi(x_2)$ (或 $r(f_1),r(f_2)$)，则存在线性算子 $A:X^*\to Y$，$C:X\to Y^*$ 使得 $\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cx$ 对所有 $x\in X$ 和 $f\in X^*$ 都成立．

证明 (i) 显然 Φ 把一秩算子映为至多一秩的算子. 不妨设有 $r(f_1)$ 与 $r(f_2)$ 线性无关且 $X=Y$. 由条件知, 对每个 $f\in X^*$, 有 X 上的映射 ψ_f 使得

$$\Phi(x\otimes f)=\psi_f(x)\otimes r(f), \tag{2.1.3}$$

且当 $r(f)\neq 0$ 时, $\psi(f)$ 是 X 上的线性映射. 现在用 ψ 表示 $\psi_{f_1+f_2}$, 由

$$\psi(x)\otimes r(f_1+f_2)=\Phi(x\otimes(f_1+f_2))=\psi_{f_1}(x)\otimes r(f_1)+\psi_{f_2}(x)\otimes r(f_2)$$

知, 对任意的 $x\in X$, $\psi_{f_1}(x)$, $\psi_{f_2}(x)$ 都与 $\psi(x)$ 线性相关, 且 $\psi(x)=0$ 当且仅当

$$\psi_{f_1}(x)=\psi_{f_2}(x)=0,$$

利用引理 2.1.3, 存在复数 α,β 使得 $\psi_{f_1}=\alpha\psi$, $\psi_{f_2}=\beta\psi$. 对任意的 $f\in X^*$, 若 $r(f)=0$, 可令 $\psi_f=\psi$; 如果 $r(f)\neq 0$, 则它必与 $r(f_1)$ 和 $r(f_2)$ 之一线性无关, 结合前述论证得 ψ_f 仍与 ψ 线性相关, 因而 $\{\psi_f\mid f\in X^*\}$ 张成的线性子空间是一维的. 令 $r(f)$ 吸收一个适当的常数, 然后记为 Cf, 则存在 X 上的线性映射 A 使得 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$, 显然 C 是 X^* 上的线性映射.

类似可证结论 (ii) 成立. 证毕.

定理 2.1.1的证明 设 Φ 是秩不增的. 根据引理 2.1.2, 可分下面两种情形.

1. 对所有的 $x\in X$ 都有 $\Phi(L_x)\subset L_{\varphi(x)}$. 此时如果存在 x_1, $x_2\in X$ 使得 $\varphi(x_1)$ 与 $\varphi(x_2)$ 线性无关, 则可证明, 对任意的 $f\in X^*$ 都有 $\Phi(R_f)\subset R_{r(f)}$, 故由引理 2.1.4 知结论 (i) 成立. 如果对所有的 $x\in X$, $\varphi(x)$ 都与 $x_0\neq 0$ 线性相关, 即 $\varphi(x)=\tau(x)x_0$, 其中 $\tau(x)$ 为复数, 则可得

$$\varphi(x\otimes f)=x_0\otimes\tau(x)r_x(f).$$

记 $\lambda(x\otimes f)=\tau(x)r_x(f)$. 由 Φ 的线性可知, $\lambda(\cdot)$ 能惟一扩张为定义于 $\mathcal{F}(X)$ 上取值于 X^* 中的线性映射, 故 (iv) 成立.

2. 对所有的 $x\in X$ 都有 $\Phi(L_x)\subset R_{\varphi(x)}$. 此时若有 $\varphi(x_1)$ 和 $\varphi(x_2)$ 线性无关, 则对所有的 $f\in X^*$, 都有 $\Phi(R_f)\subset L_{r(f)}$, 由引理 2.1.4 得结论 (ii) 成立. 如果对所有的 $x\in X, \varphi(x)$ 都与某个 f_0 线性相关, 则存在线性映射 $\delta(\cdot):\mathcal{F}(X)\to X$ 使得结论 (iii) 成立. 证毕.

注 2.1.1 定理 2.1.1 中情形 (iii), (iv) 是可能出现的, 例如取 $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_i\}_{i=1}^n\subset X$, $\{f_i\}_{i=1}^n\subset X^*$, 令 $\delta(T)=\sum\limits_{i=1}^n\langle Tx_i,f_i\rangle y_i$, $\Phi(T)=\delta(T)\otimes f_0$.

下面推论由定理 2.1.1 立得.

推论 2.1.5 设 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ 是秩不增的线性映射. 如果存在 $T_0\in\mathcal{F}(X)$ 使得 $\Phi(T_0)$ 的秩大于 1, 则 Φ 必为定理 2.1.1 中形式 (i) 和 (ii) 之一.

定理 2.1.6 线性映射 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ 是保秩的当且仅当定理 2.1.1 中情形 (i) 或 (ii) 成立, 且线性映射 A,C 都是单射.

证明 如果 Φ 保秩, 显然推论 2.1.5 中条件被满足, 故 Φ 取定理 2.1.1 中的形式 (i) 或 (ii). 又, 如果 A 或 C 不是单射, 则 Φ 把某个秩一算子映为 0, 因此不可能保秩. 所以, 条件是必要的. 下证条件的充分性. 不妨设 (i) 成立, 即 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$, 其中 A,C 都是线性单射. 设 $F\in\mathcal{F}(X)$ 为 n 秩算子, 于是有线性无关组 $\{x_i\}_{i=1}^n\subset X, \{f_i\}_{i=1}^n\subset X^*$ 使得 $F=\sum\limits_{i=1}^n x_i\otimes f_i$. 显然 $\{Ax_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{Cf_i\}_{i=1}^n$ 也是线性无关组, 故 $\Phi(F)=\sum\limits_{i=1}^n Ax_i\otimes Cf_i$ 也是 n 秩的, 这就证明了 Φ 的保秩性. 证毕.

推论 2.1.7 $\mathcal{F}(X)$ 上线性映射 Φ 保持秩不变的充要条件是 Φ 为保一秩的且存在 $T_0\in\mathcal{F}(X)$ 使得 $\Phi(T_0)$ 的秩大于 1.

当 Φ 按某个算子拓扑连续时, 有更具体的表示.

定理 2.1.8 设 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ 是有界线性映射. 则 Φ 秩不增当且仅当下列之一成立:

(i) 存在 $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ 和 $C \in \mathcal{B}(X^*,Y^*)$ 使得 $\Phi(T) = ATC^*|_Y$ 对任意 $T \in \mathcal{F}(X)$ 成立；

(ii) 存在 $A \in \mathcal{B}(X^*,Y)$ 和 $C \in \mathcal{B}(X,Y^*)$ 使得 $\Phi(T) = AT^*C^*|_Y$ 对任意 $T \in \mathcal{F}(X)$ 成立；

(iii) 存在有界线性映射 $\varphi : \mathcal{F}(X) \to Y$ 和线性泛函 $f_0 \in Y^*$ 使得 $\Phi(T) = \varphi(T) \otimes f_0$ 对任意 $T \in \mathcal{F}(X)$ 成立；

(iv) 存在向量 $x_0 \in Y$ 和有界线性映射 $\psi : \mathcal{F}(X) \to Y^*$ 使得 $\Phi(T) = x_0 \otimes \psi(T)$ 对任意 $T \in \mathcal{F}(X)$ 成立.

特别地，对于弱连续线性映射的情形，我们有

定理 2.1.9 设 $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 为弱连续线性映射且把秩一算子映为最多一秩的算子，则 Φ 必具有下列形式之一：

(i) 存在 $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, $B \in \mathcal{B}(Y,X)$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$, $\Phi(T) = ATB$;

(ii) 存在 $A \in \mathcal{B}(X^*,Y)$ 和 $B \in \mathcal{B}(Y,X^*)$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$, $\Phi(T) = AT^*B$;

(iii) 存在弱 - 弱连续线性映射 $\delta(\cdot) : \mathcal{B}(X) \to X$ 及 $f_0 \in X^*$ 使得对任意 $T \in \mathcal{B}(X)$, $\Phi(T) = \delta(T) \otimes f_0$;

(iv) 存在弱 - 弱连续线性映射 $\lambda(\cdot) : \mathcal{B}(X) \to X^*$ 及 $x_0 \in X$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$, $\Phi(T) = x_0 \otimes \lambda(T)$.

证明 由假设知，Φ 具有定理 2.1.1 中的四种形式之一. 如果定理 2.1.1 (i) 成立，利用 Φ 的弱连续性及闭图定理知 A, C 都有界且 C 还是弱 $*$ 连续的，因而有

$$C^*\kappa X \subset \kappa X,$$

其中 κ 为 X 到 X^{**} 中的典型嵌入. 令 $B = \kappa^{-1}C^*\kappa \in \mathcal{B}(X)$, 则对每个一秩算子，从而也对每个有限秩算子 F, 有 $\Phi(F) = AFB$. 由于有限秩算子全体在 $\mathcal{B}(X)$ 中弱稠，故对 $T \in \mathcal{B}(X)$ 都有 $\Phi(T) = ATB$, 即本定理的情形 (i) 成立. 其他情形可类似处理. 证毕.

对于保一秩线性映射我们有如下推论.

推论 2.1.10 设 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上弱连续的线性映射. 如果存在 $T_0\in\mathcal{B}(X)$ 使得 $\Phi(T_0)$ 的秩大于 1, 那么 Φ 保一秩的充分必要条件是 Φ 为下列形式之一：

(i) 存在单射算子 $A\in\mathcal{B}(X)$ 和稠值域算子 $B\in\mathcal{B}(X)$ 使得对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$, $\Phi(T)=ATB$;

(ii) 存在单射算子 $A\in\mathcal{B}(X^*,X)$ 和稠值域算子 $B\in\mathcal{B}(X,X^*)$ 使得对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$, $\Phi(T)=AT^*B$.

证明 利用推论 2.1.5 和定理 2.1.9 易得. 证毕.

对于有限维情形, 我们有下列结果.

推论 2.1.11 线性映射 $\Phi: M_n(\mathbb{F})\to M_m(\mathbb{F})$ 秩不增当且仅当下列之一成立：

(i) 存在 $m\times n$ 矩阵 A 和 $n\times m$ 矩阵 B 使得 $\Phi(T)=ATB$ 对任意 $T\in M_n(\mathbb{F})$ 都成立;

(ii) 存在 $m\times n$ 矩阵 A 和 $n\times m$ 矩阵 B 使得 $\Phi(T)=AT^{tr}B$ 对任意 $T\in M_n(\mathbb{F})$ 都成立, 其中 T^{tr} 表示 T 的转置矩阵;

(iii) 存在 $m\times n$ 矩阵 $A_1,\cdots,A_r$ 和向量 $x_1,\cdots,x_r\in\mathbb{F}^n$, $f_0\in\mathbb{F}^m$ 使得 $\Phi(T)=\sum\limits_{i=1}^{r}A_iT(x_i\otimes f_0)$ 对任意 $T\in M_n(\mathbb{F})$ 都成立;

(iv) 存在 $n\times m$ 矩阵 $B_1,\cdots,B_r$ 和向量 $f_1,\cdots,f_r\in\mathbb{F}^m$, $x_0\in\mathbb{F}^n$ 使得 $\Phi(T)=\sum\limits_{i=1}^{r}(x_0\otimes f_i)TB_i$ 对任意 $T\in M_n(\mathbb{F})$ 都成立.

证明 由定理 2.1.8, 我们只需证明 (iii) 和 (iv). 如果 Φ 具有定理 2.1.1 (iii) 中的形式, 则存在线性映射 $\varphi: M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}^m$ 和向量 $f_0\in\mathbb{F}^m$ 使得对任意 $T\in M_n(\mathbb{F})$, 有 $\Phi(T)=\varphi(T)\otimes f_0$. 因此存在 $M_n(\mathbb{F})$ 上的 m 个线性泛函 φ_i 使得 $\varphi(T)=(\varphi_1(T),\cdots,\varphi_m(T))=\sum\limits_{k=1}^{m}\varphi_k(T)e_k$, 其中 $\{e_k\}_{k=1}^m$ 是 $\mathbb{F}^m$ 的标准正交基. 对任意的 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $x_{k1},\cdots,x_{kr_k}, f_{k1},\cdots,f_{kr_k}\in\mathbb{F}^n$ 使得 $\varphi_k(T)=\sum\limits_{i=1}^{r_k}\langle Tx_{ki},f_{ki}\rangle$,

从而

$$\begin{aligned}\Phi(T) &= \left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{r_k}\langle Tx_{ki}, f_{ki}\rangle\right]\otimes f_0\\ &= \sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{r_k}(e_k\otimes f_{ki})\right]T(x_{ki}\otimes f_0)\\ &= \sum_{k=1}^{m}A_kT(x_{ki}\otimes f_0),\end{aligned}$$

其中 $A_k=\sum_{i=1}^{r_k}(e_k\otimes f_{ki})$. 类似可证 (iv) 成立. 证毕.

推论 2.1.12 设 $\Phi: M_n(\mathbb{F})\to M_n(\mathbb{F})$ 是线性映射. 则 Φ 保秩当且仅当下列之一成立:

(i) 存在可逆矩阵 A, $B\in M_n(\mathbb{F})$ 使得对所有的 $T\in M_n(\mathbb{F})$, 有 $\Phi(T)=ATB$;

(ii) 存在可逆矩阵 A, $B\in M_n(\mathbb{F})$ 使得对所有的 $T\in M_n(\mathbb{F})$, 有 $\Phi(T)=AT^{tr}B$.

下面讨论保秩一幂等算子的线性映射.

定理 2.1.13 设 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ 为线性映射, 如果 Φ 把一秩幂等算子映为一秩幂等算子, 且每个一秩幂等算子都属于 Φ 的值域, 则 Φ 必为下列形式之一:

(i) 存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 使得对任意的 T, $\Phi(T)=ATA^{-1}$;

(ii) 存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X^*,Y)$ 使得对任意的 T, $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$, 且在此情形 X 和 Y 是自反的.

证明 只考虑 $X=Y$ 的情形. 非零一秩算子 $x\otimes f$ 为幂等的充要条件是 $\langle x,f\rangle=1$, 因此只要 $\langle x,f\rangle\neq 0$, 就有 $\Phi(x\otimes f)$ 是一秩的. 如果 $\langle x,f\rangle=0$, 取 x_1, $x_2\in\ker f$, 使得 x_1 与 x_2 线性无关且 $x=\alpha x_1+\beta x_2$, 再取 $y_0\in X$ 使得 $\langle y_0,f\rangle=1$. 令 $y_1=y_0+\alpha x_1$, $y_2=y_0-\beta x_2$. 因 $\langle y_i,f\rangle=1$, 故存在 $u_i\in X$, $g_i\in X^*$ 使得

$\Phi(y_i \otimes f) = u_i \otimes g_i$, $i = 1, 2$. 同样, 对任意的 $t \in [0, 1]$, 有

$$\Phi((ty_1 + (1-t)y_2) \otimes f) = v_t \otimes g_t,$$

即有

$$tu_1 \otimes g_1 + (1-t)u_2 \otimes g_2 = v_t \otimes g_t. \tag{2.1.4}$$

上式蕴涵 g_1 与 g_2 线性相关或 u_1 与 u_2 线性相关, 所以 $\Phi(x \otimes f) = \Phi((y_1 - y_2) \otimes f)$ 的秩最多为 1, 即 Φ 是秩一不增的. 其次, 显然存在 T_0 使得 $\Phi(T_0)$ 的秩大于 1, 根据推论 2.1.5, Φ 必为下列形式之一:

(1) 存在线性映射 $A: X \to X$, $C: X^* \to X^*$ 使得 $\Phi(x \otimes f) = Ax \otimes Cf$;

(2) 存在线性映射 $A: X^* \to X$, $C: X \to X^*$ 使得 $\Phi(x \otimes f) = Af \otimes Cx$.

因为 Φ 保持秩一幂等性和秩一幂零性, 我们必有 $\langle Ax, Cf\rangle = \langle x, f\rangle$ 对所有的 $x \in X$ 和 $f \in X^*$ 成立或 $\langle Af, Cx\rangle = \langle x, f\rangle$ 对所有的 $x \in X$ 和 $f \in X^*$ 成立. 无论哪种情形我们都有 $C = (A^{-1})^*$. 由于 A^* 总是闭算子而 C 是处处有定义的, 故由闭图定理知, A 和 C 都有界. 显然 A 和 C 都是双射.

设 Φ 具有形式 (1). 取 $x, y \in X$, $f \in X^*$. 注意到 $(\Phi(x \otimes f))y = (Ax \otimes Cf)y = \langle y, Cf\rangle Ax = \langle A^{-1}y, f\rangle Ax = (A(x \otimes f)A^{-1})y$, 故 (i) 得证.

假如情形 (2) 成立, 容易证明对任意的 $x \in X$, $f \in X^*$ 都有 $\Phi(x \otimes f) = A(f \otimes x)A^{-1} = A(x \otimes f)^* A^{-1}$, 故 Φ 具有 (ii) 的形式. 下证 X 是自反的. 对任意的 $g \in X^*$ 且 $g \neq 0$, 取 $y \in X$ 使得 $\langle y, g\rangle = 1$, 由定理条件知 $y \otimes g \in \mathrm{rng}(\Phi)$, 即存在 $T_0 \in \mathcal{B}(X)$ 使得 $AT_0^* A^{-1} = y \otimes g$, 从而 $T_0^* = A^{-1}y \otimes A^* g$. 而此蕴涵 $A^* g \in \kappa X$, 即有 $\mathrm{rng}(A^*) \subset \kappa X$. 由 A^* 的可逆性得 $\kappa X = X^{**}$, 所以 X 自反. 证毕.

当 X 为 Hilbert 空间时, 上述结果中形式 (ii), (iv) 的线性映射 A, B 和 $\lambda(\cdot)$ 应改述为共轭线性映射. 这里映射称为共轭线性的,

如果对所有的复数 α,β 及向量 u,v, 都有 $S(\alpha u+\beta v)=\overline{\alpha}Su+\overline{\beta}Sv$ 成立.

§2.2 完全秩不增线性映射

本节讨论完全秩不增的线性映射.

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是数域 $\mathbb{F}$ ($=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的 Banach 空间. 令 $\hat{X}=\oplus_{i=1}^n X_i$, 即 $\hat{X}=\{\hat{x}=(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in X_i\}$, 其中范数定义为 $\|\hat{x}\|=\left[\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2\right]^{\frac{1}{2}}$. 对任意的 $T\in\mathcal{B}(\hat{X})$, T 可表示为 $n\times n$ 算子矩阵 $T=(T_{ij})$, 其中 $T_{ij}\in\mathcal{B}(X_j,X_i)$. 如果 $X_1=\cdots=X_n=X$, 我们用 X^n 代表 $\hat{X}$. 假定 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 的线性子空间. 对任意的正整数 n, $\mathcal{M}\otimes M_n(\mathbb{F})=\{(T_{ij})_{n\times n}\mid T_{ij}\in\mathcal{M}\}$ 是 $\mathcal{B}(X^n)$ 的线性子空间.

定义 2.2.1 设 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{F}(X)$ 和 $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{F}(Y)$ 是线性子空间, $\Phi:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ 为线性映射. 如果对任意的正整数 n, $\Phi_n:\mathcal{M}\otimes M_n(\mathbb{F})\to\mathcal{N}\otimes M_n(\mathbb{F})$ 秩不增 (或保秩), 称 Φ 完全秩不增 (或完全保秩), 其中 Φ_n 定义为 $\Phi_n((T_{ij}))=(\Phi(T_{ij}))$.

并非每个秩不增的线性映射都是完全秩不增的. 例如迹 $\mathrm{tr}: M_2(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ 是秩不增的但不是完全秩不增的. 事实上, 令 E_{ij} $(i,j=1,2)$ 是 $M_2(\mathbb{F})$ 的矩阵单位, 即 E_{ij} 在 (i,j) 处的值是 1, 其余位置的值为 0. 则 $(E_{ij})\in M_2(\mathbb{F})\otimes M_2(\mathbb{F})$ 是一秩元, 但是 $(tr)_2((E_{ij}))=(tr(E_{ij}))=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 具有秩 2. 再例如, 定义 $\Phi: M_2(\mathbb{F})\to M_2(\mathbb{F})$ 为 $\Phi(T)=T^t$, 则 Φ 秩不增, 但 $\Phi_2((E_{ij}))=(E_{ij}^t)$ 具有秩 4, 所以不是完全秩不增的. 然而如果存在网 $\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}\subseteq\mathcal{B}(X,Y)$ 和 $\{B_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}\subseteq\mathcal{B}(X,Y)$ 使得对每个 $T\in\mathcal{M}$, 有 $\Phi(T)=\lim_\lambda A_\lambda TB_\lambda$ (SOT 或 WOT), 则 Φ 完全秩不增. 那么其逆命题是否成立? 即我们有下面的问题.

问题 2.2.1 设 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{F}(X)$ 是线性子空间而 $\Phi:\mathcal{M}\to\mathcal{F}(Y)$

是有界线性映射. 假设 Φ 是完全秩不增的, 是否一定存在算子网 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$ 和 $\{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{B}(Y,X)$, 使得关于弱算子拓扑 WOT (或强算子拓扑 SOT), 对任意 $T \in \mathcal{M}$ 都有 $\Phi(T) = \lim_\lambda A_\lambda T B_\lambda$?

我们首先考虑 $\mathcal{M} = \mathcal{F}(X)$ 的情形. 下面的定理给出此情形的肯定回答.

定理 2.2.1 设 $\Phi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ 是有界线性映射. 则下列论断等价:

(1) Φ 完全秩不增;

(2) Φ_2 秩不增;

(3) 存在 $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ 和 $C \in \mathcal{B}(X^*,Y^*)$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{F}(X)$, 有 $\Phi(T) = ATC^*|_Y$;

(4) 存在 $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ 和网 $\{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{B}(Y,X)$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{F}(X)$, 有 $\Phi(T) = \lim_\lambda ATB_\lambda$ (WOT).

证明 显然 (4)⇒(1)⇒(2).

(3)⇒(4). 假定 (3) 成立. 对任意的有限子集 $\lambda = \{y_i; f_i \mid i = 1, \cdots, n\}$, 其中 $y_i \in Y$ 且 $f_i \in X^*$, 存在 $B_\lambda \in \mathcal{B}(Y,X)$ 使得 $\langle B_\lambda y_i, f_i\rangle = \langle f_i, C^* y_i\rangle$, $i = 1, \cdots, n$. 令 Λ 是所有有限集 λ 的集合, 定义集合间的包含关系为 Λ 中的偏序, 即 $\lambda_1 \succeq \lambda_2$ 当且仅当 $\lambda_1 \supseteq \lambda_2$. 对任意的 $\lambda \in \Lambda$, 取 B_λ, 则对每个 $y \in Y$ 及 $f \in X^*$, 都有 $\lim_\lambda \langle B_\lambda y, f\rangle = \langle f, C^* y\rangle$. 因此对任意的 $T \in \mathcal{F}(X)$, 我们有 $\Phi(T) = \lim_\lambda ATB_\lambda$ (WOT).

(2)⇒(3). 假定 $\Phi \neq 0$ 是完全秩不增的, 则由定理 2.1.7, Φ 取定理 2.1.7 中的形式 (i)—(iv) 之一. 我们必须证明 Φ 只取 (i) 的形式. 注意到, $\dim X \geq 2$.

假定 Φ 取定理 2.1.7 (ii) 中的形式, 即对任意的 T, 有 $\Phi(T) = AT^*C^*|_Y$. 取 $x_i \in X$ 及 $f_i \in X^*$, $i = 1, 2$. 则

$$T = \begin{pmatrix} x_1 \otimes f_1 & x_1 \otimes f_2 \\ x_2 \otimes f_1 & x_2 \otimes f_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}(X) \otimes M_2(\mathbb{F})$$

具有一秩且 $\Phi_2(T)=\begin{pmatrix} Af_1\otimes Cx_1 & Af_2\otimes Cx_1 \\ Af_1\otimes Cx_2 & Af_2\otimes Cx_2 \end{pmatrix}$.

如果 $\mathrm{rank}(A)\geq 2$ 或 $\mathrm{rank}(C)\geq 2$, 例如假定 $\mathrm{rank}(A)\geq 2$, 那么存在 $f_i\in X^*$ 使得 Af_1 与 Af_2 线性无关. 容易验证 $\mathrm{rank}(\Phi_2(T))\geq 2$, 与 Φ_2 秩不增矛盾. 如果 A 和 C 都具有一秩, 令 $A=u\otimes v$, $C=g\otimes h$, 其中 $u\in Y$, $v\in X^{**}$, $g\in Y^*$ 且 $h\in X^*$. 则对任意的一秩算子 $x\otimes f\in\mathcal{F}(X)$, 我们有

$$\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cf=v(f)u\otimes h(x)g=(u\otimes h)(x\otimes f)(v\otimes g),$$

所以 Φ 具有 (i) 中的形式.

假定 Φ 具有定理 2.1.7 (iii) 中的形式, 即 $\Phi(T)=\varphi(T)\otimes f_0$. 对任意的一秩元 $S=\begin{pmatrix} x_1\otimes f_1 & x_1\otimes f_2 \\ x_2\otimes f_1 & x_2\otimes f_2 \end{pmatrix}\in\mathcal{F}(X)\otimes M_2(\mathbb{F})$,

$$\Phi_2(S)=\begin{pmatrix} \varphi(x_1\otimes f_1)\otimes f_0 & \varphi(x_1\otimes f_2)\otimes f_0 \\ \varphi(x_2\otimes f_1)\otimes f_0 & \varphi(x_2\otimes f_2)\otimes f_0 \end{pmatrix}$$

具有一秩当且仅当 $\begin{pmatrix} \varphi(x_1\otimes f_1) \\ \varphi(x_2\otimes f_1) \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \varphi(x_1\otimes f_2) \\ \varphi(x_2\otimes f_2) \end{pmatrix}$ 线性相关. 取 x_1 和 f_1 使得 $\varphi(x_1\otimes f_1)\neq 0$. 则对所有的 $x\in X$ 及 $f\in X^*$, 有

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_1\otimes f) \\ \varphi(x\otimes f) \end{pmatrix}=\alpha(x,f)\begin{pmatrix} \varphi(x_1\otimes f_1) \\ \varphi(x\otimes f_1) \end{pmatrix}.$$

容易看出, $\alpha(x,f)\in\mathbb{F}$ 不依赖于 x, 因此 $\alpha(x,f)=\alpha(f)$ 且 $\alpha\in X^{**}$. 令 $Ax=\varphi(x\otimes f_1)$, 则 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$. 所以 $\Phi(x\otimes f)=\alpha(f)Ax\otimes f_0=A(x\otimes f)(\alpha\otimes f_0)$ 且对所有的 $T\in\mathcal{F}(X)$, 有 $\Phi(T)=AT(\alpha\otimes f_0)$, 此情形仍化为形式 (i).

假定 Φ 具有定理 2.1.7 (iv) 中的形式, 即 $\Phi(T)=x_0\otimes\psi(T)$.

令 S 是如上的一秩线性变换，则

$$\Phi_2(S)=\begin{pmatrix} x_0\otimes\psi(x_1\otimes f_1) & x_0\otimes\psi(x_1\otimes f_2)\\ x_0\otimes\psi(x_2\otimes f_1) & x_0\otimes\psi(x_2\otimes f_2)\end{pmatrix}$$

具有一秩当且仅当 $\begin{pmatrix}\psi(x_1\otimes f_1)\\ \psi(x_1\otimes f_2)\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}\psi(x_2\otimes f_1)\\ \psi(x_2\otimes f_2)\end{pmatrix}$ 线性相关. 取 x_1 和 f_1 使得 $\psi(x_1\otimes f_1)\neq 0$. 显然存在 $\beta\in X^*$ 使得对所有的 $x\in X$ 及 $f\in X^*$, 有

$$\begin{pmatrix}\psi(x\otimes f_1)\\ \psi(x\otimes f)\end{pmatrix}=\beta(x)\begin{pmatrix}\psi(x_1\otimes f_1)\\ \psi(x_1\otimes f)\end{pmatrix}.$$

对任意的 $f\in X^*$, 令 $Cf=\psi(x_1\otimes f)$, 则 $C\in\mathcal{B}(X^*,Y^*)$. 所以 $\Phi(x\otimes f)=x_0\otimes\beta(x)Cf=(x_0\otimes\beta)(x\otimes f)C^*$ 且对所有的 $T\in\mathcal{F}(X)$, 有 $\Phi(T)=(x_0\otimes\beta)TC^*$. 证毕.

推论 2.2.2 令 X 和 Y 是 $\mathbb{F}$ 上的自反 Banach 空间. 假定 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ 是有界线性映射，则下列陈述等价:

(1) Φ 完全秩不增.

(2) Φ_2 秩不增.

(3) 存在 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 和 $B\in\mathcal{B}(Y,X)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{F}(X)$, 有 $\Phi(T)=ATB$.

注意到如果 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{F}(X)$ 的真子空间，则完全秩不增的线性映射 $\Phi:\mathcal{M}\to\mathcal{F}(Y)$ 可能具有问题 2.2.1 中的形式，但却不具有定理 2.2.1 (3) 中的形式.

例 2.2.1 令 $\mathcal{M}=\{T=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{F})\}$, 其中 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$. 取序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{F}$ 使得 $a_n\neq 0$, 但 $|a_n|\to 0$, 令 $A_n=\begin{pmatrix}1 & a_n^{-1}\end{pmatrix}$ 且 $B_n=\begin{pmatrix}1\\ a_n\end{pmatrix}$. 那么

$$\lim_{n\to\infty}A_nTB_n=\lim_{n\to\infty}(\alpha+\beta+a_n\gamma)=\alpha+\beta=tr(T).$$

因此迹函数到 $\mathcal{M}$ 的限制是完全秩不增的，但不存在任何 A, B 使得对于 $T \in \mathcal{M}$, 有 $tr(T) = ATB$.

对于完全保秩线性映射，我们有下列结论.

推论 2.2.3 设 $\Phi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ 是有界线性映射. 则下列陈述等价:

(1) Φ 完全保秩;

(2) Φ_2 保秩;

(3) 存在单射算子 $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ 和 $C \in \mathcal{B}(X^*, Y^*)$ 使得对所有的 $T \in \mathcal{F}(X)$, 有 $\Phi(T) = ATC^*|_Y$.

特别地，我们有

推论 2.2.4 设 $\Phi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ 是线性映射，则下列陈述等价:

(1) Φ 完全保秩;

(2) Φ_2 保秩;

(3) Φ 完全秩不增且把某个可逆矩阵映成可逆矩阵;

(4) Φ_2 秩不增且把某个可逆矩阵映成可逆矩阵;

(5) 存在可逆矩阵 $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ 使得对所有的 $T \in M_n(\mathbb{F})$, 有 $\Phi(T) = ATB$.

由例 2.2.1 和推论 2.2.4, 问题 2.2.1 在有限维情形可叙述如下.

问题 2.2.2 设 $\mathcal{M} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ 是子空间且 $\Phi : \mathcal{M} \to M_n(\mathbb{F})$ 是线性映射. 如果 Φ 是完全秩不增的，是否存在可逆矩阵 $A_k, B_k \in M_n(\mathbb{F})$ 使得对任意的 $T \in M_n(\mathbb{F})$, 有 $\Phi(T) = \lim_{n\to\infty} A_kTB_k$?

问题 2.2.2 与另一未解决的矩阵组的渐近联合相似性问题密切相关. 设 $\mathbf{T} = (T_1, \cdots, T_m)$ 和 $\mathbf{S} = (S_1, \cdots, S_m)$ 是 m- 矩阵组，其中 $T_i, S_i \in M_n(\mathbb{F})$. 令

$$\mathcal{S}(\mathbf{T}) = \{A\mathbf{T}A^{-1} = (AT_1A^{-1}, \cdots, AT_mA^{-1}) \mid A \in M_n(\mathbb{F}) \text{ 可逆}\}.$$

则 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{S}$ 渐近联合相似当且仅当 $\mathbf{S} \in \mathcal{S}(\mathbf{T})^-$ 且 $\mathbf{T} \in \mathcal{S}(\mathbf{S})^-$. 如果 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, 在文献 [63] 中， Curto 和 Herrero 猜测 $\mathbf{S} \in \mathcal{S}(\mathbf{T})^-$ 当且仅当对任意的非交换多项式 P, 有 $\text{rank}(P(\mathbf{S})) \le \text{rank}(P(\mathbf{T}))$.

设 $\mathbb{F}[t_1,\cdots,t_m]$ 是具有变量 $t_1,\cdots,t_m$ 的所有非交换多项式线性空间. 令 $\mathcal{M}(\mathbf{T})=\{P(\mathbf{T})=P(T_1,\cdots,T_m)\mid P\in\mathbb{F}[t_1,\cdots,t_m]\}$ 是由 $\{I,T_1,\cdots,T_m\}$ 生成的 $M_n(\mathbb{F})$ 的子代数. 定义 $\Psi:\mathcal{M}(\mathbf{T})\to\mathcal{M}(\mathbf{S})\subseteq M_n(\mathbb{F})$ 为 $\Psi(P(\mathbf{T}))=P(\mathbf{S})$, 则 Ψ 事实上是代数同态 (即线性, 保单位且可乘). Curto 和 Herrero 的猜测等价于 $\mathbf{S}\in\mathcal{S}(\mathbf{T})^-$ 当且仅当 Ψ 秩不增. 然而, 正如在文献 [88] 中所指出的, 这个猜测的回答是否定的. 合理的猜测应为

猜测 2.2.3 $\mathbf{S}\in\mathcal{S}(\mathbf{T})^-$ 当且仅当 Ψ 完全秩不增.

显然, 如果猜测 2.2.3 成立, 则下列猜测也成立.

猜测 2.2.4 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{T}$ 渐近联合相似当且仅当 Ψ 完全保秩.

如果 $\mathbf{S}\in\mathcal{S}(\mathbf{T})^-$, 则存在可逆矩阵 A_k 使得 $\mathbf{S}=\lim_{k\to\infty}A_k\mathbf{T}A_k^{-1}$. 现在对每个 $P\in\mathbb{F}[t_1,\cdots,t_m]$, 我们有 $P(\mathbf{S})=\lim_{k\to\infty}A_kP(\mathbf{T})A_k^{-1}$, 此蕴涵 $\Psi(D)=\lim_{k\to\infty}A_kDA_k^{-1}$. 故 Ψ 完全秩不增. 所以猜测的充分性显然. 然而我们不知猜测的必要性是否成立? 但如果我们能肯定回答问题 2.2.2, 则上述两个猜测都是对的. 事实上, 如果 Ψ 完全秩不增, 则存在可逆矩阵 A_k, $B_k\in M_n(\mathbb{F})$ 使得对每个非交换多项式 $P=P(t_1,\cdots,t_m)$, $P(\mathbf{S})=\lim_{k\to\infty}A_kP(\mathbf{T})B_k$. 因为 $\Phi(I)=I$, 因此 $\lim_{k\to\infty}A_kB_k=I$, 从而 $\lim_{k\to\infty}(A_kB_k)^{-1}=I$. 所以 $P(\mathbf{S})=\lim_{k\to\infty}A_kP(\mathbf{T})B_k(A_kB_k)^{-1}=\lim_{k\to\infty}A_kP(\mathbf{T})A_k^{-1}$. 于是存在矩阵 $A_k\in M_n(\mathbb{F})$ 使得对每个 $P\in\mathbb{F}[t_1,\cdots,t_m]$, 都有 $P(\mathbf{S})=\lim_{k\to\infty}A_kP(\mathbf{T})A_k^{-1}$. 特别地, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=(S_1,\cdots,S_m)\\&=\lim_{k\to\infty}(A_kT_1A_k^{-1},\cdots,A_kT_mA_k^{-1})=\lim_{k\to\infty}A_k\mathbf{T}A_k^{-1}.\end{aligned}$$

进而如果 Ψ 完全保秩, 则 Ψ 可逆且 $\Psi^{-1}:\mathcal{M}(\mathbf{S})\to\mathcal{M}(\mathbf{T})$ 完全保秩. 因此存在可逆矩阵 B_k 使得 $\mathbf{T}=\lim_{k\to\infty}B_k\mathbf{S}B_k^{-1}$, 即 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{T}$ 渐近联合相似. 如果 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 且 $\mathcal{M}(T)=\{P(T)\mid P\in\mathbb{C}[t]\}$ (即 $m=1$), 定义 $\Psi:\mathcal{M}(T)\to\mathcal{M}(S)$ 为 $\Psi(P(T))=P(S)$, 则猜测成立. 在此情形下, Ψ 保秩已蕴涵 S 和 T 相似, 即存在可逆矩阵 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $S=ATA^{-1}$ (见文献 [89]; 定理 2.1).

下面我们给出问题 2.2.2 和上述两个猜测的部分回答.

推论 2.2.5 设 $\mathcal{M}$ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的半单子代数且 $\Phi: \mathcal{M} \to M_n(\mathbb{C})$ 是线性映射. 则下列陈述等价:

(1) Φ 完全秩不增 (或保秩);

(2) Φ_2 秩不增 (或保秩);

(3) 存在矩阵 (或可逆矩阵) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 使得对所有的 $T \in \mathcal{M}$, 有 $\Phi(T) = ATB$;

(4) 存在可逆矩阵序列 (或一致下有界可逆矩阵序列) $\{A_k\}$, $\{B_k\} \subset M_n(\mathbb{C})$ 使得对所有的 $T \in \mathcal{M}$, 有 $\Phi(T) = \lim_{k\to\infty} A_k T B_k$.

证明 因为 $\mathcal{M}$ 半单, 由 Molin 定理, $\mathcal{M} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$. 现在除 (1)⇒(3) 对于完全保秩的情形外, 推论显然成立. 假定 Φ 完全保秩. 令 $n_0 = \max\{\mathrm{rank}(T) \mid T \in \mathcal{M}\} = \sum_{i=1}^{r} n_i$. 把 Φ 认为是从 $\mathcal{M} \subset M_{n_0}(\mathbb{C})$ 到 $M_n(\mathbb{C})$ 的线性映射, 则由 §2.1 中的结论, 存在秩为 n_0 的 $n \times n$ 的矩阵 A_1 和 B_1 使得 $\Phi(T) = A_1 T B_1$. 如果 $n_0 < n$, 令 A_2 是 $\mathbb{C}^n$ 上的算子使得 $\ker A_2 = \mathrm{rng}(A_1)$ 且 $\mathrm{rng}(A_2) = (\mathrm{rng}(A_1))^{\perp}$; B_2 满足 $\ker(B_2) = \mathrm{rng}(B_1)$ 且 $\mathrm{rng}(B_2) = (\mathrm{rng}(B_1))^{\perp}$. 则 $A = A_1 + A_2$ 和 $B = B_1 + B_2$ 可逆且满足对任意的 $T \in \mathcal{M}$, 有 $\Phi(T) = ATB$.

在 §4.4 我们将看到, 矩阵代数的任一子代数上保单位完全秩不增的线性映射事实上是代数同态.

§2.3 保秩可加映射

本节讨论保秩可加映射. 它比线性的情形要复杂得多.

设 $\mathbb{F}$ 为实或复数域, X 和 Y 为 $\mathbb{F}$ 上的 Banach 空间并记 $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}\backslash\{0\}$. 对于任意给定的 $x \in X$ 和 $f \in X^*$, 其诱导的极小右和左理想分别记为 $L_x = \{x \otimes g \mid g \in X^*\}$ 和 $R_f = \{y \otimes f \mid y \in X\}$. 令 $\mathcal{F}(X,Y)$ 表示所有有限秩算子的集合, 且 $\Phi: \mathcal{F}(X,Y) \to \mathcal{F}(X,Y)$ 为可加映射. 如果 T 的秩为 1 蕴涵 $\Phi(T)$ 的秩也为 1, 则称 Φ 是保秩一性的; 如果 T 的秩为 1 蕴涵 $\Phi(T)$ 的秩不大于 1, 则称 Φ 是秩

一不增的. 记 rank(T) 为 T 的秩, 显然, rank$(y_1\otimes g_1+y_2\otimes g_2)\leq 1$ 当且仅当 y_1 和 y_2 或 g_1 和 g_2 线性相关.

定义 2.3.1 如果 $\Phi(\mathbb{F}T)\subseteq\mathbb{F}\Phi(T)$ 对每个有限秩算子 $T\in\mathcal{F}(X,Y)$ (或, 对每个一秩算子 T) 都成立, 则称 Φ 保有限秩算子的线性张 (或, 保一秩算子的线性张).

设 Φ 保有限秩算子的线性张 (或, 保一秩算子的线性张). 令 $T\in\mathcal{F}(X,Y)$(或 T 为一秩算子). 如果 $\lambda\in\mathbb{F}_0$ 使得 $\Phi(\lambda T)=0$, 那么 $\Phi(T)=\Phi(\lambda^{-1}(\lambda T))\in\mathbb{F}\Phi(\lambda T)=\{0\}$. 因此, 可加映射 Φ 保持有限秩算子或一秩算子 T 的线性张当且仅当存在单射可加函数 $\tau_T:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 使得 $\Phi(\lambda T)=\tau_T(\lambda)\Phi(T)$.

定义 2.3.2 设 V_1,V_2 为数域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间, $\tau:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 为非零环同态 (即, τ 可加且可乘). 如果可加映射 $A:V_1\to V_2$ 满足 $A(\lambda x)=\tau(\lambda)Ax$ 对所有的 $\lambda\in\mathbb{F}$ 和 $x\in V_1$ 都成立, 则称 A 是 τ-拟线性的.

为简便起见, 以下假定 $X=Y$. 如不作特别说明, 则总假设 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(X)$ 是秩一不增的可加映射.

引理 2.3.1 令 V_1,V_2 为 $\mathbb{F}$ 上的向量空间, $\tau:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 为非零环同态. 设 $A,B:V_1\to V_2$ 是两个 τ- 拟线性算子且 dim span(rng(A))≥ 2. 如果 $\ker A\subseteq\ker B$, 且如果对所有向量 $x\in V_1$ 都有 Ax 与 Bx 线性相关 (即 A 与 B 局部线性相关), 则存在 $\lambda\in\mathbb{F}$ 使得 $B=\lambda A$.

证明 类似于引理 2.1.3 的证明可证, 故从略. 证毕.

引理 2.3.2 对每个 $x\in X$, 要么存在 $y\in X$ 使得 $\Phi(L_x)\subseteq L_y$, 要么存在 $f\in X^*$ 使得 $\Phi(L_x)\subseteq R_f$.

证明 显然, $\Phi(L_x)$ 是 $\mathcal{F}(X)$ 中由秩不大于 1 的某些算子构成的加法子群. 如果引理的结论不成立, 则存在算子 $y\otimes g, z\otimes f\in\Phi(L_x)$, 使得 y 和 z, g 和 f 都线性无关. 于是 $\Phi(L_x)$ 中包含一个秩为 2 的算子 $y\otimes z+z\otimes f$, 与 Φ 的秩一不增性矛盾. 证毕.

引理 2.3.3 下列叙述至少有一个成立:

(1) 对任意 $x\in X$, 存在 $y\in X$ 使得 $\Phi(L_x)\subseteq L_y$;

(2) 对任意 $x\in X$, 存在 $f\in X^*$ 使得 $\Phi(L_x)\subseteq R_f$.

类似地，下列叙述至少有一个成立：

(1′) 对任意 $f\in X^*$, 存在 $g\in X^*$ 使得 $\Phi(R_f)\subseteq R_g$;

(2′) 对任意 $f\in X^*$, 存在 $y\in X$ 使得 $\Phi(R_f)\subseteq L_y$.

证明 如果 $\text{span}\Phi(L_x)$ 的维数小于或等于 1 且 $0\neq y\otimes g\in\Phi(L_x)$, 那么显然有 $\Phi(L_x)\subseteq\mathbb{F}y\otimes g$, 此时，根据需要，我们既可取 $\Phi(L_x)\subseteq L_y$, 又可取 $\Phi(L_x)\subseteq R_g$.

下面假设存在 $x_0,x_1,y_0\in X$ 以及 $g_1\in X^*$ 使得 $\Phi(L_{x_0})\subseteq L_{y_0}$, $\Phi(L_{x_1})\subseteq R_{g_1}$, 且 $\dim\text{span}\Phi(L_{x_0})\geq 2$, $\dim\text{span}\Phi(L_{x_1})\geq 2$. 于是，$\Phi(L_{x_0})\backslash\mathbb{F}y_0\otimes g_1\neq\emptyset$ 蕴涵存在 $h\in X^*$ 使得 $\Phi(x_0\otimes h)=y_0\otimes g$ 且 g 与 g_1 线性无关. 类似地，存在 $k\in X^*$ 使得 $\Phi(x_1\otimes k)=z\otimes g_1$ 且 y_0 与 z 线性无关. 令 $m\in X^*$ 使得 $\Phi(x_0\otimes k)=y_0\otimes m$. 由于算子 $(x_0+x_1)\otimes k$ 是一秩的，且在映射 Φ 下的像 $y_0\otimes m+z\otimes g_1$ 的秩不超过 1. 由假设， y_0 与 z 线性无关，故必有 λ 使得 $m=\lambda g_1$, 从而 $\Phi(x_0\otimes k)=y_0\otimes\lambda g_1$. 类似地，通过考虑算子 $(x_0+x_1)\otimes h$, 可导出存在 $\mu\in\mathbb{F}$ 使得 $\Phi(x_1\otimes h)=\mu y_0\otimes g_1$. 但是，由于 y_0 与 z, $g+(\lambda+\mu)g_1$ 与 g_1 是两个线性无关组，故

$$\Phi((x_0+x_1)\otimes(h+k))=y_0\otimes(g+(\lambda+\mu)g_1)+z\otimes g_1$$

的秩等于 2, 矛盾.

第二个论断类似可证. 证毕.

引理 2.3.4 设 $\text{rng}(\Phi)$ 既不含于任何 L_y, 又不含于任何 R_g. 进而，假设引理 2.3.3 (1) 成立，则对每个 $f\in X^*$, 存在 $g\in X^*$ 使得 $\Phi(R_f)\subseteq R_g$. 另一方面，假设引理 2.3.3 (2) 成立，则对每个 $f\in X^*$, 存在 $y\in X$ 使得 $\Phi(R_f)\subseteq L_y$.

证明 只考虑引理 2.3.3(1) 成立的情形，情形 (2) 的证明类似.

用反证法. 假设存在 $x\in X$, $f\in X^*$ 使得同时有 $\Phi(L_x)\subseteq L_y$, 和 $\Phi(R_f)\subseteq L_z$ 成立. 如同引理 2.3.3 的证明，可以假设 $\dim\text{span}(\Phi(L_x))\geq 2$, $\dim\text{span}(\Phi(R_f))\geq 2$. 于是，存在线性无关的线

性泛函 g', g'' 以及线性泛函 k', k'', 使得

$$\Phi(x\otimes k') = y\otimes g', \qquad \Phi(x\otimes k'') = y\otimes g''.$$

因为 Φ 的值域不包含于 L_y, 故存在 $x_1\otimes k_1$ 使得 $\Phi(x_1\otimes k_1) = y_1\otimes g_1 \neq 0$ 且 y, y_1 线性无关. 因此 $\Phi(L_{x_1})\subseteq L_{y_1}$, 从而存在 $u\in X^*$ 使 $\Phi(x_1\otimes k') = y_1\otimes u$. 注意到 $\Phi((x+x_1)\otimes k') = y\otimes g' + y_1\otimes u$ 是一秩的, 所以存在复数 λ 使得 $u = \lambda g'$.

现在考虑两种可能的情形. 首先设 $\lambda\neq 0$, 即 $\Phi(x_1\otimes k') = \lambda y_1\otimes g'\neq 0$, 此蕴涵 $y\otimes g'$ 和 $\lambda y_1\otimes g'$ 是 $\Phi(R_{k'})$ 中两个线性无关的算子. 故 $\Phi(R_{k'})\subseteq R_{g'}$, 且不存在满足 $\Phi(R_{k'})\subseteq L_z$ 的向量 $z\in X$. 于是根据引理 2.3.3(1), 我们也有 $\Phi(R_f)\subseteq R_g$ 对某个 g 成立, 矛盾.

其次, 假设 $0 = \Phi(x_1\otimes k') = \Phi(x_1\otimes k'') = \Phi(x\otimes k_1)$. 则

$$\Phi((x+x_1)\otimes(k'+k_1)) = \Phi(x\otimes k') + \Phi(x_1\otimes k_1) = y\otimes g' + y_1\otimes g_1.$$

因为上式右边的秩不大于 1, 必有 $g_1 = \beta g'$ 对某个 $\beta\in\mathbb{F}$ 成立, 而 $\Phi(x_1\otimes k_1)\neq 0$ 迫使 $\beta\neq 0$. 用 k'' 代替 k', 类似可证 g'' 与 $g_1(=\beta g')$ 线性相关, 矛盾. 证毕.

注 2.3.1 显然, $\Phi(\lambda x\otimes f)\subseteq\Phi(L_x)\cap\Phi(R_f)$. 因此, 如果 $\Phi(x\otimes f)\neq 0$, 则由引理 2.3.4 可得 $\Phi(\lambda x\otimes f)\subseteq\mathbb{F}\Phi(x\otimes f)$. 进而, 在下面引理中, 我们将证明 $\Phi(\lambda x\otimes f) = 0\Leftrightarrow\lambda = 0$, 从而 Φ 保持秩一算子的线性张.

引理 2.3.5 在引理 2.3.4 的假设条件下, 我们有, 对所有 $x\in X$, 要么 $\Phi(L_x) = 0$, 要么 $\dim\operatorname{span}(\Phi(L_x))\geq 2$. 类似地, 对所有 $f\in X^*$, 要么 $\Phi(R_f) = 0$, 要么 $\dim\operatorname{span}(\Phi(R_f))\geq 2$.

证明 只需考虑引理 2.2.3(1) 成立的情形.

显然, Φ 的值域不含于任何 L_y 及任何 R_g 的假设条件等价于存在 $x_1\otimes f_1$ 和 $x_2\otimes f_2$ 使得 $\Phi(x_i\otimes f_i) = y_i\otimes g_i$ $(i=1,2)$, 其中 y_1 与 y_2 以及 g_1 与 g_2 是两个线性无关组. 由引理 2.3.4, $\Phi(x_i\otimes f_j)\subseteq\Phi(L_{x_i})\cap\Phi(R_{f_j})\subseteq L_{y_i}\cap R_{g_j}\subseteq\mathbb{F}(y_i\otimes g_j)$, $i,j = 1,2$. 所以, 存在

$\alpha_{12},\alpha_{21}\in\mathbb{F}$ 使得 $\Phi(x_1\otimes f_2)=\alpha_{12}y_1\otimes g_2$, $\Phi(x_2\otimes f_1)=\alpha_{21}y_2\otimes g_1$. 我们有

$$\begin{aligned}&\Phi((x_1+x_2)\otimes(f_1+f_2))\\=&\,y_1\otimes g_1+y_2\otimes g_2+\alpha_{12}y_1\otimes g_2+\alpha_{21}y_2\otimes g_1\\=&\,y_1\otimes(g_1+\alpha_{12}g_2)+y_2\otimes(\alpha_{21}g_1+g_2).\end{aligned}$$

由于 Φ 是秩一不增的, 故右边算子的秩不大于 1, 因而必有 $\alpha_{12}\alpha_{21}=1$. 所以 $\Phi(x_i\otimes f_j)=\alpha_{ij}y_i\otimes g_j$ $(i,j=1,2)$ 是 4 个线性无关的算子.

现在设 $\Phi(L_x)\neq 0$, 而 $0\neq\Phi(x\otimes f)=y\otimes g\in\Phi(L_x)$. 那么, 至少有一个 $i\in\{1,2\}$, 也至少有一个 $j\in\{1,2\}$, 使得 y 与 y_i, g 与 g_j 线性无关. 分别用 $x\otimes f$ 和 $x_i\otimes f_j$ 代替 $x_1\otimes f_1$ 和 $x_2\otimes f_2$, 并重复上述论证, 可知 $\Phi(x\otimes f)=y\otimes g$ 和 $\Phi(x\otimes f_j)=\alpha y\otimes g_j$ 在 $\Phi(L_x)$ 中线性无关. 这就证明了 $\dim\operatorname{span}(\Phi(L_x))\geq 2$. 对于 $\Phi(R_f)\neq 0$ 的情形, 可类似证之.

最后证明 Φ 保秩一算子的线性张. 假设不然, 则根据引理 2.3.4 和注 2.3.1, 存在算子 $x_0\otimes f_0$ 及非单射可加函数 $\tau_{00}:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 使得 $\Phi(x_0\otimes f_0)=y_0\otimes g_0\neq 0$, $\Phi(\lambda x_0\otimes f_0)=\tau_{00}(\lambda)y_0\otimes g_0$. 如同前面的讨论, 可以设 y_0 与 y_1 以及 g_0 与 g_1 都是两个线性无关组, 从而 $\Phi(x_0\otimes f_1)=\alpha y_0\otimes g_1$, $\Phi(x_1\otimes f_0)=\dfrac{1}{\alpha}y_1\otimes g_0$. 由注 2.3.1, 存在可加 (可能不是单射) 函数 $\tau_{ij}:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 使得

$$\Phi(\lambda x_i\otimes f_j)=\tau_{ij}(\lambda)\Phi(x_i\otimes f_j)\qquad\forall\lambda\in\mathbb{F},\quad i,j=0,1.$$

任取 $\mu\in\mathbb{F}$, 则

$$\begin{aligned}&\Phi((\mu x_0+x_1)\otimes(f_0+f_1))\\=&\,y_0\otimes(\tau_{00}(\mu)g_0+\alpha\tau_{01}(\mu)g_1)+y_1\otimes\left(\frac{1}{\alpha}g_0+g_1\right).\end{aligned}$$

因为右边的秩小于或等于 1, 我们必有 $\tau_{00}(\mu)=\tau_{01}(\mu)$, 即 $\tau_{00}=\tau_{01}$. 由假设, 存在非零的 $\lambda_0\in\mathbb{F}$ 使得 $\tau_{01}(\lambda_0)=\tau_{00}(\lambda_0)=0$. 于是

$$\Phi((\lambda_0x_0+x_1)\otimes(\mu f_0+f_1))=(\tau_{00}(\mu\lambda_0)y_0+\frac{1}{\alpha}\tau_{01}(\mu)y_1)\otimes g_0+y_1\otimes g_1.$$

然而, 由于右边算子的秩不大于 1, 故对所有的 μ, 有 $\tau_{00}(\mu\lambda_0) \equiv 0$. 所以 $0 = \tau_{00}(\mathbb{F}\lambda_0) = \tau_{00}(\mathbb{F})$, 此与 $\tau_{00}(1) = 1$ 矛盾. 证毕.

下面的结果刻画了“值域不太小”的秩一不增可加映射.

定理 2.3.6 令 $\Phi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ 为秩一不增的可加映射. 设 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 既不含于任何 L_y, 又不含于任何 R_g. 则下列之一成立:

(1) 存在环同态 $\tau : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ 以及 τ- 拟线性变换 $A : X \to X$ 和 $C : X^* \to X^*$ 使得

$$\Phi(x \otimes f) = Ax \otimes Cf$$

对所有 $x \in X$ 及 $f \in X^*$ 都成立.

(2) 存在环同态 $\tau : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ 以及 τ- 拟线性变换 $A : X^* \to X$ 和 $C : X \to X^*$ 使得

$$\Phi(x \otimes f) = Af \otimes Cx$$

对所有 $x \in X$ 及 $f \in X^*$ 都成立.

证明 假设对每个 $x \in X$ 都存在 $y \in X$ 使得 $\Phi(L_x) \subseteq L_y$ ($\Phi(L_x) \subseteq R_f$ 的情形可类似地讨论, 从而可得到结论 (2)).

固定 x, 则存在可加映射 $C_x : X^* \to X^*$ 使得 $\Phi(x \otimes f) = y \otimes C_x f$. 设 $C_x \neq 0$. 由引理 2.3.5, 存在单射可加函数 $\tau_{x,f} : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ 使得

$$C_x(\lambda f) = \tau_{x,f}(\lambda) C_x f \qquad \forall \lambda \in \mathbb{F}.$$

因为 $C_x \neq 0$, 引理 2.3.5 蕴涵 $\dim \mathrm{span}(\mathrm{rng}(C_x)) \geq 2$. 于是存在 $f, g \in X^*$ 使得 $C_x f$ 和 $C_x g$ 线性无关. 由于

$$C_x(\lambda f + \lambda g) = \tau_{x,f+g}(\lambda)(C_x f + C_x g) = \tau_{x,f}(\lambda) C_x f + \tau_{x,g}(\lambda) C_x g,$$

故 $\tau_{x,f} = \tau_{x,f+g} = \tau_{x,g}$. 如果 $C_x f$ 和 $C_x g$ 非零但线性相关, 可找到 $h \in X^*$ 使得 $C_x h$ 与 $C_x f$, 也有 $C_x h$ 与 $C_x g$ 都线性无关, 从而仍得到 $\tau_{x,f} = \tau_{x,h} = \tau_{x,g}$. 所以对所有 $f \notin \ker C_x$, $\tau_{x,f}$ 都是相同的, 我们把它简记为 τ_x. 显然, 当 $f \in \ker C_x$ 时, 由引理 2.3.5,

$\Phi(x\otimes\lambda f)=0$ 对任意 $\lambda\in\mathbb{F}$ 都成立. 因此, 对这样的 f, 我们仍可定义 $\tau_{x,f}=\tau_x$. 这样一来, 对任意的 $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$, 我们都有

$$\tau_x(\lambda\mu)C_xf=C_x(\lambda\mu f)=\tau_x(\lambda)C_x(\mu f)=\tau_x(\lambda)\tau_x(\mu)C_xf,$$

从而 τ_x 是可乘的, 即, τ_x 是与 f 无关的非零环同态.

下面我们证明 τ_x 也与 x 无关. 由假设, 存在线性无关的向量 y_1, y_2, 以及向量 x_1, x_2, 使得 $0\neq\Phi(L_{x_i})\subseteq L_{y_i}$, $i=1,2$. 所以 $C_{x_1}\neq 0$, 并且存在泛函 f,g 使得 $C_{x_1}f$ 和 $C_{x_1}g$ 线性无关. 由于 $C_{x_2}\neq 0$, 如果必要, 把 f 和 g 加上一个适当的泛函 h, 进而可设 $C_{x_2}f$ 和 $C_{x_2}g$ 中至少有一个不等于 0 (如有必要, 用 $2h$ 代替 h, 仍可保证上述过程不破坏 $C_{x_1}f$ 和 $C_{x_1}g$ 的无关性). 现在, 对任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$, Φ 把秩一算子

$$T=x_1\otimes(\lambda f+\mu g)+x_2\otimes(\lambda f+\mu g) \tag{2.3.1}$$

映为算子

$$\begin{aligned}\Phi(T)=\,&y_1\otimes(\tau_{x_1}(\lambda)C_{x_1}f+\tau_{x_1}(\mu)C_{x_1}g)\\&+y_2\otimes(\tau_{x_2}(\lambda)C_{x_2}f+\tau_{x_2}(\mu)C_{x_2}g),\end{aligned}$$

其秩不大于 1, 且 y_1,y_2 线性无关. 分别取 $\lambda=0$ 和 $\mu=0$, 不难看出存在常数 $\nu,\sigma\in\mathbb{F}$ 使得 $C_{x_2}g=\sigma C_{x_1}g$, $C_{x_2}f=\nu C_{x_1}f$. 代入上式并令 $\lambda=1$, 得

$$y_1\otimes(C_{x_1}f+\tau_{x_1}(\mu)C_{x_1}g)+y_2\otimes(\nu C_{x_1}f+\sigma\tau_{x_2}(\mu)C_{x_1}g)$$

为秩小于或等于 1 的算子, 且 $\nu C_{x_1}f$ 和 $\sigma C_{x_1}g$ 中至少有一个非零. 因而, 存在 $\alpha\in\mathbb{F}$ 使得 $\alpha\nu=1$, $\tau_{x_1}(\mu)=\alpha\sigma\tau_{x_2}(\mu)$. 由于 $\tau_{x_1}(1)=1=\tau_{x_2}(1)$, 我们必有 $\nu=\sigma$. 所以 $\tau_{x_1}(\mu)\equiv\tau_{x_2}(\mu)$. 最后, 若 $x\in X$ 是满足 $0\neq\Phi(L_x)\subseteq L_y$ 的任一向量, 那么 $\{y,y_1\}$ 和 $\{y,y_2\}$ 中至少有一对是线性无关的. 对此重复上述论证, 不难得到 $\tau_x=\tau_{x_1}=\tau_{x_2}=:\tau$.

到此, 我们已证明了, 只要 $C_x \neq 0$, 同态 τ 就与 x 无关. 显然, 当 $C_x = 0$, 对任何同态 τ, C_x 都是 τ- 拟线性的, 从而 $\Phi(\lambda x \otimes f) = \tau(\lambda) y \otimes C_x f$, 即 Φ 也是 τ- 拟线性的.

下面我们证明如何把 C_x 重新定义使之成为与 x 无关的算子. 在方程 (2.3.1) 中令 $\lambda = 1, \mu = 0$, 则得秩不大于 1 的算子

$$\Phi((x_1 + x_2) \otimes f) = z \otimes C_{(x_1+x_2)} f = y_1 \otimes C_{x_1} f + y_2 \otimes C_{x_2} f.$$

记 $C = C_{(x_1+x_2)}$ 并注意到 y_1, y_2 线性无关, 不难看出 $C_{x_1} f$ 和 $C_{x_2} f$ 都与 Cf 线性相关. 进而, $\ker C = \ker C_{x_1} \cap \ker C_{x_2}$, 而引理 2.3.5 蕴涵要么 $\dim \operatorname{span}(\operatorname{rng}(C)) \geq 2$, 要么 $C = 0$. 根据引理 2.3.1, 存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ 使得 $C_{x_1} = \alpha C$, $C_{x_2} = \beta C$. 因此, C_{x_1} 与 C_{x_2} 只相差一个常数因子. 把这个常数因子吸收到张量积的第一项, 则算子 C_x 就与 x 无关, 从而有 $C_x = C$. 于是,

$$\Phi(\lambda x \otimes f) = \tau(\lambda) y \otimes Cf.$$

现在, 映射 $x \mapsto y$ 显然是可加的且满足 $\lambda x \mapsto \tau(\lambda) y$. 定义 $Ax = y$, 则定理得证. 证毕.

下例说明, 如果 Φ 的值域包含在某个 L_{y_0} 中, 则 Φ 不再有这么好的性质.

例 2.3.1 令 $\{x_i\}_{i\in\Gamma}$ 和 $\{f_j\}_{i\in\Gamma}$ 分别是数域 $\mathbb{F}$ 上 X 和 X^* 的 Hamel 基 (众所周知, 它们的基数相同). 进而, 令 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 $\mathbb{F}$ 关于有理数域 $\mathbb{Q}$ 的 Hamel 基. 那么, $\{\lambda_\alpha x_i \otimes f_j\}_{i,j,\alpha}$ 是 $\mathcal{F}(X)$ 关于 $\mathbb{Q}$ 的 Hamel 基. 如果 $\{g_{i,j,\alpha}\}_{i,j,\alpha}$ 是一族泛函, 则存在惟一的秩一不增可加映射 $\Phi : \mathcal{F}(X) \to L_{y_0}$, 其定义为 $\Phi(\lambda_\alpha x_i \otimes f_j) = y_0 \otimes g_{i,j,\alpha}$.

我们现在要说明 Φ 不必具有定理 2.3.6 中 (1) 或 (2) 的形式. 为此, 取可能最简单的例子, 即令 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 且 $\dim X = 2$. 由定理 1.2.8 知, $\mathbb{R}$ 的惟一非零同态就是 $\mathbb{R}$ 上的恒等映射. 所以, 定理 2.3.6 中的 A 和 C 是线性的. 令 $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是两个不连续的可

加双射 (其存在性参见 [1; p.14,15]). 那么映射

$$\Phi:\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_3 & \lambda_4\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\tau_1(\lambda_1) & \tau_2(\lambda_2)\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

是可加的, 秩一不增的且非连续, 从而不可能具有定理 2.3.6 中所述的两种形式之一. 然而, $\Phi(M_2(\mathbb{R}))=L_{e_1}$, 其中 $e_1=(1,0)\in X$.

如果增加保秩一算子线性张的条件, 则可以得到例子 2.3.1 中类型的秩一不增可加映射的完整刻画. 由于证明较繁且本书后面没有用到, 我们在此只列出结果, 证明可参见 [139].

定理 2.3.7 设 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to L_{y_0}$ 或 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to R_{g_0}$ 是保一秩算子线性张的可加映射. 进而, 设 $\dim\operatorname{span}(\operatorname{rng}(\Phi))\geq 2$. 则存在环同态 $\tau:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 使得 Φ 是 τ- 拟线性的, 且具有下列 4 种不同的形式之一:

(1) $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$, 其中 $A:X\to X$ 和 $C:X^*\to X^*$ 都是 τ- 拟线性的;

(2) $\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cx$, 其中 $A:X^*\to X$ 和 $C:X\to X^*$ 都是 τ- 拟线性的;

(3) $\Phi(x\otimes f)=y_0\otimes\theta(x\otimes f)$, 其中 $\theta:\mathcal{F}(X)\to X^*$ 是 τ- 拟线性的;

(4) $\Phi(x\otimes f)=\varphi(x\otimes f)\otimes g_0$, 其中 $\varphi:\mathcal{F}(X)\to X$ 是 τ- 拟线性的.

现在讨论保秩一性的可加映射. 由定理 2.3.6, 下面结果是显然的.

定理 2.3.8 令 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(X)$ 为保秩一性的可加映射. 设 $\operatorname{rng}(\Phi)$ 既不含于任何 L_y, 又不含于任何 R_g. 则下列陈述之一成立:

(1) 存在单射环同态 $\tau:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 以及单射 τ- 拟线性变换 $A:X\to X$ 和 $C:X^*\to X^*$ 使得 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$ 对所有 $x\in X$ 及 $f\in X^*$ 都成立.

(2) 存在单射环同态 $\tau:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 以及单射 τ- 拟线性变换 $A: X^*\to X$ 和 $C:X\to X^*$ 使得 $\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cx$ 对所有 $x\in X$ 及 $f\in X^*$ 都成立.

注 2.3.2 当 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 即 X 为实 Banach 空间时, X 上的 τ- 拟线性变换事实上是线性的. 从而, 在上面定理 2.3.8 中, 如果 Φ 是满射, 则算子 A 和 C 都是双射. 但是当 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 时, 要得到同样的结论, 我们必须要求 Φ 是双边保秩一性的.

定理 2.3.9 令 X 为数域 $\mathbb{F}$ 上 Banach 空间, $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(X)$ 为双边保秩一性的可加满射. 则下列陈述之一成立:

(1) 存在环自同构 $\tau:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 以及 τ- 拟线性双射 $A:X\to X$ 和 $C:X^*\to X^*$ 使得 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$ 对所有 $x\in X$ 及 $f\in X^*$ 都成立.

(2) 存在环自同构 $\tau:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 以及 τ- 拟线性双射 $A:X^*\to X$ 和 $C:X\to X^*$ 使得 $\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cx$ 对所有 $x\in X$ 及 $f\in X^*$ 都成立.

证明 只需考虑 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 的情形. 令 A,C,τ 为定理 2.3.6 中定义的映射. 由于 Φ 双边保秩一性, 故对每个 $x\in X$, $\Phi(L_x)$ 必等于某个 L_y 或 R_g. 由此可知, A 和 C 都是满射. 现在证明 τ 是满射. 假设 τ 不是满射. 对于非零的 $x\in X$ 和 $f\in X^*$, 记 $\Phi(x\otimes f)=y\otimes g$. 因为 τ 不满, 故存在复数 λ 使得 $\lambda y\otimes g$ 不是 $\Phi(\mathbb{C}x\otimes f)$ 中的元. 由此推出, 要么存在向量 $u\in X$ 使得 u 与 x 线性无关而 $\Phi(u\otimes f)=\lambda y\otimes g$, 要么存在泛函 $h\in X^*$ 使得 h 与 f 线性无关而 $\Phi(x\otimes h)=\lambda y\otimes g$. 在前一种情形, 选择与 f 线性无关的 $k\in X^*$, 则算子 $x\otimes k+u\otimes f$ 是二秩的但它在 Φ 下的像却是一秩的, 矛盾. 类似地, 后一情形也可推出矛盾. 所以 τ 是满射. 证毕.

下面给出一个保秩一性但不是双边保秩一性可加双射的例子. 因此, 定理 2.3.9 中"双边"的假设条件不能简单地去掉.

例 2.3.2 我们先证明存在不是满射的环同态 $\tau:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. 令 $S\subset\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ 的一个超越基. 取 $\lambda_0\in S$, 并令 $T=S\setminus\{\lambda_0\}$. 令

$f: S \to T$ 是一个双射. 对任意 $\mu \in \mathbb{Q}(S)$, 存在两个多变量有理系数多项式 p 和 q, 使得

$$\mu = \frac{p(\mu_1, \cdots, \mu_n)}{q(\mu_1, \cdots, \mu_n)},$$

其中 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 是 S 中相异的元. 定义

$$g(\mu) = \frac{p(f(\mu_1), \cdots, f(\mu_n))}{q(f(\mu_1), \cdots, f(\mu_n))}.$$

由于 S 是超越基, g 无歧异地在 $\mathbb{Q}(S)$ 上定义了一个取值于 $\mathbb{Q}(T)$ 的函数. 不难验证, g 是环同态.

考虑由所有 g 的环同态延拓组成的集合, 并按延拓赋予偏序. 直接应用 Zorn 引理, 知存在极大元 $\tau: \mathbb{I} \to \mathbb{C}$. 我们将用反证法证明 $\mathbb{I} = \mathbb{C}$. 如果 $\mathbb{I} \neq \mathbb{C}$, 令 $\mu_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{I}$, 显然, μ_0 在 $\mathbb{I}$ 上是代数的. 令 $P(\mu) = \mu^m + a_1\mu^{m-1} + \cdots + a_m$ 为惟一使得 $P(\mu_0) = 0$ 且系数在 $\mathbb{I}$ 中的不可约首一多项式. 取 $\mu_1 \in \mathbb{C}$ 使得

$$0 = \mu_1^m + \tau(a_1)\mu_1^{m-1} + \cdots + \tau(a_m).$$

对任意 $\mu = \sum_{i=0}^{n} b_i\mu_0^i$, 其中 $b_i \in \mathbb{I}$, 定义

$$k(\mu) = \sum_{i=0}^{n} \tau(b_i)\mu_1^i.$$

不难看出, k 是 $\mathbb{I}$ 和 μ_0 生成的域上的环同态, 这与 τ 的极大性矛盾. 因此, $\mathbb{I} = \mathbb{C}$.

现在证明 τ 不是满射. 为此, 假定存在复数 ν 使得 $\tau(\nu) = \lambda_0$. 由于 ν 在 $\mathbb{Q}(S)$ 上是代数的, 故复数 λ_0 必在 $\tau(\mathbb{Q}(S)) \subset \mathbb{Q}(T)$ 上是代数的, 而此与 λ_0 的选取相矛盾.

令 $\tau: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是任意不满的环同态. 把 $\mathbb{C}$ 看作域 $\mathrm{rng}(\tau)$ 上的向量空间, 而令 $\{\lambda_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 为 $\mathbb{C}$ 的一个 Hamel 基. $\mathbb{C}$ 可以被描述为直接和 $\mathbb{C} = \bigoplus_{\alpha \in J} \lambda_\alpha \mathrm{rng}(\tau)$. 选取复 Banach 空间 X

及指标集 K 使得 X 关于 $\mathbb{C}$ 有两个形如 $\{x_{\beta,\alpha} \mid \alpha \in J, \beta \in K\}$ 和 $\{y_\beta \mid \beta \in K\}$ 的 Hamel 基. 再取 X^* 关于 $\mathbb{C}$ 的一个 Hamel 基 $\{f_\gamma \mid \gamma \in M\}$. 定义映射 $C: X^* \to X^*$ 如下:

$$C\left(\sum_{\gamma\in M} \mu_\gamma f_\gamma\right) = \sum_{\gamma\in M} \tau(\mu_\gamma) f_\gamma.$$

注意, 上面和式中只有有限多项可能不为零. 显然, C 是单射可加的, 并满足, 对所有的 $\mu \in \mathbb{C}$ 和 $f \in X^*$, $C(\mu f) = \tau(\mu) Cf$. 而每个 $f \in X^*$ 都可表为 $f = \sum\limits_{\gamma\in M} \mu_\gamma f_\gamma$, $\mu_\gamma \in \mathbb{C}$, 且每个 $f \in \mathrm{rng}(C)$ 都可写成 $f = \sum\limits_{\gamma\in M} \nu_\gamma f_\gamma$, $\nu_\gamma \in \mathrm{rng}(\tau)$. 这两个和式中都只有有限项不为零. 所以 X 的共轭空间可以表示为 $X^* = \bigoplus_{\alpha\in J} \lambda_\alpha \mathrm{rng}(C)$.

因集合 $\{x_{\beta,\alpha} \mid \alpha \in J, \beta \in K\}$ 是 X 关于 $\mathbb{C}$ 的 Hamel 基, 故每个算子 $F \in \mathcal{F}(X)$ 可惟一地表示为

$$F = \sum_{\alpha\in J,\beta\in K} x_{\beta,\alpha} \otimes f_{\beta,\alpha}.$$

定义 $\Phi: \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ 如下:

$$\begin{aligned}&\Phi\left(\sum_{\alpha\in J,\beta\in K} x_{\beta,\alpha} \otimes f_{\beta,\alpha}\right)\\ &= \sum_{\alpha\in J,\beta\in K} \lambda_\alpha y_\beta \otimes C f_{\beta,\alpha} = \sum_{\alpha\in J,\beta\in K} y_\beta \otimes \lambda_\alpha C f_{\beta,\alpha}.\end{aligned}$$

显然, Φ 是可加映射. 注意到 $\{y_\beta \mid \beta \in K\}$ 是 X 的 Hamel 基, 由 $X^* = \bigoplus_{\alpha\in J} \lambda_\alpha \mathrm{rng}(C)$ 易知 Φ 是满射. 假设 $F = \sum\limits_{\alpha\in J,\beta\in K} x_{\beta,\alpha} \otimes f_{\beta,\alpha}$ 是一秩的, 则存在 $f \in X^*$ 使得对每个 $\alpha \in J, \beta \in K$ 都有 $f_{\beta,\alpha} \in \mathbb{C}f$. 利用 $C(\mu f) = \tau(\mu) Cf$, 可知 $\Phi(F)$ 是秩一算子, 即 Φ 保算子的秩一性. 但是, 如果取 $\alpha, \delta \in J, \alpha \neq \delta$, 取 $f, g \in X^*$ 线性无关, 再

取 $\beta\in K$, 则算子 $x_{\beta,\alpha}\otimes f+x_{\beta,\delta}\otimes g$ 具有秩 2, 然而它在 Φ 下的像具有秩 1. 所以, Φ 并不双边地保算子的秩一性.

对于有限维情形我们有

推论 2.3.10 令 $M_n(\mathbb{C})$ 是 $n\times n$ 复矩阵代数. 设 Φ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 上保秩一性的可加满射, 那么存在 $\mathbb{C}$ 的环自同构 τ 以及可逆矩阵 A,B 使得 Φ 具有形式 $\Phi((\lambda_{ij})_{n\times n})=A(\tau(\lambda_{ij}))_{n\times n}B$ 或形式 $\Phi((\lambda_{ij})_{n\times n})=A(\tau(\lambda_{ij}))_{n\times n}^{tr}B$.

§2.4 保秩一幂等性的可加映射

本节叙述保秩一幂等元及它们的线性张的可加满射. 定义在复 Banach 空间 X 上的映射 T 称为是共轭线性的, 如果 T 可加且对所有 $x\in X$ 和 $\lambda\in\mathbb{C}$, 有 $T(\lambda x)=\bar{\lambda}Tx$. 这样的映射可以看作是实空间上的实线性映射, 因而闭图像定理仍然适用. 对于 $x\in X$ 及 $f\in X^*$, 我们用 $f(x)$ 或 $\langle x,f\rangle$ 表示 f 在 x 处的值. 如果 $T:X\to X$ 是共轭线性的, 我们可用关系式 $(T^*f)(x)=\overline{f(Tx)}$ 来定义 T 的共轭 $T^*:X^*\to X^*$. 显然, T 是连续的当且仅当 T^* 处处有定义且是连续的.

引理 2.4.1 设 X 是 Banach 空间, $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(X)$ 是保秩一幂等性的可加满射. 如果对每个秩一幂等元 $P\in\mathcal{F}(X)$, 都有 $\Phi(\mathbb{F}P)\subseteq\mathbb{F}\Phi(P)$ 成立, 则 Φ 保秩一性和秩一幂零性.

证明 我们先证明 Φ 是秩一不增的. 如果 T 与某个秩一幂等元线性相关, 则由引理的假设条件, $\Phi(T)$ 的秩小于或等于 1. 因而可假设 $T=x\otimes f$ 是幂零的. 由 Hahn-Banach 定理, 存在泛函 $f_1\in X^*$ 使得 $f_1(x)=1$. 令 $f_2=f_1-f$. 显然, $P_i=x\otimes f_i$ $(i=1,2)$ 为秩一幂等元, 且

$$T=P_1-P_2=x_1\otimes f_1-x_2\otimes f_2.$$

因 $\Phi(P_i)=y_i\otimes g_i$ $(i=1,2)$ 是幂等元, 故 $g_i(y_i)=1$. 注意到

$P=\frac{1}{2}(P_1+P_2)$ 是秩一幂等元且 Φ 是可加的，我们有

$$\Phi(P)=\frac{1}{2}(y_1\otimes g_1)+(y_2\otimes g_2)$$

也是秩一幂等算子. 所以，要么 y_1,y_2 线性相关，要么 g_1,g_2 线性相关. 如果 y_1,y_2 线性相关，不失一般性，可设 $y_1=y_2=y$. 于是 $\Phi(T)=y\otimes g_1-y\otimes g_2$ 是秩不超过 1 的幂零算子. g_1 与 g_2 线性相关的情形类似可处理.

因为 Φ 是满射，因此定理 2.3.6 的条件被满足. 设 Φ 具有定理 2.3.6 中的形式 (1), 即 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$. 如果对某个非零向量 $x_0\in X$ 有 $Ax_0=0$, 取 $f_0\in X^*$ 使得 $f_0(x_0)=1$, 则 $P=x_0\otimes f_0$ 是秩一幂等元而 $\Phi(P)=0$, 矛盾. 同理可证 C 是单射. 所以 Φ 是保秩一性的. 证毕.

定理 2.4.2 设 X 是维数大于 2 的实 Banach 空间或是无限维的复 Banach 空间. 设 $\Phi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(X)$ 是保秩一幂等性的可加满射，且满足对每个秩一幂等元 $P\in\mathcal{F}(X)$ 都有 $\Phi(\mathbb{F}P)\subseteq\mathbb{F}\Phi(P)$ 成立. 则，在实的情形， Φ 具有下列两种形式之一：

(1) 存在连续线性双射 $A:X\to X$ 使得对每个 $T\in\mathcal{F}(X)$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$;

(2) 存在连续线性双射 $A:X^*\to X$ 使得对每个 $T\in\mathcal{F}(X)$, 有 $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$;

在复的情形， Φ 除可能具有上述两种形式之一外，还可能具有下面两种形式之一：

(3) 存在连续共轭线性双射 $A:X\to X$ 使得对每个一秩算子 $x\otimes f$ 都有 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes(A^{-1})^*f$ 成立;

(4) 存在连续共轭线性双射 $A:X^*\to X$ 使得对每个一秩算子 $x\otimes f$ 都有 $\Phi(x\otimes f)=Af\otimes(A^{-1})^*\kappa x$ 成立，其中 $\kappa:X\to X^{**}$ 是自然嵌入.

在证明定理之前我们举例说明，定理中的条件" $\Phi(\mathbb{F}P)\subseteq\mathbb{F}\Phi(P)$ 对所有秩一幂等算子都成立”不能去掉.

例 2.4.1 存在双边保秩一幂等性但不连续的可加双射 Φ : $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$.

证明 首先证明存在可加映射 $\tau:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使其满足条件 $\tau(1)=1$, $\tau(\tau(t))=t$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$. 把 $\mathbb{R}$ 看作有理数域上的向量空间, 应用 Zorn 引理可找到 $\mathbb{R}$ 的一个基 $B=\{1\}\cup\{d_\alpha \mid \alpha\in J\}\cup\{e_\alpha \mid \alpha\in J\}$, 其中三个集合两两不交. 对每个 $t\in\mathbb{R}$, t 可惟一地表示为 $t=p+\sum\limits_{\alpha\in J} q_\alpha d_\alpha+\sum\limits_{\alpha\in J} r_\alpha e_\alpha$, 其中 p,q_α,r_α 都是有理数. 定义 $\tau(t)=p+\sum\limits_{\alpha\in J} r_\alpha d_\alpha+\sum\limits_{\alpha\in J} q_\alpha e_\alpha$. 显然 $\tau(1)=1$ 且 $\tau(\tau(t))=t$. 如果 τ 连续, 作为 $\mathbb{R}$ 上的连续可加映射, τ 必有形式 $\tau(t)=ct$, 其中 c 是固定的常数, 而 $\tau(1)=1$ 则迫使 $c=1$. 于是对每个 $\alpha\in J$ 都有 $e_\alpha=d_\alpha$, 这是不可能的. 所以 τ 不连续.

选定上述 τ, 定义 $\Phi: M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ $(n>1)$ 为 $\Phi(T)=T+(\tau(\mathrm{tr}(T))-\mathrm{tr}(T))I$. 显然 Φ 可加并不连续. 如果 $\Phi(T)=0$, 则有 $T=cI$, 而此蕴涵 $n\tau(c)=(n-1)c$. 两边同时用 τ 作用, 得 $(n-1)\tau(c)=nc$. 因此 $c=0$, 故 Φ 是单射. 为证 Φ 具有满值域, 任取 $S\in M_n(\mathbb{R})$, 我们需找到 T 使得

$$S=T+(\tau(\mathrm{tr}(T))-\mathrm{tr}(T))I. \tag{2.4.1}$$

上式两端取迹, 得 $\mathrm{tr}(S)=n\tau(\mathrm{tr}(T))-(n-1)\mathrm{tr}(T)$, 从而有 $\tau(\mathrm{tr}(S))=n\mathrm{tr}(T)-(n-1)\tau(\mathrm{tr}(T))$. 所以 $\tau(\mathrm{tr}(S))-\mathrm{tr}(S)=-(2n-1)(\tau(\mathrm{tr}(T))-\mathrm{tr}(T))$. 现在易知, 矩阵

$$T=S+\frac{1}{2n-1}(\tau(\mathrm{tr}(S))-\mathrm{tr}(S))I$$

是方程 (2.4.1) 的解, 故 Φ 是双射.

如果 T 是秩一幂等矩阵, 则它的迹为 1, 由定义有 $\Phi(T)=T$. 反之亦然. 证毕.

定理2.4.2的证明 由引理 2.4.1 知 Φ 保秩一性, 从而 Φ 具有定理 2.3.8 中的形式 (1) 或 (2). 首先设 Φ 具有形式 (1). 令 A,C 和

τ 如同形式 (1) 中所述. 在实的情形立知 A 和 C 是线性双射. 下面我们往证, 在复的情形, A 和 C 要么同时是线性双射, 要么同时是共轭线性双射. 为此, 先证明关系式 $\langle Ax,g\rangle=\tau(\langle x,C^{-1}g\rangle)$ 对所有 $x\in X$ 及 $g\in \text{rng}(C)$ 都成立. 取 $f\in X^*$ 使得 $Cf=g$. 如果 $f(x)=0$, 则一秩算子 $x\otimes f$ 是幂零的. 根据引理 2.4.1, $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$ 也是幂零的. 所以, $\langle Ax,Cf\rangle=\langle Ax,g\rangle=0=\tau(\langle x,f\rangle)=\tau(\langle x,C^{-1}g\rangle)$. 如果 $\langle x,f\rangle\neq 0$, 则 $(\langle x,f\rangle)^{-1}x\otimes f$ 是秩一幂等算子. 因为 $\Phi((\langle x,f\rangle)^{-1}x\otimes f)=\tau(\langle x,f\rangle^{-1})Ax\otimes Cf$, $\tau(\langle x,f\rangle^{-1})=(\tau(\langle x,f\rangle))^{-1}$ 且 Φ 保秩一幂等性, 我们有 $\langle Ax,Cf\rangle=\tau(\langle x,f\rangle)$, 或等价地, 有 $\langle Ax,g\rangle=\tau(\langle x,C^{-1}g\rangle)$.

现在我们证明 τ 连续. 反之, 假定 τ 不连续, 则 τ 在 0 点的任何领域内都无界. 取满足 $\|f_1\|\leq 1$ 的线性泛函 $f_1\in X^*$, 并取单位向量 y_1 使得 $\langle y_1,C^{-1}f_1\rangle\neq 0$. 因为 τ 在 $\{\lambda\langle y_1,C^{-1}f_1\rangle \mid |\lambda|<2^{-1}\}$ 上无界, 故对满足 $|\lambda_1|<2^{-1}$ 的某个 λ_1, 有 $\tau(\lambda_1\langle y_1,C^{-1}f_1\rangle)>1$. 令 $x_1=\lambda_1 y_1$, 则 $\|x_1\|<2^{-1}$ 且有 $|\tau(\langle x_1,C^{-1}f_1\rangle)|>1$. 取满足 $\|f_2\|\leq 1$ 的 $f_2\in X^*$ 使得 $C^{-1}f_2\in\{x_1\}^\perp$. 显然 $C^{-1}f_1$ 和 $C^{-1}f_2$ 线性无关. 这样我们可取单位向量 $y_2\in X$ 使得 $\langle y_2,C^{-1}f_2\rangle\neq 0$, 而 $\langle y_2,C^{-1}f_1\rangle=0$. 由 τ 在集合 $\{\lambda\langle y_2,C^{-1}f_2\rangle \mid |\lambda|<2^{-2}\}$ 上的无界性, 存在 λ_2 使得 $|\tau(\lambda_2\langle y_2,C^{-1}f_2\rangle)|>2$. 令 $x_2=\lambda_2 y_2$, 则 $\|x_2\|<2^{-2}$ 且 $|\tau(\langle x_2,C^{-1}f_2\rangle)|>2$. 假定所取到的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 满足 $\|x_i\|<2^{-i}$, $\|f_i\|\leq 1$, 且当 $i\neq k$ 时, 有 $\langle x_i,C^{-1}f_k\rangle=0$, $|\tau(\langle x_i,C^{-1}f_i\rangle)|>i$ $(i,k=1,2,\cdots,n)$. 取 f_{n+1} 使得 $C^{-1}f_{n+1}\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}^\perp$ 且 $\|f_{n+1}\|\leq 1$. 那么 $C^{-1}f_{n+1}\notin \text{span}\{C^{-1}f_1,\cdots,C^{-1}f_n\}$. 选择单位向量 $y_{n+1}\in X$ 使得 $\langle y_{n+1}, C^{-1}f_{n+1}\rangle\neq 0$ 但 $\langle y_{n+1},C^{-1}f_i\rangle=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 因为 τ 在 $\{\lambda\langle y_{n+1},C^{-1}f_{n+1}\rangle \mid |\lambda|<2^{-(n+1)}\}$ 上无界, 故存在满足 $|\lambda_{n+1}|<2^{-(n+1)}$ 的 λ_{n+1} 使得 $|\tau(\langle x_{n+1},C^{-1}f_{n+1}\rangle)|>n+1$, 其中 $x_{n+1}=\lambda_{n+1}y_{n+1}$. 继续这个过程, 我们得到 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 满足下列条件:

(1) 对每个 n, $\|x_n\|<2^{-n}$ 且 $\|f_n\|\leq 1$;

(2) 当 $n \neq k$ 时，$\langle x_n, C^{-1}f_k\rangle = 0$;

(3) $|\tau(\langle x_n, C^{-1}f_n\rangle)| > n$.

注意到 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$, 因此 $Ax \in X$. 然而,

$$|\langle Ax, f_n\rangle| = |\tau(\langle x, C^{-1}f_n\rangle)| > n,$$

矛盾. 故 τ 必连续. 从而由定理 1.2.8, 我们有 $\tau(\lambda) \equiv \lambda$ 或 $\tau(\lambda) \equiv \bar{\lambda}$. 由此可知，$A$ 和 C 要么同是线性的要么同是共轭线性的. 现在由定理 2.3.8 知 A 和 C 都是双射.

因为 Φ 保持秩一幂等性和秩一幂零性，在实的情形，我们必有 $\langle Ax, Cf\rangle = \langle x, f\rangle$ 对所有的 $x \in X$ 和 $f \in X^*$ 成立. 对于复的情形，要么对所有的 $x \in X$ 和 $f \in X^*$, 有 $\langle Ax, Cf\rangle = \langle x, f\rangle$, 要么对所有的 $x \in X$ 和 $f \in X^*$, 有 $\langle Ax, Cf\rangle = \overline{\langle x, f\rangle}$. 无论哪种情形我们都有 $C = (A^{-1})^*$. 由于 A^* 总是闭算子而 C 是处处有定义的，故由闭图定理，A 和 C 都连续. 到此，定理中共轭线性的情形 (3) 已得证. 对于线性的情形，取 $x, y \in X$, $f \in X^*$, 并注意到 $(\Phi(x \otimes f))y = (Ax \otimes Cf)y = \langle y, Cf\rangle Ax = \langle A^{-1}y, f\rangle Ax = (A(x \otimes f)A^{-1})y$, 而此完成了定理中结论 (1) 的证明.

现在设 A 和 C 为定理 2.3.8 (2) 中的算子. 类似于前面情形的讨论可证 A 和 C 都是线性的或都是共轭线性的双射. 在线性情形我们有 $\langle Af, Cx\rangle = \langle x, f\rangle$, 在共轭线性的情形我们有 $\langle Af, Cx\rangle = \overline{\langle x, f\rangle}$. 于是 $A = (C^{-1})^*$, 且由闭图定理知 A 和 C 都是连续的. 因此，定理中的结论 (2) 或 (4) 成立. 证毕.

当 X 是 Hilbert 空间时，上述结论有更好的表述.

推论 2.4.3 令 H 为无限维复 Hilbert 空间，$\Phi : \mathcal{F}(H) \to \mathcal{F}(H)$ 是保秩一幂等性的可加满射. 如果对每个秩一幂等算子 P 都有 $\Phi(\mathbb{C}P) \subseteq \mathbb{C}\Phi(P)$, 则下列陈述之一成立:

(1) 存在连续线性或共轭线性双射 $A : H \to H$, 使得对所有 $T \in \mathcal{F}(H)$ 都有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$;

(2) 存在连续线性或共轭线性双射 $A : H \to H$, 使得对所有

$T \in \mathcal{F}(H)$ 都有 $\Phi(T) = AT^*A^{-1}$.

对于有限维情形我们有如下结论.

推论 2.4.4 令 $M_n(\mathbb{C})$ 是 $n \times n$ 复矩阵代数. 设 Φ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 上保秩一幂等性的可加满射，如果对每个秩一幂等矩阵 P 都有 $\Phi(\mathbb{C}R) \subseteq \mathbb{C}\Phi(P)$ 成立, 则存在 $\mathbb{C}$ 的环自同构 τ 以及可逆矩阵 A 使得 Φ 具有形式 $\Phi((\lambda_{ij})_{n\times n}) = A(\tau(\lambda_{ij}))_{n\times n}A^{-1}$ 或形式 $\Phi((\lambda_{ij})_{n\times n}) = A(\tau(\lambda_{ij}))_{n\times n}^{tr}A^{-1}$.

§2.5 保秩一幂零性的可加映射

显然，一秩算子 $T = x \otimes f \in \mathcal{F}(X)$ 是秩一幂零的当且仅当 $\langle x, f\rangle = 0$, 此时，我们也有 $T^2 = 0$. 令 $\mathcal{N}_1(X)$ 表示 $\mathcal{F}(X)$ 中所有秩一幂零元的集合. 本节讨论保秩一幂零性的可加映射，主要结果是下面的定理.

定理 2.5.1 设 X 是数域 $\mathbb{F}$ (= $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的 Banach 空间且 $\dim X \geq 3$. 令 Ω 是 $\mathcal{F}(X)$ 的子空间且包含 $\mathcal{F}(X)$ 中的所有幂零算子. 假定 $\Phi: \Omega \to \Omega$ 是双边保一秩幂零性的可加双射，则存在非零数 $c \in \mathbb{F}$ 和 $\mathbb{F}$ 的环自同构 τ 使得下列之一成立:

(i) 存在 τ- 拟线性双射 $A: X \to X$ 使得对满足 $f(x) = 0$ 的每个 $x \in X$ 和 $f \in X^*$, 有 $\Phi(x \otimes f) = cA(x \otimes f)A^{-1}$;

(ii) 存在 τ- 拟线性双射 $A: X^* \to X$ 使得对满足 $f(x) = 0$ 的每个 $x \in X$ 和 $f \in X^*$, 有 $\Phi(x \otimes f) = cA(x \otimes f)^*A^{-1}$. 在此情形下， X 一定自反.

特别地，如果 X 是无限维空间，那么 A 事实上是有界线性或共轭线性算子.

我们分 $\dim X \geq 4$ 和 $\dim X = 3$ 两种情形证明定理 2.5.1.

定理 2.5.2 当 $\dim X \geq 4$ 时，定理 2.5.1 成立.

证明 分几步证之.

第一步 对于 $x \in X$ 及 $f \in X^*$, 令 $L_x^0 = \{x \otimes h \mid h \in X^* \text{ 且 } h(x) = 0\}$, $R_f^0 = \{u \otimes f \mid u \in X \text{ 且 } f(u) = 0\}$. 则对任意的 $x \in X$,

有 $\Phi(L_x^0) = L_{y(x)}^0$, 或对任意的 $x \in X$, 有 $\Phi(L_x^0) = R_{f(x)}^0$.

注意到 L_x^0 和 R_f^0 都是由一秩幂零算子组成的 Ω 的可加子群，且在这样的子群中是极大的. 这蕴涵对任意的非零向量 $x \in X$, 要么对某个 $y \in X$, 有 $\Phi(L_x^0) \subseteq L_y^0$, 要么对某个 $g \in X$, 有 $\Phi(L_x^0) \subseteq R_g^0$. 假定对某个 $y \in X$, $\Phi(L_x^0) \subseteq L_y^0$. 如果等式不成立，那么存在真子集 $G \subset \{y\}^\perp$ 使得 $\Phi(L_x^0) = \{y \otimes g \mid g \in G\}$. 取 $g_0 \in \{y\}^\perp \backslash G$. 则存在一秩幂零算子 $x_0 \otimes f_0$ 使得 $\Phi(x_0 \otimes f_0) = y \otimes g_0$. 显然 x_0 与 x 线性无关，否则我们将有 $y \otimes g_0 \in \Phi(L_x^0)$. 对任意的 $f \in \{x\}^\perp$, $\Phi(x \otimes f + x_0 \otimes f_0) = y \otimes g + y \otimes g_0$ 是一秩幂零元，因此 $x \otimes f + x_0 \otimes f_0$ 具有一秩，故 f_0 与每个 $f \in \{x\}^\perp$ 线性相关，矛盾. 类似地，对某个 $g \in X$, $\Phi(L_x^0) \subseteq R_g^0$ 将蕴涵 $\Phi(L_x^0) = R_g^0$.

选择非零向量 $x_0 \in X$, 我们将证明 $\Phi(L_{x_0}^0) = L_y^0$ 蕴涵 $\Phi(L_x^0) = L_{y(x)}^0$ 对每个 $x \in X$ 成立且 $\Phi(L_{x_0}^0) = R_g^0$ 蕴涵 $\Phi(L_x^0) = R_{f(x)}^0$ 对每个 $x \in X$ 成立. 我们只考虑第一种情形，剩余情形可类似处理. 用反证法. 假定存在向量 $z \in X$ 使得 $\Phi(L_z^0) = R_f^0$ 对某个 $f \in X^*$ 成立. 如果 x_0 和 z 线性相关，则 $\Phi(L_{x_0}^0) = \Phi(L_z^0) = L_y^0 \cap R_f^0$ 与上段所证明的事实矛盾. 另一方面，如果 x_0 和 z 线性无关，我们可选择 $f_0 \in \{x, z\}^\perp$. 令 $\Phi(x_0 \otimes f_0) = y \otimes g$, $\Phi(z \otimes f_0) = u \otimes f$. 显然 $\langle y, f\rangle \neq 0$. 事实上，$\langle y, f\rangle = 0$ 蕴涵 $y \otimes f \in L_y^0 \cap R_f^0 = \Phi(L_{x_0}^0) \cap \Phi(L_z^0)$, 此与 Φ 的单射性矛盾. 因为 $x_0 \otimes f_0 + z \otimes f_0$ 是一秩幂零算子，故 $y \otimes g + u \otimes f$ 是一秩幂零算子. 然而 $\langle y, f\rangle \neq 0$ 和 $\langle y, g\rangle = \langle u, f\rangle = 0$ 产生 $\{y, u\}$ 和 $\{g, f\}$ 是线性无关集. 所以 $y \otimes g + u \otimes f$ 具有秩 2, 矛盾.

第二步 下列陈述之一成立：

(i) 对每个 $x \in X$ 及 $f \in X^*$, $\Phi(L_x^0) = L_{y(x)}^0$ 且 $\Phi(R_f^0) = R_{g(f)}^0$;

(ii) 对每个 $x \in X$ 及 $f \in X^*$, $\Phi(L_x^0) = R_{g(x)}^0$ 且 $\Phi(R_f^0) = L_{y(f)}^0$.

因此对每个 $x \in X$ 及 $f \in X^*$ 且 $\langle x, f\rangle = 0$, $\Phi(\mathbb{F}x \otimes f) = \mathbb{F}\Phi(x \otimes f)$.

在第一步中我们证明了要么 (a) 对每个 $x \in X$, $\Phi(L_x^0) = L_{y(x)}^0$; 要么 (b) 对每个 $x \in X$, $\Phi(L_x^0) = R_{g(x)}^0$. 以相同的方式，我们可

证明，要么 (a)′ 对每个 $f\in X^*$, $\Phi(R_f^0)=L_{y(f)}^0$; 要么 (b)′ 对每个 $f\in X^*$, $\Phi(R_f^0)=R_{g(f)}^0$.

我们必须证明 (a) 和 (a)′ ((b) 和 (b)′) 不可能同时发生. 为此，假定 (a) 和 (a)′ 同时发生，即 $\Phi(L_x^0)=L_{y(x)}^0$ 且 $\Phi(R_f^0)=L_{y(f)}^0$ 对每个 $x\in X$ 及 $f\in X^*$ 成立. 设 $x_1,x_2\in X$ 任意. 取 $f\in\{x_1,x_2\}^\perp$. 假定

$$\Phi(x_1\otimes f)=y(x_1)\otimes g_1=y(f)\otimes g_3$$

且

$$\Phi(x_2\otimes f)=y(x_2)\otimes g_2=y(f)\otimes g_4.$$

则 $y(x_1)$ 和 $y(x_2)$ 线性相关，且存在 y_0 使得 $\Phi(L_x^0)\subseteq L_{y_0}^0$ 对任意的 $x\in X$ 成立，与 Φ 的满射性矛盾. 同理可证 (b) 和 (b′) 不可能同时出现.

除此之外，对于 $x\in X$, $f\in X^*$ 且 $f(x)=0$ 和 $\lambda\in\mathbb{F}$, 我们有

$$\Phi(\lambda x\otimes f)=\Phi(x\otimes\lambda f)\in L_{y(x)}^0\cap R_{g(f)}^0=\mathbb{F}y(x)\otimes g(f)=\mathbb{F}\Phi(x\otimes f).$$

因此 $\Phi(\mathbb{F}x\otimes f)\subseteq\mathbb{F}\Phi(x\otimes f)$. 另一方面，对任意的 $\lambda\in\mathbb{F}$, $\lambda\Phi(x\otimes f)\in L_{y(x)}^0\cap R_{g(f)}^0$, 因此，存在 x_1 和 f_1 使得 $\Phi(x\otimes f_1)=\Phi(x_1\otimes f)=\lambda\Phi(x\otimes f)$. 这产生 $x\otimes f_1=x_1\otimes f$, 从而 $\lambda\Phi(x\otimes f)\in\Phi(\mathbb{F}x\otimes f)$.

第三步 假定在第二步中的 (I) 发生. 则存在环同构 $\tau:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 以及 τ- 拟线性双射 $A:X\to X$ 和 $C:X^*\to X^*$ 使得对满足 $\langle x,f\rangle=0$ 的任意 $x\in X$, $f\in X^*$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$.

对任意的 $x\in X$, 存在依赖于 x 的某个 $y\in X$ 使得 $\Phi(L_x^0)\subseteq L_y^0$. 因此对任意的 $f\in\{x\}^\perp$ 及某个 $g\in\{y\}^\perp$, $\Phi(x\otimes f)=y\otimes g$. 定义 $C_x:\{x\}^\perp\to\{y\}^\perp$ 为 $f\mapsto g$. 显然 C_x 是可加双射.

令 x 和 u 是 X 中的任意两个向量. 我们将证明 C_x 和 C_u 到子空间 $\{x,u\}^\perp$ 的限制仅相差一个常数因子. 如果 x,u 线性相关，则对某个 $\lambda\in\mathbb{F}$, $u=\lambda x$. 对任意的 $f\in\{x\}^\perp$, 我们有 $C_uf=C_{\lambda x}f=C_x(\lambda f)\in\mathbb{F}C_xf$. 这样 C_x 和 C_u 线性相关. 假定 x 和 u 线性无关. 显然对每个 $f\in\{x,u\}^\perp$ 及某些向量 y,v, 有 $\Phi(x\otimes f)=y\otimes C_xf$,

$\Phi(u\otimes f)=v\otimes C_uf$. 对每个 $f\in\{x,y\}^{\perp}$, 有 $y\otimes C_xf+v\otimes C_uf=\Phi((x+u)\otimes f)\in\mathcal{N}_1(X)$. 如果 C_x 和 C_u 到子空间 $\{x,u\}^{\perp}$ 的限制线性无关, 那么 y 和 v 线性相关. 然而, 这与第一步中证明的事实矛盾.

所以, 如果 x 和 y 线性无关, 则在张量积的第一项中吸收一个常数, 可假定可加变换 C_x 和 C_y 到子空间 $\{x,y\}^{\perp}$ 的限制一致. 定义可加变换 $C:X^*\to X^*$ 如下:

$$C(f)=\begin{cases}C_xf & \text{如果 } f\in\{x\}^{\perp};\\ C_yf & \text{如果 } f\in\{y\}^{\perp}.\end{cases}$$

设 $u\in X$ 任意. 在张量积的第一项中吸收一个常数, 可假定

$$C_u|_{\{x,u\}^{\perp}}=C_x|_{\{x,u\}^{\perp}}=C|_{\{x,u\}^{\perp}}.$$

我们将证明 C_u 等于 C 到子空间 $\{u\}^{\perp}$ 的限制. 不失一般性, 可假定 x 和 u 线性无关. 首先考虑情形 $u\notin\text{span}\{x,y\}$. 我们有 $\{x,u\}^{\perp}+\{y,u\}^{\perp}=\{u\}^{\perp}$. 因为对某个数 λ, 有

$$C_u|_{\{y,u\}^{\perp}}=\lambda C_y|_{\{y,u\}^{\perp}}=\lambda C|_{\{y,u\}^{\perp}},$$

因此只需证明 $\lambda=1$. 取非零泛函 $g\in\{u,x,y\}^{\perp}$. 则由 $C_u|_{\{x,u\}^{\perp}}=C_x|_{\{x,u\}^{\perp}}$, 我们得到 $C_ug=C_xg$. 另一方面, $C_y|_{\{x,y\}^{\perp}}=C_x|_{\{x,y\}^{\perp}}$ 蕴涵 $C_yg=C_xg$. 故 $\lambda=1$. 如果 $u\in\text{span}\{x,y\}$, 取 $w\in X$ 使得 $\dim\text{span}\{x,y,w\}=\dim\text{span}\{x,u,w\}=3$. 在张量积的第一项中吸收一个常数, 我们有 C_w 等于 C 到子空间 $\{w\}^{\perp}$ 的限制. 如上所证,

$$C_u|_{\{w,u\}^{\perp}}=C_w|_{\{w,u\}^{\perp}}=C|_{\{w,u\}^{\perp}}$$

蕴涵 $C_u=C|_{\{u\}^{\perp}}$.

现在, 在张量积的第一项中吸收一个常数, 对满足 $\langle x,f\rangle=0$ 的任意 $x\otimes f$, 我们有

$$\Phi(x\otimes f)=y\otimes Cf.$$

记 $y = Ax$, 则 $A: X \to X$ 可加且 $\Phi(x \otimes f) = Ax \otimes Cf$ 对满足 $\langle x, f\rangle = 0$ 的所有 $x \in X$, $f \in X^*$ 成立. 进而, 由于 Φ 是单射且把 $\mathcal{N}_1(X)$ 映到其自身, 故 A 和 C 是双射. 从而我们有 $\langle x, f\rangle = 0$ 当且仅当 $\langle Ax, Cf\rangle = 0$.

由第二步知, 集合 $\{C(\lambda f) \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$ 是由 Cf 张成的一维空间. 换句话说, 对任意的 $f \in X^*$, 存在可加一对一且到上的映射 $\tau_f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ 使得对任意的 $\lambda \in \mathbb{F}$, 关系式 $C(\lambda f) = \tau_f(\lambda) Cf$ 成立. 选择 $f, g \in X^*$ 使得 Cf 和 Cg 线性无关. 我们有

$$C(\lambda f) = \tau_f(\lambda) Cf,$$
$$C(\lambda g) = \tau_g(\lambda) Cg$$

且

$$C(\lambda(f+g)) = \tau_{f+g}(\lambda) C(f+g).$$

这样

$$\tau_f(\lambda) Cf - \tau_{f+g}(\lambda) Cf = \tau_{f+g}(\lambda) C(g) - \tau_g(\lambda) Cg.$$

由于 Cf 和 Cg 线性无关, 所以 $\tau_f = \tau_g$. 如果 Cf 和 Cg 线性相关, 取 $h \in X^*$ 使得 Ch 与 Cf, 也有 Cg 线性无关, 则 $\tau_f = \tau_h = \tau_g$. 因此存在映射 $\tau : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ 使得 $C(\lambda f) = \tau(\lambda) Cf$ 对每个 $f \in X^*$ 成立. 显然 τ 是环同构 (可加且可乘双射). 事实上, 对满足 $\langle x, f\rangle = 0$ 的任意 $x \in X$, $f \in X^*$ 及对任意的 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, 有

$$\begin{aligned}\tau(\lambda)\tau(\mu) Ax \otimes Cf &= \tau(\lambda) Ax \otimes C(\mu f) = Ax \otimes C(\lambda\mu f) \\ &= \tau(\lambda\mu) Ax \otimes C(f).\end{aligned}$$

因为 $\Phi(\lambda x \otimes f) = A(\lambda x) \otimes Cf = Ax \otimes C(\lambda f) = \tau(\lambda) Ax \otimes Cf$, 故我们也有 $A(\lambda x) = \tau(\lambda) Ax$ 对每个 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和 $x \in X$ 成立.

第四步 存在非零数 c 使得 $\langle Ax, Cf\rangle = \tau(\langle x, f\rangle) c$ 对所有的 $x \in X$ 和 $f \in X^*$ 成立.

取 $x \in X$ 和 $f \in X^*$ 使得 $f(x) = 1$. 显然 $c = \langle Ax, Cf\rangle \neq 0$. 取 $u \in X$, $g \in X^*$ 使得 $\langle u, g\rangle = 1$ 且 $\langle x, g\rangle = \langle u, f\rangle = 0$. 则

$(x-u)\otimes(f+g)\in\mathcal{N}_1(X)$, 从而 $\langle Ax-Au, Cf+Cg\rangle=0$. 因为 $\langle Au, Cf\rangle=\langle Ax, Cg\rangle=0$, 因此 $\langle Au, Cg\rangle=c$. 令 $w\otimes h$ 任意且 $\langle w,h\rangle=1$. 下证 $\langle Aw, Ch\rangle=c$. 取 $z\in\ker h\cap\ker f$ 使得 $z\notin\text{span}\{x,w\}$ 且取 $k\in X^*$ 满足 $\langle w,k\rangle=\langle x,k\rangle=0$ 而 $\langle z,k\rangle=1$. 正如前面所证, 我们有 $\langle Az, Ck\rangle=c$ 且 $\langle Az, Ck\rangle=\langle Aw, Ch\rangle$, 此蕴涵 $\langle Aw, Ch\rangle=c$. 故 $\langle Ax, Cf\rangle=\tau(\langle x,f\rangle)c$ 对所有的 $x\in X$ 及 $f\in X^*$ 成立.

第五步 对每个一秩幂零算子 $x\otimes f$, $\Phi(x\otimes f)=cA(x\otimes f)A^{-1}$.

对任意的一秩幂零算子 $x\otimes f$ 和 $y\in X$, 我们有

$$\begin{aligned}\Phi(x\otimes f)y&=(Ax\otimes Cf)y=\langle y, Cf\rangle Ax=\langle AA^{-1}y, Cf\rangle Ax\\&=\tau(\langle A^{-1}y,f\rangle)cAx=cA(\langle A^{-1}y,f\rangle x)\\&=cA(x\otimes f)(A^{-1}y)=cA(x\otimes f)A^{-1}y.\end{aligned}$$

第六步 如果 X 无限维, 那么对所有的 $\lambda\in\mathbb{F}$, $\tau(\lambda)=\lambda$ 或对所有的 $\lambda\in\mathbb{F}$, $\tau(\lambda)=\overline{\lambda}$. 因此 A 事实上是线性或共轭线性有界算子.

在情形 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, 因为 $\mathbb{R}$ 的惟一环自同构是恒等映射, 因此对所有的 $\lambda\in\mathbb{F}$, $\tau(\lambda)=\lambda$. 故 A 线性. 现在假定 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. 我们只需证明 τ 连续. 反之, 假定 τ 不连续, 则 τ 在 0 点的任何领域内都无界. 类似于定理 2.4.2 的证明, 我们能够找到向量列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和泛函列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得下列成立:

(1) 对每个 n, $\|x_n\|<2^{-n}$ 且 $\|f_n\|\leq 1$;

(2) 当 $n\neq k$ 时, $\langle x_n, C^{-1}f_k\rangle=0$;

(3) $|\tau(\langle x_n, C^{-1}f_n\rangle)|>n$.

注意到 $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\in X$, 我们有 $Ax\in X$. 然而也有

$$|\langle Ax, f_n\rangle|=|c\tau(\langle x, C^{-1}f_n\rangle)|>|c|n,$$

矛盾. 故 τ 必连续.

现在由第四步和闭图定理立得 A 有界, 即 A 在范数拓扑下是连续的.

对于第二步的情形 (II), 我们可类似证明. 至于 X 的自反性, 可假定 X 是无限维的. 因此 A (或 C) 是从 X^* 到 X (或从 X 到 X^*) 的可逆有界线性或共轭线性算子. 进而, $(A^{-1})^*: X^{**} \to X^*$ 可逆且到 X 的限制是 C, 即 $C=(A^{-1})^*\kappa$, 其中 κ 是从 X 到 X^{**} 的自然嵌入. 现在由 κ 的双射性知, X 自反. 证毕.

剩下只需考虑情形 $\dim X=3$. 为应用方便, 对于维数大于或等于 3 的全部有限维情形, 我们用统一的方法给出定理 2.5.1 的证明, 并用矩阵的形式来表述.

如果 $\dim X=n<\infty$, 固定 X 的基, 我们可把 X 与 $\mathbb{F}^n$ 等同, 于是 $\mathcal{F}(X)=M_n(\mathbb{F})$. 令 $\mathrm{sl}_n(\mathbb{F})$ 为 $\mathbb{F}$ 上所有迹为零的 $n\times n$ 矩阵的集合, 则 $\mathrm{sl}_n(\mathbb{F})$ 是 $M_n(\mathbb{F})$ 中包含所有一秩幂零矩阵的 (惟一) 线性子空间.

定理 2.5.3 设 $n\geq 3$ 且 $\Phi:\mathrm{sl}_n(\mathbb{F})\to\mathrm{sl}_n(\mathbb{F})$ 是可加双射. 则 Φ 双边保一秩幂零性当且仅当存在 $\mathbb{F}$ 的环自同构 τ, 非奇异矩阵 $A\in M_n(\mathbb{F})$ 和非零数 $c\in\mathbb{F}$ 使得下列之一成立:

(i) $\Phi((t_{ij}))=cA(\tau(t_{ij}))A^{-1}$ 对所有的 $(t_{ij})\in\mathrm{sl}_n(\mathbb{F})$ 成立;

(ii) $\Phi((t_{ij}))=cA(\tau(t_{ij}))^{tr}A^{-1}$ 对所有的 $(t_{ij})\in\mathrm{sl}_n(\mathbb{F})$ 成立.

证明 对任意 $x,f\in\mathbb{F}^n$, 令 $L_x^0=\{x\otimes h\mid h\in\mathbb{F}^n \text{ 且 } \langle x,h\rangle=0\}$, $R_f^0=\{u\otimes f\mid u\in\mathbb{F}^n \text{ 且 } \langle u,f\rangle=0\}$. 正如定理 2.5.2 证明中的第一步和第二步, 我们得到下列之一成立:

(i) 对每个 $x,f\in\mathbb{F}^n$, $\Phi(L_x^0)=L_{y(x)}^0$ 且 $\Phi(R_f^0)=R_{g(f)}^0$;

(ii) 对每个 $x,f\in\mathbb{F}^n$, $\Phi(L_x^0)=R_{g(x)}^0$ 且 $\Phi(R_f^0)=L_{y(f)}^0$.

故对满足$\langle x,f\rangle=0$的每个 $x,f\in\mathbb{F}^n$, 有 $\Phi(\mathbb{F}x\otimes f)=\mathbb{F}\Phi(x\otimes f)$.

令 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的标准基且把任意的 $T\in M_n(\mathbb{F})$ 看作是 $\mathbb{F}^n$ 上的算子.

第一步 存在非奇异矩阵 $A,C\in M_n(\mathbb{F})$ 使得要么

(1) $\Phi(e_i\otimes e_j)=Ae_i\otimes Ce_j$ 且 $\Phi((e_i-e_j)\otimes(e_i+e_j))=A(e_i-e_j)\otimes C(e_i+e_j)$, $i,j=1,2,\cdots,n$, $i\neq j$; 要么

(2) $\Phi(e_i\otimes e_j)=Ae_j\otimes Ce_i$ 且 $\Phi((e_i-e_j)\otimes(e_{i+}e_j))=A(e_i+e_j)\otimes C(e_i-e_j)$, $i,j=1,2,\cdots,n$, $i\neq j$.

如果 (I) 发生，我们将证明第一步中的形式 (1) 成立；如果 (II) 发生，我们将证明 (2) 成立. 下面只给出第一个情形的证明，第二种情形可类似得证.

假定情形 (I) 成立. 对任意的 e_i, 存在依赖于 e_i 的某个 $y_i \in \mathbb{F}^n$ 使得 $\Phi(L^0_{e_i}) \subseteq L^0_{y_i}$. 因此对某个 g_j, 我们有 $\Phi(e_i \otimes e_j) = y_i \otimes g_j$ 对任意的 e_j $(j \neq i)$ 成立. 对任意的 $i = 1, 2, \cdots, n$, 定义线性变换 $C_i : \{e_i\}^\perp \to \{y_i\}^\perp$ 为 $e_j \mapsto g_j$ $(j \neq i)$. 下证 C_i 和 C_j 到子空间 $\{e_i, e_j\}^\perp$ 的限制仅相差一个常数因子. 显然对于 k $(\neq i, j)$, 我们有 $\Phi(e_i \otimes e_k) = y_i \otimes C_i e_k$ 且 $\Phi(e_j \otimes e_k) = y_j \otimes C_j e_k$. 矩阵 $y_i \otimes C_i e_k + y_j \otimes C_j e_k = \Phi((e_i + e_j) \otimes e_k)$ 是一秩幂零的. 如果 C_i 和 C_j 到子空间 $\{e_i, e_j\}^\perp$ 的限制线性无关，那么 y_i 和 y_j 线性相关，这是一个矛盾.

在张量积的第一项中吸收一个常数，可假定可加变换 C_1 和 C_2 到子空间 $\{e_1, e_2\}^\perp$ 的限制一致.

如果 $n = 3$, 定义 3×3 矩阵 C 如下：对于 $k = 2, 3$, 令 $Ce_k = C_1 e_k$ 且对于 $k = 1, 3$, 令 $Ce_k = C_2 e_k$. 在张量积的第一项中吸收一个常数，可假定 $C_3 e_1 = Ce_1$ 且 $C_3 e_2 = \alpha Ce_2$. 定义 3×3 矩阵 A 为 $Ae_i = y_i$. 则 $\Phi(e_3 \otimes e_2) = \alpha Ae_3 \otimes Ce_2$, 且 $\Phi(e_i \otimes e_j) = Ae_i \otimes Ce_j$ $(i, j = 1, 2, 3,\ j \neq i)$. 我们断言 $\alpha = 1$. 因为 $\Phi((e_1 - e_2) \otimes e_3) = A(e_1 - e_2) \otimes Ce_3$ 且 $\Phi(e_3 \otimes (e_1 + e_2)) = Ae_3 \otimes C(e_1 + \alpha e_2)$, 所以由 (I) 知 $\Phi((e_1 - e_2) \otimes (e_1 + e_2)) = \xi_{12} A(e_1 - e_2) \otimes C(e_1 + \alpha e_2)$ 对某个 $\xi_{12} \in \mathbb{F}$ 成立. 类似地，存在 $\xi_{23}, \xi_{31} \in \mathbb{F}$ 使得 $\Phi((e_2 - e_3) \otimes (e_2 + e_3)) = \xi_{23} A(e_2 - e_3) \otimes C(e_2 + e_3)$, $\Phi((e_3 - e_1) \otimes (e_3 + e_1)) = \xi_{31} A(\alpha e_3 - e_1) \otimes C(e_3 + e_1)$. 令

$$\begin{aligned} N &= (e_1 - e_2) \otimes (e_1 + e_2) + (e_2 - e_3) \otimes (e_2 + e_3) \\ &\quad + (e_3 - e_1) \otimes (e_3 + e_1) \\ &= e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_3, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \Phi(N) = &\ \xi_{12} A(e_1 - e_2) \otimes C(e_1 + \alpha e_2) + \xi_{23} A(e_2 - e_3) \otimes C(e_2 + e_3) \\ &+ \xi_{31} A(\alpha e_3 - e_1) \otimes C(e_3 + e_1) \end{aligned}$$

$$= A(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 - \alpha e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_3)C^*.$$

因为 A, C 非奇异，故

$$\xi_{12}(e_1 - e_2) \otimes (e_1 + e_2) + \xi_{23}(e_2 - e_3) \otimes (e_2 + e_3) + \xi_{31}(\alpha e_3 - e_1) \otimes (e_3 + e_1) = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 - \alpha e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_3.$$

比较上式两边，有 $\alpha = \xi_{12} = \xi_{23} = \xi_{31} = 1$. 对任意 i, j 且 $i \neq j$, 存在 $\xi_{ij} \in \mathbb{F}$ 使得 $\Phi((e_i - e_j) \otimes (e_i + e_j)) = \xi_{ij} A(e_i - e_j) \otimes C(e_i + e_j)$. 如上的类似讨论，又一次我们得到 $\xi_{ij} = 1$. 完成情形 $n = 3$ 的证明.

如果 $n > 3$, 定义 $n \times n$ 矩阵 C 如下：如果 $k \neq 1$, 令 $Ce_k = C_1 e_k$; 如果 $k \neq 2$, 令 $Ce_k = C_2 e_k$. 在张量积的第一项中吸收一个常数，可假定

$$C_1|_{\{e_1, e_i\}^\perp} = C_i|_{\{e_1, e_i\}^\perp} = C|_{\{e_1, e_i\}^\perp}.$$

注意到 $\{e_1, e_i\}^\perp + \{e_2, e_i\}^\perp = \{e_i\}^\perp$ 且对某个 λ,

$$C_2|_{\{e_2, e_i\}^\perp} = \lambda C_i|_{\{e_2, e_i\}^\perp} = \lambda C|_{\{e_2, e_i\}^\perp}.$$

取非零元 $g \in \{e_i, e_1, e_2\}^\perp$, 则由 $C_1|_{\{e_1, e_i\}^\perp} = C_i|_{\{e_1, e_i\}^\perp}$, 我们有 $C_i g = C_1 g$. 另一方面， $C_1|_{\{e_1, e_2\}^\perp} = C_2|_{\{e_1, e_2\}^\perp}$ 蕴涵 $C_1 g = C_2 g$. 所以 $\lambda = 1$ 且在张量积的第一项中吸收一个常数，我们得到

$$\Phi(e_i \otimes e_j) = y_i \otimes Ce_j \qquad \forall j \neq i.$$

定义非奇异矩阵 A 为 $e_i \mapsto y_i$, 则 $\Phi(e_i \otimes e_j) = Ae_i \otimes Ce_j$ $(i \neq j)$. 容易验证 $\Phi((e_i - e_j) \otimes (e_i + e_j)) = A(e_i - e_j) \otimes C(e_i + e_j)$, $(i, j = 1, 2, \cdots, n;\ i \neq j)$.

第二步 如果情形 (1) 出现，则存在 $\mathbb{F}$ 的环自同构 τ 使得 $\Phi(\lambda x \otimes e_i) = \tau(\lambda)\Phi(x \otimes e_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 对每个 $x \in \{e_i\}^\perp$

成立，且 $\Phi(\lambda(e_i-e_j)\otimes(e_i+e_j))=\tau(\lambda)\Phi((e_i-e_j)\otimes(e_i+e_j))$ $(i,j=1,2,\cdots,n;\ i\neq j)$, 其中 $\lambda\in\mathbb{F}$ 任意.

因为对满足 $\langle x,f\rangle=0$ 的任意 $x,\ f\in\mathbb{F}^n$, 有 $\Phi(\mathbb{F}x\otimes f)=\mathbb{F}\Phi(x\otimes f)$, 因此对满足 $\langle x,f\rangle=0$ 的任意 $x,f\in\mathbb{F}^n$ 及任意 $\lambda\in\mathbb{F}$, 可记 $\Phi(\lambda x\otimes f)=\tau_{x,f}(\lambda)\Phi(x\otimes f)$. 固定 i 且令 $x,y\in\{e_i\}^\perp$ 线性无关. 假定

$$\Phi(\lambda x\otimes e_i)=\tau_{x,e_i}(\lambda)\Phi(x\otimes e_i)=\tau_{x,e_i}(\lambda)w_1\otimes Ce_i,$$

$$\Phi(\lambda y\otimes e_i)=\tau_{y,e_i}(\lambda)\Phi(y\otimes e_i)=\tau_{y,e_i}(\lambda)w_2\otimes Ce_i$$

且

$$\Phi(\lambda(x+y)\otimes e_i)=\mu(\lambda)\Phi((x+y)\otimes e_i),$$

我们有

$$(\tau_{x,e_i}(\lambda)-\mu(\lambda))w_1\otimes Ce_i=(\mu(\lambda)-\tau_{y,e_i}(\lambda))w_2\otimes Ce_i.$$

因为 w_1 和 w_2 线性无关，故 $\tau_{x,e_i}=\tau_{y,e_i}$. 如果 x,y 线性相关，选择向量 z 使得 $\{x,z\}$ 和 $\{y,z\}$ 是 $\{e_i\}^\perp$ 中的线性无关集. 如上所证，我们有 $\tau_{x,e_i}=\tau_{z,e_i}=\tau_{y,e_i}$. 因此对任意的 i 和 $x\in\{e_i\}^\perp$, 存在映射 $\tau_i:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 使得

$$\Phi(\lambda x\otimes e_i)=\tau_i(\lambda)\Phi(x\otimes e_i).$$

显然有 $\tau_i=\tau_j$. 令 $\tau=\tau_1$. 则 τ 可加且可乘，从而由 $\Phi(\mathbb{F}e_i\otimes e_j)=\mathbb{F}\Phi(e_i\otimes e_j)$ 得到 τ 是 $\mathbb{F}$ 的环自同构.

假定 $\Phi(\lambda(e_i-e_j)\otimes(e_i+e_j))=\eta_{ij}\Phi((e_i-e_j)\otimes(e_i+e_j))$, $i,j=1,2,\cdots,n,\ i\neq j$. 则由第一步知,

$$\begin{aligned}
&A(\eta_{ij}(e_i-e_j)\otimes(e_i+e_j)+\eta_{jk}(e_j-e_k)\otimes(e_j+e_k)\\
&\quad+\eta_{ki}(e_k-e_i)\otimes(e_k+e_i))C^*\\
&=\eta_{ij}\Phi((e_i-e_j)\otimes(e_i+e_j))+\eta_{jk}\Phi((e_j-e_k)\otimes(e_j+e_k))\\
&\quad+\eta_{ki}\Phi((e_k-e_i)\otimes(e_k+e_i))\\
&=\tau(\lambda)A(e_i\otimes e_j-e_j\otimes e_i+e_j\otimes e_k-e_k\otimes e_j\\
&\quad+e_k\otimes e_i-e_i\otimes e_k)C^*.
\end{aligned}$$

于是 $\eta_{ij}=\eta_{jk}=\eta_{ki}=\tau(\lambda)$.

第三步 如果第一步中的情形 (1) 成立, 则对每个矩阵 $(t_{ij})\in \mathrm{sl}_n(\mathbb{F})$, $\Phi((t_{ij}))=A((\tau(t_{ij}))B$, 其中 $B=C^*$.

注意到矩阵 $(t_{ij})\in \mathrm{sl}_n(\mathbb{F})$ 具有零迹且可表示为 $(t_{ij})=D_1+D_2+D_3$, 其中

$$D_1=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{j}t_{ii}\right)(e_j-e_{j+1})\otimes(e_j+e_{j+1})\right),$$

$$D_2=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\left(t_{j,j+1}-\sum_{i=1}^{j}t_{ii}\right)e_j\otimes e_{j+1}+\left(t_{j+1,j}+\sum_{i=1}^{j}t_{ii}\right)e_{j+1}\otimes e_j\right)$$

且

$$D_3=\sum_{1\le i,j\le n;\ |i-j|>1}t_{ij}e_i\otimes e_j.$$

由第二步知,

$$\Phi(D_1)=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{j}\tau(t_{ii})\right)(Ae_j-Ae_{j+1})\otimes(Ce_j+Ce_{j+1})\right),$$

$$\Phi(D_2)=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\left(\tau(t_{j,j+1})-\sum_{i=1}^{j}\tau(t_{ii})\right)Ae_j\otimes Ce_{j+1}+\left(\tau(t_{j+1,j})\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{i=1}^{j}\tau(t_{ii})\right)Ae_{j+1}\otimes Ce_j\right)$$

且

$$\Phi(D_3)=\sum_{1\le i,j\le n;\ |i-j|>1}\tau(t_{ij})Ae_i\otimes Ce_j.$$

因此 $\Phi((t_{ij}))=\Phi(D_1)+\Phi(D_2)+\Phi(D_3)=A(\tau(t_{ij}))B$.

第四步 对某个 $c\in\mathbb{F}$, $B=cA^{-1}$.

对于 $i\neq j$, 因为 $\Phi(e_i\otimes e_j)=Ae_i\otimes Ce_j$, $\langle Ae_i,Ce_j\rangle=\langle e_i,e_j\rangle$, 故由 $\Phi((e_i-e_j)\otimes(e_i+e_j))=(Ae_i-Ae_j)\otimes(Ce_i+Ce_j)$ 知, 对

任意的 i, j, 有 $\langle Ae_i, Ce_i\rangle = \langle Ae_j, Ce_j\rangle$. 令此常数为 c. 则对任意的 $x, y \in \mathbb{F}^n$, 我们有 $\langle Ax, Cy\rangle = c\langle x, y\rangle$. 从而 $BA = cI$, 或等价地, $B = cA^{-1}$.

如果第一步中的情形 (2) 成立, 则类似可证结论成立. 证毕.

现在, 由定理 2.5.2 及定理 2.5.3 立知定理 2.5.1 成立.

§2.6 注 记

§2.1 中诸结果由 Hou [98] 获得, 其中保秩一幂等性线性映射的刻画是 Brešar 和 Šemrl [28] 相应结果的推广. §2.2 取材于 Ge, Hadwin, Hou, Li [79]. §2.3 中关于秩一不增可加映射的内容属于 Kuzma [139], 而保秩一性可加满射的结果属于 M. Omladič 和 P. Šemrl [172]. §2.4 中的定理 2.4.2, 2.4.3 首先由 M. Omladič 和 P. Šemrl [172] 给出, 但后来发现证明有误. Kuzma [139] 在讨论秩一不增可加映射的基础上证明了引理 2.4.1, 从而弥补了原先证明中的漏洞. 引理 2.1.3 纠正了 Fong 和 Sourour [72] 中的一个错误 (Lemma 2). §2.5 来自 Bai 和 Hou [15], 而线性的情形首先由 Šemrl [187] 给出.

全空间与某算子值域 (闭包) 的商空间之维数称之为该算子的余秩 (co-rank). 保算子余秩的线性映射也有讨论, 请参见 Győry, Molnàr 和 Šemrl [83].

第三章 标准算子代数上谱函数压缩映射

本章总假定 X 和 Y 是复 Banach 空间并讨论标准算子代数上压缩或保持算子的某些谱函数的线性或可加映射以及其他相关的保持问题，共分三节.

令 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 代表下面的九个符号 $\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\eta\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 和 $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 之一. 第一节刻画标准算子代数上压缩这九个谱函数之一的线性映射. 首先利用这九个谱函数分别刻画了秩一算子. 进而讨论了标准算子代数间压缩这九个谱函数之一的线性满射. 作为这一结论的应用，我们也讨论了标准算子代数上保算子的可逆性，半可逆性，左可逆性，右可逆性，满射性或下方有界性的线性映射.

设 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 代表下面的 13 个符号 $\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\eta\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_p^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_c^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_p^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_c^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 和 $\sigma_p^{\mathcal{A}}(\cdot)\cup\sigma_c^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 中的任何一个. 第二节刻画标准算子代数上保持 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 的可加映射. 首先利用这 13 个谱函数分别刻画了秩一算子，这一结论本身也具有独立的意义. 进而证明了标准算子代数上保持这 13 个谱函数之一的可加满射是同构或反同构. 作为推论，我们证明了从 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y)$ 上的每个保点谱或保压缩谱的可加满射是同构.

用符号 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{S}_l^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{S}_r^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{Z}^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{Z}_l^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{Z}_r^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{TZ}^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{R}}$ 和 $\mathcal{TZ}_r^{\mathcal{R}}$ 分别表示代数 $\mathcal{R}$ 中所有不可逆元的集合，不左可逆元的集合，不右可逆元的集合，零因子集合，左零因子集合，右零因子集合，拓扑零因子集合，左拓扑零因子集合和右拓扑零因子集合. 我们把 $\mathcal{R}$ 中左可逆或右可逆的元称为是半可逆的. 类似地，可定义半零因子，半拓扑零因子和半理想的概念.

第三节刻画标准算子代数上保可逆性或零因子的可加映射.

首先刻画保持某个上面定义的集合不变的可加映射. 进而讨论了保可逆性, 保左 (或右, 或半) 可逆性, 保零因子, 保左 (或右, 或半) 零因子, 保拓扑零因子, 保左 (或右, 或半) 拓扑零因子, 保拟仿射性, 保极大理想, 保极大左 (或右, 或半) 理想之一的可加满射. 特别地, 我们证明了从 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y)$ 的双边保算子的单射性或双边保算子的值域稠性的可加满射是同构. 也讨论了标准算子代数上双边保零积的可加满射的结构.

§3.1 谱函数压缩的线性映射

设 $T \in \mathcal{B}(X)$, 集合 $\sigma(T)$, $\sigma_l(T)$, $\sigma_r(T)$, $\partial\sigma(T)$, $\eta\sigma(T)$, $\sigma_{ap}(T)$, $\sigma_s(T)$, $\sigma_p(T)$ 和 $\sigma_c(T)$ 分别代表算子 T 的谱, 左谱, 右谱, 谱边界, 谱的多项式凸包, 近似点谱, 满谱, 点谱和压缩谱. 这些谱集合的定义见第一章定义 1.1.5, 从而由命题 1.1.11 知, 集合 $\sigma(T)$, $\sigma_l(T)$, $\sigma_r(T)$, $\eta\sigma(T)$, $\sigma_{ap}(T)$ 和 $\sigma_s(T)$ 都包含 $\partial\sigma(T)$.

设 $\mathcal{R}$ 是 Banach 代数且 $T \in \mathcal{R}$. 如果存在非零元 $S \in \mathcal{R}$ 使得 $TS = 0$ (或 $ST = 0$), 称 T 是左 (或右) 零因子; 如果 T 既是左零因子又是右零因子, 称 T 是零因子; 如果存在满足 $\|S_n\| = 1$ 的序列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}$ 使得当 $n \to \infty$ 时, 有 $TS_n \to 0$ (或 $S_nT \to 0$), 称 T 是左 (或右) 拓扑零因子; 如果 T 既是左拓扑零因子又是右拓扑零因子, 称 T 是拓扑零因子.

作用在 X 上的标准算子代数 $\mathcal{A}$ 是包含单位算子 I 和所有有限秩线性算子的 $\mathcal{B}(X)$ 的闭子代数 (参见文献 [39]). 对于 $T \in \mathcal{A}$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(T)$, $\sigma_r^{\mathcal{A}}(T)$, $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T)$ 和 $\eta\sigma^{\mathcal{A}}(T)$ 分别表示 T 相对于 $\mathcal{A}$ 的左谱, 右谱, 谱边界和谱的多项式凸包. 令

$$\sigma_p^{\mathcal{A}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ 是 } \mathcal{A} \text{ 的左零因子}\},$$

$$\sigma_c^{\mathcal{A}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ 是 } \mathcal{A} \text{ 的右零因子}\},$$

$$\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ 是 } \mathcal{A} \text{ 的左拓扑零因子}\},$$

$$\sigma_s^{\mathcal{A}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \text{ 是 } \mathcal{A} \text{ 的右拓扑零因子}\}.$$

则对任意的 $T\in\mathcal{A}$, 有下列关系式成立:

$$\sigma_p^{\mathcal{A}}(T)\subseteq\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(T)\subseteq\sigma_l^{\mathcal{A}}(T)\subseteq\sigma^{\mathcal{A}}(T)\subseteq\eta\sigma^{\mathcal{A}}(T),$$

$$\sigma_c^{\mathcal{A}}(T)\subseteq\sigma_s^{\mathcal{A}}(T)\subseteq\sigma_r^{\mathcal{A}}(T)\subseteq\sigma^{\mathcal{A}}(T)$$

$$\text{并且}\quad \partial\sigma^{\mathcal{A}}(T)\subseteq\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(T)\cap\sigma_s^{\mathcal{A}}(T).$$

令 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 代表符号 $\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\eta\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_p^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_c^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_p^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_c^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 或 $\sigma_p^{\mathcal{A}}(\cdot)\cup\sigma_c^{\mathcal{A}}(\cdot)$. 显然, 除 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)=\eta\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 外, 对 $\mathcal{A}$ 中每个元 T, $\Delta^{\mathcal{A}}(T)$ 都是 $\sigma^{\mathcal{A}}(T)$ 的子集, 而 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 也是从 $\mathcal{A}$ 到 $2^{\mathbb{C}}$ 中的映射 (集值函数), 因此, 我们也称 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 为谱函数. 如果 $\mathcal{A}=\mathcal{B}(X)$, 我们把 $\Delta^{\mathcal{B}(X)}(\cdot)$ 简记为 $\Delta(\cdot)$. 显然对每个 $T\in\mathcal{A}$, 下列关系式成立:

$$\sigma(T)\subseteq\sigma^{\mathcal{A}}(T),\ \sigma_l(T)\subseteq\sigma_l^{\mathcal{A}}(T),\ \sigma_r(T)\subseteq\sigma_r^{\mathcal{A}}(T),$$

$$\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T)\subseteq\partial\sigma(T),\ \eta\sigma^{\mathcal{A}}(T)=\eta\sigma(T);$$

因为 $\mathcal{F}(X)\subseteq\mathcal{A}$, 因此当 Δ 取符号 σ_p, σ_c, σ_{ap} 或 σ_s 时, 有 $\Delta^{\mathcal{A}}(T)=\Delta(T)$.

设 $\mathcal{A}$ 是作用在复 Banach 空间 X 上的标准算子代数. 令 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 代表九个谱函数 $\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 和 $\eta\sigma(\cdot)$ 之一. 本节我们的目的是刻画标准算子代数上压缩这九个谱函数之一的线性映射.

定理 3.1.1 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是复 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数. 假定 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性双射. 令 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 代表九个谱函数 $\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)\cap\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 和 $\eta\sigma(\cdot)$ 之一 ($\mathcal{R}=\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$), 则下列等价:

(1) 对每个 $T\in\mathcal{A}$, $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T))\subseteq\Delta^{\mathcal{A}}(T)$.

(2) 存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$; 或者存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X^*,Y)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$. 如果 X 或 Y 不自反, 或者如果

$\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)=\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 或 $\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 且 $\mathcal{A}$ 中存在左可逆或右可逆但不可逆的元，那么后一种情形不出现.

为证明定理 3.1.1, 我们需要下面的引理.

引理 3.1.2 设 $\mathcal{A}$ 是复 Banach 空间 X 上的标准算子代数且 $x\in X$, $f\in X^*$. 令 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 代表九个谱函数 $\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 和 $\eta\sigma(\cdot)$ 之一. 对于 $T\in\mathcal{A}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, 假定 $\lambda\notin\eta\sigma(T)$. 则 $\lambda\in\Delta^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)$ 当且仅当 $\langle(\lambda-T)^{-1}x,f\rangle=1$.

证明 设 $\lambda\notin\eta\sigma(T)$ 但 $\lambda\in\Delta^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)$. 如果 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 取八个谱函数 $\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 和 $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 之一，那么 $\lambda\in\sigma^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)$; 如果 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)=\eta\sigma(\cdot)$, 我们将证明仍有 $\lambda\in\sigma^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)$.

对任意紧算子 C, 因为 $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T)\backslash\mathrm{iso}\sigma^{\mathcal{A}}(T)\subseteq\sigma^{\mathcal{A}}(T+C)$ (例如见文献 [51]), 因此 $\eta\sigma(T)\backslash\mathrm{iso}\eta\sigma(T)\subseteq\eta(\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T)\backslash\mathrm{iso}\sigma^{\mathcal{A}}(T))\subseteq\eta\sigma(T+C)$, 其中 $\mathrm{iso}\sigma^{\mathcal{A}}(T)$ 代表 $\sigma^{\mathcal{A}}(T)$ 中的孤立点. 所以 $\eta\sigma(T+C)\backslash\eta\sigma(T)$ 由 $\eta\sigma(T+C)$ 中的孤立点组成. 故 $\lambda\notin\eta\sigma(T)$ 但 $\lambda\in\eta\sigma(T+x\otimes f)$ 蕴涵 $\lambda\in\sigma^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)$, 从而 $1\in\sigma((\lambda-T)^{-1}x\otimes f)$, 即有 $\langle(\lambda-T)^{-1}x,f\rangle=1$.

反之，假定 $\langle(\lambda-T)^{-1}x,f\rangle=1$. 那么 $1\in\sigma((\lambda-T)^{-1}x\otimes f)$, 所以 $\lambda\in\sigma^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)\subseteq\eta\sigma(T+x\otimes f)$. 因为 $\lambda\notin\eta\sigma(T)$, 由上面的讨论知，

$$\begin{aligned}\lambda\in\mathrm{iso}\sigma^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)&\subseteq\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)\\&\subseteq\sigma_l^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)\cap\sigma_r^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)\\&\subseteq\sigma_l^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)\ (\text{或 }\sigma_r^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f))\\&\subseteq\sigma^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f).\end{aligned}$$

故总有 $\lambda\in\Delta^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)$. 证毕.

引理 3.1.3 设 $\mathcal{A}$ 是复 Banach 空间 X 上的标准算子代数且 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 代表九个谱函数 $\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_s^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 和 $\eta\sigma(\cdot)$ 之一. 令 $R\in\mathcal{A}$, 则下列条件

等价：

(1) $\text{rank}(R) \leq 1$.

(2) 对每个 $T \in \mathcal{A}$ 以及所有不同的复数 α 和 β, 有

$$\Delta^{\mathcal{A}}(T+\alpha R) \cap \Delta^{\mathcal{A}}(T+\beta R) \subseteq \eta\sigma(T).$$

(3) 对每个秩至多为 2 的算子 $T \in \mathcal{A}$, 条件 (2) 成立.

(4) 对每个 $T \in \mathcal{A}$, 存在包含 $\eta\sigma(T)$ 的复平面中的紧子集 K_T, 使得对所有不同的复数 α 和 β, 有

$$\Delta^{\mathcal{A}}(T+\alpha R) \cap \Delta^{\mathcal{A}}(T+\beta R) \subseteq K_T.$$

(5) 对每个秩至多为 2 的算子 $T \in \mathcal{A}$, 条件 (4) 成立.

证明 (1)⇒ (2). 假定存在秩一算子 R, 算子 $T \in \mathcal{A}$ 和满足 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 的 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ 使得 $\lambda \in \Delta^{\mathcal{A}}(T+\alpha_1 R) \cap \Delta^{\mathcal{A}}(T+\alpha_2 R)$ 但 $\lambda \notin \eta\sigma(T)$. 由引理 3.1.2 的证明知, $\lambda \in \sigma^{\mathcal{A}}(T+\alpha_1 R) \cap \sigma^{\mathcal{A}}(T+\alpha_2 R)$. 故 $\alpha_i \neq 0$ 且 $\lambda - T - \alpha_i R = (I - \alpha_i R(\lambda - T)^{-1})(\lambda - T)$ 不可逆 $(i=1,2)$, 从而 $I - \alpha_i R(\lambda - T)^{-1}$ 不可逆, 即 α_i^{-1} $(i=1,2)$ 属于秩一算子 $R(\lambda - T)^{-1}$ 的谱, 与秩一算子至多包含一个非零谱矛盾. 所以 (2) 成立.

(2)⇒ (3) ⇒ (5) 和 (2)⇒ (4) ⇒ (5) 是平凡的. 接下来我们只需证 (5)⇒ (1).

假定 R 满足条件 (5). 首先取 $T=0$, 我们将证明 $\Delta^{\mathcal{A}}(R)$ 至多包含一个非零复数. 事实上, 如果 $\Delta^{\mathcal{A}}(R)$ 包含两个不同的非零复数 λ 和 μ, 那么对所有的复数 w, 都有 $w \in \Delta^{\mathcal{A}}(\lambda^{-1}wR) \cap \Delta^{\mathcal{A}}(\mu^{-1}wR)$. 这与假定条件 $\Delta^{\mathcal{A}}(\lambda^{-1}wR) \cap \Delta^{\mathcal{A}}(\mu^{-1}wR)$ 包含在复平面的一个紧子集内矛盾. 所以存在非零复数 c 使得 $\Delta^{\mathcal{A}}(R) \subseteq \{0, c\}$. 因此 $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(R) \subseteq \{0, c\}$, 从而 $\eta\sigma(R) \subseteq \{0, c\}$, 故 $\sigma^{\mathcal{A}}(R) \subseteq \{0, c\}$.

令 $x \in X$ 和 $f \in X^*$ 非零且对 $z \in \mathbb{C} \backslash \{c^{-1}\}$, 令 $G(z) = \langle (I - zR)^{-1}x, f \rangle$. 对秩一算子 $T = x \otimes f$ 利用条件 (5), 我们将证明对每个复数 w 满足 $|w|$ 充分大, 方程 $G(z) = w$ 至多有一解. 首先, 如果 $G(z) = w$, 那么 $\langle (w - zwR)^{-1}x, f \rangle = 1$. 由引理 3.1.2,

$w \in \Delta^{\mathcal{A}}(T+zwR)$. 若 $w \notin K_T$, 则 $w \notin \eta\sigma(T)$. 现在假定存在两个不同的点 z_1 和 z_2 使得 $G(z_1)=G(z_2)=w$, 那么

$$w \in \Delta^{\mathcal{A}}(T+z_1wR) \cap \Delta^{\mathcal{A}}(T+z_2wR),$$

与假设条件矛盾. 所以 $z_1=z_2$, 即方程 $G(z)=w$ 至多有一解.

由毕卡大定理 (见文献 [155]), $\frac{1}{c}$ 和 ∞ 是函数 G 的极点或可去奇点, 所以 G 是有理函数. 令 $G(z)=P(z)/Q(z)$, 其中 P 和 Q 是多项式满足对某个非负整数 n, $Q(z)=(cz-1)^n$, $P(\frac{1}{c}) \neq 0$. 我们将证明 $\deg P \leq 1$ 且 $\deg Q \leq 1$ (其中 $\deg P$ 代表多项式 P 的阶数). 对所有充分大的 w, 比如 $|w|>r>0$, 我们证明方程

$$P(z)-wQ(z)=0 \tag{3.1.1}$$

至多有一解. 如果 $\deg(P-wQ)>1$, 那么方程 (3.1.1) 的任一解也必须满足方程

$$P'(z)-wQ'(z)=0. \tag{3.1.2}$$

因此对任意这样的 w, 相应的解 z 也满足多项式方程

$$Q(z)P'(z)-Q'(z)P(z)=0. \tag{3.1.3}$$

如果多项式 $QP'-PQ'$ 恒等于零, 那么函数 G 是常数, 完成证明. 否则, 方程 (3.1.3) 仅有有限多个解, 从而对于集合 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w|>r\}$ 中的有限多个 w, 多项式 $P-wQ$ 的次数大于 1. 所以, 对于充分大的 w, $P-wQ$ 的次数至多是 1. 因此 $\deg P \leq 1$ 且 $\deg Q \leq 1$. 故存在复数 a,b 和 c 使得

$$G(z)=az+b \quad 或 \quad \frac{az+b}{cz-1}.$$

函数 G 的形式表明 G 满足下列微分方程之一:

$$G''(z)=0 \quad 或 \quad (cz-1)G''(z)+2cG'(z)=0.$$

特别地，$G''(0)=0$ 或 $G''(0)=2cG'(0)$. 直接计算有 $G'(0)=\langle Rx,f\rangle$, $G''(0)=2\langle R^2x,f\rangle$. 因此，对每个 $x\in X$ 及 $f\in X^*$, 有 $\langle R^2x,f\rangle\equiv 0$; 或者对每个 $x\in X$ 及 $f\in X^*$, 有 $\langle (R^2-cR)x,f\rangle\equiv 0$. 于是 $R^2=0$ 或 $R^2=cR$.

下证 R 具有秩一. 用反证法，首先假定 $R^2=cR$ 且 $\operatorname{rank}(R)>1$. 令 u 和 v 是 R 值域中的两个线性无关的向量. 那么 $Ru=cu$, $Rv=cv$. 取 $f\in X^*$ 使得 $\langle u,f\rangle=0$ 且 $\langle v,f\rangle=1$. 令 $T=v\otimes f$. 由于 $\sigma^{\mathcal{A}}(R)=\{0,c\}$, 于是对所有的复数 α, $\Delta^{\mathcal{A}}(T+\alpha R)=\eta\sigma^{\mathcal{A}}(T+\alpha R)$. 设 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus K_T$, 因为 $(T+\frac{\lambda}{c}R)u=\lambda u$, $(T+\frac{\lambda-1}{c}R)v=\lambda v$, 因此

$$\lambda\in\Delta^{\mathcal{A}}\left(T+\frac{\lambda}{c}R\right)\cap\Delta^{\mathcal{A}}\left(T+\frac{(\lambda-1)}{c}R\right)\subseteq K_T,$$

矛盾. 故 $\operatorname{rank}(R)\le 1$.

其次假定 $R^2=0$ 且 $\operatorname{rank}(R)>1$. 令 u_2 和 u_4 是 R 值域中的线性无关的向量并且 u_1, $u_3\in X$ 使得 $Ru_1=u_2$, $Ru_3=u_4$. 这样 u_1, u_2, u_3, u_4 线性无关且 $W=\operatorname{span}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 是 R 的不变子空间. 因此 $R|_W$ 关于基 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 具有矩阵表示

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

令 f_2, $f_4\in X^*$ 使得 $\langle u_j,f_i\rangle=\delta_{ij}$ (克罗内克符号). 定义秩二算子 $T=u_1\otimes f_2+4u_3\otimes f_4$, 则 W 是 T 的不变子空间且 $T|_W$ 具有矩阵表示

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix}.$$

类似地，我们能够证明对每个复数 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus K_T$, 有 $\lambda\in\Delta^{\mathcal{A}}(T+\lambda^2R)\cap\Delta^{\mathcal{A}}(T+\frac{\lambda^2}{4}R)\subseteq K_T$, 矛盾. 所以 $\operatorname{rank}(R)\le 1$. 证毕.

现在我们刻画标准算子代数上压缩谱函数 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 的线性满射.

定理 3.1.4 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是复 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性满射. 令 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 代表九个谱函数 $\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)\cap\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 和 $\eta\sigma(\cdot)$ 之一, 其中 $\mathcal{R}=\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$. 如果对每个 $T\in\mathcal{A}$, $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T))\subseteq\Delta^{\mathcal{A}}(T)$, 则要么对所有有限秩算子 $C\in\mathcal{A}$, $\Phi(C)=0$; 要么 Φ 是单射. 在后一种情形下, 下列之一成立:

(1) 存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$;

(2) 存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X^*,Y)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$. 如果 X 或 Y 不自反或者如果 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)=\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 或 $\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 且 $\mathcal{A}$ 中存在左可逆但不可逆的元, 那么这种情形不出现.

证明 因为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是半单的, 特别地, 当 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)=\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 或 $\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}\cap\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 时, 不难验证定理 4.1.2 的证明对于这些情形也成立, 因此 Φ 有界且 $\Phi(I)=I$. 下证 Φ 是秩一不增的. 令 $R\in\mathcal{A}$ 且 $\mathrm{rank}(R)=1$. 由引理 3.1.3 的条件 (2) 以及 Φ 的谱函数 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 压缩性, 对每个 $T\in\mathcal{A}$ 以及满足 $\alpha\neq\beta$ 的任意复数 α 和 β, 有 $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T)+\alpha\Phi(R))\cap\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T)+\beta\Phi(R))\subseteq\eta\sigma(T)$. 因为对每个 $S,T\in\mathcal{A}$, $\eta(\Delta(S))=\eta\sigma(S)$, $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T))\subseteq\Delta^{\mathcal{A}}(T)$, 因此对任意的 $T\in\mathcal{A}$, 总有 $\eta\sigma(\Phi(T))\subseteq\eta\sigma(T)$. 由于 Φ 是满射且 $\eta\sigma(T)$ 是紧集合, 于是由引理 3.1.3 的条件 (4), 我们有 $\mathrm{rank}(\Phi(R))\leq 1$, 即 Φ 是秩一不增的. 由定理 2.1.1 知,

(i) 存在线性变换 $A:X\to Y$ 和 $C:X^*\to Y^*$ 使得对每个 $x\in X$ 及 $f\in X^*$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$ 成立; 或者

(ii) 存在线性变换 $A:X^*\to Y$ 和 $C:X\to Y^*$ 使得对每个 $x\in X$ 及 $f\in X^*$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cx$ 成立.

现在假定 Φ 具有形式 (i), 则对任意的 $T\in\mathcal{A}$, 有

$$\Phi(T+x\otimes f)=\Phi(T)+Ax\otimes Cf.$$

选择复数 λ 满足 $\lambda\notin\eta\sigma(T)$, 那么 $\lambda\notin\eta\sigma(\Phi(T))$. 如果 $\langle(\lambda-$

$\Phi(T))^{-1}Ax, Cf\rangle \neq 0$, 由引理 3.1.2 以及 Φ 的 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 压缩性知, $\langle(\lambda-\Phi(T))^{-1}Ax, Cf\rangle = 1$ 蕴涵 $\langle(\lambda-T)^{-1}x, f\rangle = 1$. 故由线性, 对于 $x \in X$, $f \in X^*$ 以及 $\lambda \notin \eta\sigma(T)$,

$$\langle(\lambda-\Phi(T))^{-1}Ax, Cf\rangle \equiv \langle(\lambda-T)^{-1}x, f\rangle$$

或者 $\langle(\lambda-\Phi(T))^{-1}Ax, Cf\rangle \equiv 0$. 令 $r = \min\{\|T\|^{-1}, \|\Phi(T)\|^{-1}\}$. 如果 $|z| < r$, 那么 $I - zT$ 在 $\mathcal{A}$ 中可逆并且 $I - z\Phi(T)$ 在 $\mathcal{B}$ 中可逆. 在上面的等式中, 用 $\frac{1}{z}$ 代替 λ, 则对所有的 $x \in X$, $f \in X^*$ 以及 $z \in \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| < r\}$, 要么

$$\langle(I - z\Phi(T))^{-1}Ax, Cf\rangle \equiv \langle(I - zT)^{-1}x, f\rangle, \tag{3.1.4}$$

要么

$$\langle(I - z\Phi(T))^{-1}Ax, Cf\rangle \equiv 0. \tag{3.1.5}$$

我们断言对每个 $T \in \mathcal{A}$, 要么对任意的 $x \in X$, $f \in X^*$ 以及 $z \in \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| < r\}$, (3.1.4) 式成立, 要么对任意的 $x \in X$, $f \in X^*$ 以及 $z \in \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| < r\}$, 有 (3.1.5) 式成立.

假定存在 $x_1 \in X$ 和 $f_1 \in X^*$ 使得 $\langle(I - z\Phi(T))^{-1}Ax_1, Cf_1\rangle \neq 0$. 令 $X_{x,f}(z) = \langle(I-zT)^{-1}x, f\rangle$, $Z_{x,f}(z) = \langle(I-z\Phi(T))^{-1}Ax, Cf\rangle$. 由上面的讨论知 $X = X_0 \cup X_1$, 其中 $X_0 = \{x \in X \mid Z_{x,f_1}(z) \equiv 0\}$, $X_1 = \{x \in X \mid Z_{x,f_1}(z) = X_{x,f_1}(z)\}$. 由于 X 的上述两个子集合都是线性空间且 $x_1 \in X_1$, 因此 $X = \{x \in X \mid Z_{x,f_1}(z) = X_{x,f_1}(z)\}$, 即对任意的 $x \in X$, 有 $Z_{x,f_1}(z) = X_{x,f_1}(z)$. 类似可证, 对任意的 $f \in X^*$, 有 $Z_{x_1,f}(z) = X_{x_1,f}(z)$. 现在对任意的 $x \in X$ 和 $f \in X^*$, 考虑 $X_{x+x_1,f+f_1}(z)$, 由线性, 我们有 $X_{x,f}(z) = Z_{x,f}(z)$. 故断言成立.

对方程 (3.1.4) 和 (3.1.5) 在 0 点取导数, 则对每个 $T \in \mathcal{A}$, 要么对所有的 $x \in X$ 及 $f \in X^*$, 有 $\langle Tx, f\rangle \equiv \langle\Phi(T)Ax, Cf\rangle$; 要么对所有的 $x \in X$ 及 $f \in X^*$, 有 $\langle\Phi(T)Ax, Cf\rangle \equiv 0$. 现在由 Φ 的线性知要么对任意的 $T \in \mathcal{A}$ 及任意的 $x \in X$ 和 $f \in X^*$, 有

$\langle Tx, f\rangle \equiv \langle \Phi(T)Ax, Cf\rangle$; 要么对任意的 $T \in \mathcal{A}$ 及任意的 $x \in X$ 和 $f \in X^*$, 有 $\langle \Phi(T)Ax, Cf\rangle \equiv 0$. 在第二种情形下, 因为 Φ 的值域包含了所有的有限秩算子, 因此 $A = 0$ 或 $C = 0$, 从而 $\Phi(x \otimes f) = Ax \otimes Cf = 0$. 故对每个有限秩算子 $F \in \mathcal{A}$, 都有 $\Phi(F) = 0$.

如果对任意的 $T \in \mathcal{A}$ 及所有的 $x \in X$ 和 $f \in X^*$, 有 $\langle Tx, f\rangle = \langle \Phi(T)Ax, Cf\rangle$, 那么对任意的 $y \in Y$, 存在 $T_y \in \mathcal{B}(X)$ 以及 $x_y \in X$ 使得 $\Phi(T_y)Ax_y = y$, 所以 $\langle y, Cf\rangle = \langle T_y x_y, f\rangle$. 于是存在线性变换 $B : Y \to X$ 使得

$$\langle By, f\rangle = \langle y, Cf\rangle, \tag{3.1.6}$$

故 $C = B^*$ 且对任意的 $x \in X, f \in X^*$, 有 $\langle Tx, f\rangle = \langle B\Phi(T)Ax, f\rangle$. 这样对所有的 $T \in \mathcal{A}$, 有 $T = B\Phi(T)A$. 显然 Φ 是单射且 B 是满射. 下证 B 是单射. 假定存在某个 $y \in Y$ 使得 $By = 0$. 对任意的非零泛函 $g \in Y^*$, 因为 Φ 是满射, 因此存在 $T_1 \in \mathcal{A}$ 使得 $\Phi(T_1) = y \otimes g$. 所以 $B\Phi(T_1) = 0$, $T_1 = 0$. 从而 $y \otimes g = \Phi(T_1) = 0$, 故 $y = 0$, 即 B 是单射. 由方程 (3.1.6) 易知 B 是闭算子, 从而由闭图定理, B 有界. 现在由 $\Phi(I) = I$ 我们有 $BA = I$ 且 $B = A^{-1}$, 因此 $\Phi(T) = ATA^{-1}$.

如果 Φ 具有上面所陈述的形式 (ii), 类似的讨论表明, 要么对每个有限秩算子 $F \in \mathcal{A}$, $\Phi(F) = 0$; 要么对任意的 $x \in X$, $f \in X^*$ 以及每个 $T \in \mathcal{A}$, $\langle Tx, f\rangle = \langle \Phi(T)Af, Cx\rangle$. 令 $y \in Y$. 因为 Φ 的值域包含了每个有限秩算子, 故存在 $f_y \in X^*$ 以及 $T_y \in \mathcal{A}$ 使得 $\Phi(T_y)Af_y = y$, 因此

$$\langle y, Cx\rangle = \langle T_y x, f_y\rangle = \langle x, T_y^* f_y\rangle.$$

于是存在线性变换 $B : Y \to X^*$ 使得

$$\langle y, Cx\rangle = \langle x, By\rangle. \tag{3.1.7}$$

方程 (3.1.7) 和闭图定理蕴涵 B 有界, 所以 $\langle x, T^*f\rangle = \langle x, B\Phi(T)Af\rangle$. 故 $B\Phi(T)A = T^*$. 正如情形 (i) 的讨论, 我们有 A 和 B 是双

射且 $B=A^{-1}$. 这样 $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$. 显然，在这种情形下 X 和 Y 自反. 因为 $\sigma_{ap}^{\mathcal{A}}(T)=\sigma_s^{\mathcal{A}}(T^*)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(T)=\sigma_r^{\mathcal{A}}(T^*)$, 因此当 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)=\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot), \sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot), \sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 或 $\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 时，如果 $\mathcal{A}$ 存在左可逆但不可逆的元，那么这种情形不出现. 证毕.

定理3.1.1的证明 由定理 3.1.4 立得. 证毕.

如果 Φ 是谱函数 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 保持的，那么由推论 4.2.3, Φ 是单射. 故有下列结论.

推论 3.1.5 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是复 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性满射. 令 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 代表九个谱函数 $\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)\cap\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 和 $\eta\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 之一，其中 $\mathcal{R}=\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$, 则下列等价.

(1) 对每个 $T\in\mathcal{A}$, $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T))=\Delta^{\mathcal{A}}(T)$.

(2) 要么存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 使得对每个 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$; 要么存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X^*,Y)$ 使得对每个 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$. 如果 X 或 Y 不自反，或者如果 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)=\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot), \sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot), \sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 或 $\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 且 $\mathcal{A}$ 存在左可逆但不可逆的元，那么后一种情形不出现.

下面的结论刻画了标准算子代数间保算子的左可逆性，右可逆性，下方有界性或者满射性的线性映射. 设 $T\in\mathcal{B}(X)$, 如果存在正数 α 使得对所有的 $x\in X$, 都有 $\|Tx\|\geq\alpha\|x\|$, 称 T 是下方有界的. 显然 T 下方有界当且仅当 T 是单射且具有闭值域.

定理 3.1.6 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是复 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数. 令 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性双射且 $\Phi(I)$ 可逆. 如果 $\mathcal{A}$ 中存在左可逆但不可逆的元，那么下列性质等价:

(1) Φ 保左可逆性.

(2) Φ 保右可逆性.

(3) Φ 保算子的满射性.

(4) Φ 保算子的下方有界性.

(5) 存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 和 $B\in\mathcal{B}(Y,X)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{B}(X)$, 有 $\Phi(T)=ATB$ 成立.

证明 显然只需证明 (1)—(4) 中的任何之一推出 (5) 即可. 假定 (1) 成立. 令 $\Psi=\Phi(I)^{-1}\Phi$, 那么 Ψ 保左可逆性且 $\Psi(I)=I$, 从而 Ψ 压缩谱函数 $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)$. 现在由定理 3.1.4 知, (5) 成立. 如果 (2), (3) 或 (4) 成立, 类似可证明 (5) 成立. 证毕.

相似于定理 3.1.6 的证明, 可证明下面的结论.

推论 3.1.7 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是复 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性双射, 则下列性质等价:

(1) Φ 保可逆性.

(2) Φ 保半可逆性且 $\Phi(I)$ 可逆.

(3) 存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 和 $B\in\mathcal{B}(Y,X)$ 使得对每个 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(T)=ATB$; 或者存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X^*,Y)$ 和 $B\in\mathcal{B}(Y,X^*)$ 使得对每个 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(T)=AT^*B$. 在后一种情形下, X 和 Y 一定自反.

§3.2 谱函数保持的可加映射

令 $\mathcal{R}$ 是复 Banach 空间 X 上的标准算子代数且 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 代表下面的 13 个谱函数 $\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\eta\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)\cap\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_p^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_c^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_p^{\mathcal{R}}(\cdot)\cap\sigma_c^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 和 $\sigma_p^{\mathcal{R}}(\cdot)\cup\sigma_c^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 之一. 设 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 和 $\Gamma^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 是两个谱函数, 如果对任意的 $T\in\mathcal{R}$, 都有 $\Delta^{\mathcal{R}}(T)\subseteq\Gamma^{\mathcal{R}}(T)$, 称 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 是 $\Gamma^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 的子谱函数. 本节的目的是刻画标准算子代数上保持这 13 个谱函数之一的可加映射. 为此, 先证明下面的引理, 它利用上述谱函数之一刻画了秩一算子.

引理 3.2.1 设 X 是复 Banach 空间. 假定 $A\in\mathcal{B}(X)$ 且 $\operatorname{rank}(A)=1$. 令 $\Delta(\cdot)$ 代表谱函数 $\sigma_p(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)\cap\sigma_c(\cdot)$ 和 $\sigma_p(\cdot)\cup\sigma_c(\cdot)$ 之一, 则对每个 $T\in\mathcal{B}(X)$ 以及满足 $c\neq 1$ 的任意复数 c, 有 $\Delta(T+A)\cap\Delta(T+cA)\subseteq\Delta(T)$.

证明 令 $A=x\otimes f$. 假定存在 $T\in\mathcal{B}(X)$ 以及 λ 和满足 $c\neq 1$ 的 $c\in\mathbb{C}$ 使得 $\lambda\in\Delta(T+A)\cap\Delta(T+cA)$ 但 $\lambda\notin\Delta(T)$.

如果 $\Delta(\cdot) = \sigma_p(\cdot)$，那么 $\ker(\lambda - T - x \otimes f) \neq \{0\}$，因此 $x \in \text{rng}(\lambda - T)$. 所以存在 $u \in X$ 使得 $(\lambda - T)u = x$. 因为算子 $(\lambda-T)(I-u\otimes f) = \lambda-T-x\otimes f$ 和 $(\lambda-T)(I-cu\otimes f) = \lambda-T-cx\otimes f$ 不是单射，同时 $\lambda - T$ 是单射，因此 $\{1, \frac{1}{c}\} \subseteq \sigma(u \otimes f)$, 矛盾.

如果 $\Delta(\cdot) = \sigma_c(\cdot)$, 则类似可证结论成立. 现在对于情形 $\Delta(\cdot) = \sigma_p(\cdot) \cap \sigma_c(\cdot)$, 引理显然成立.

假定 $\Delta(\cdot) = \sigma_p(\cdot) \cup \sigma_c(\cdot)$, 分四种情形考虑:

(i) $\lambda \in \sigma_p(T + A) \cap \sigma_p(T + cA)$;

(ii) $\lambda \in \sigma_c(T + A) \cap \sigma_c(T + cA)$;

(iii) $\lambda \in \sigma_p(T + A) \cap \sigma_c(T + cA)$;

(iv) $\lambda \in \sigma_c(T + A) \cap \sigma_p(T + cA)$.

由上面的证明知, 情形 (i) 或 (ii) 不可能发生. 假定 (iii) 成立, 那么 $\lambda \notin \sigma_c(T+A) \cup \sigma_p(T+cA)$. 不失一般性，我们可假定 $\lambda = 0$. 因为 $0 \in \sigma_p(T + A)$ 且 $0 \notin \sigma_p(T)$, 因此 $\text{rng}(A) \subseteq \text{rng}(T)$. 所以存在向量 $u \in X$ 使得 $Tu = x$. 由于 $0 \notin \sigma_p(T+cA)$ 且 $0 \notin \sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)$, 于是 $T + cA = T(I + cu \otimes f)$ 具有稠值域，与假定 $0 \in \sigma_c(T + cA)$ 矛盾.

如果情形 (iv) 发生，相似于情形 (iii) 的证明，我们也得到矛盾，所以结论成立. 证毕.

令 $\mathcal{F}_n(X)$ 代表 $\mathcal{B}(X)$ 中所有秩不超过 n 的算子. 下面的引理利用 13 种谱函数之一及 $\mathcal{F}_2(X)$ 中的算子刻画了一秩算子.

引理 3.2.2 设 $\mathcal{A}$ 是复 Banach 空间 X 上的标准算子代数. 令 $A \in \mathcal{A}$ 且 $A \neq 0$. 假定 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 代表谱函数 $\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot) \cap \sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\eta\sigma(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$, $\sigma_s(\cdot)$, $\sigma_{ap}(\cdot)$, $\sigma_{ap}(\cdot) \cap \sigma_s(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot) \cap \sigma_c(\cdot)$ 和 $\sigma_p(\cdot) \cup \sigma_c(\cdot)$ 之一，则下列条件等价:

(1) $\text{rank}(A) = 1$.

(2) 对每个满足 $\sigma^{\mathcal{A}}(T)$ 有限的 $T \in \mathcal{A}$ 以及任意的复数 $\alpha \neq 1$, $\Delta^{\mathcal{A}}(T + A) \cap \Delta^{\mathcal{A}}(T + \alpha A) \subseteq \Delta^{\mathcal{A}}(T)$.

(2′) 对每个 $T \in \mathcal{F}_2(X)$ 以及每个复数 $\alpha \neq 1$, $\Delta^{\mathcal{A}}(T + A) \cap \Delta^{\mathcal{A}}(T + \alpha A) \subseteq \Delta^{\mathcal{A}}(T)$.

(3) 对每个满足 $\sigma^{\mathcal{A}}(T)$ 有限的 $T\in\mathcal{A}$, $\Delta^{\mathcal{A}}(T+A)\cap\Delta^{\mathcal{A}}(T+2A)\subseteq\Delta^{\mathcal{A}}(T)$.

(3′) 对每个 $T\in\mathcal{F}_2(X)$, $\Delta^{\mathcal{A}}(T+A)\cap\Delta^{\mathcal{A}}(T+2A)\subseteq\Delta^{\mathcal{A}}(T)$.

证明 (2)⇒(2′) ⇒(3′) 及 (2)⇒(3)⇒ (3′) 显然.

下证 (1)⇒(2). 假定 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)=\eta\sigma(\cdot)$. 由引理 3.1.2 知, 对任意的 $T\in\mathcal{A},x\in X,f\in X^*$ 以及 $\lambda\notin\eta\sigma(T)$, 有 $\lambda\in\eta\sigma(T+x\otimes f)$ 当且仅当 $\langle(\lambda-T)^{-1}x,f\rangle=1$.

现在假定存在秩一算子 A, 算子 $T\in\mathcal{A}$ 以及满足 $\alpha\neq 1$ 的 $\alpha\in\mathbb{C}$ 使得 $\lambda\in\eta\sigma(T+A)\cap\eta\sigma(T+\alpha A)$ 但 $\lambda\notin\eta\sigma(T)$. 则由引理 3.1.2, $\lambda\in\sigma_p(T+A)\cap\sigma_p(T+\alpha A)$. 所以 $\alpha\neq 0$ 且 $\lambda-T-\alpha A=(I-\alpha A(\lambda-T)^{-1})(\lambda-T)$ 不可逆. 因此 $I-\alpha A(\lambda-T)^{-1}$ 不可逆, 从而 α^{-1} 属于秩一算子 $A(\lambda-T)^{-1}$ 的谱. 而 $\lambda\in\sigma(T+A)$ 表明 $1\in\sigma(A(\lambda-T)^{-1})$, 这与秩一算子至多包含一个非零谱点矛盾. 故在这种情形下 (2) 成立.

显然对于谱函数 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 的任一选择, 我们总有 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)\subseteq\eta\sigma(\cdot)$, 且对任一具有有限谱的算子 $T\in\mathcal{A}$, 都有 $\Delta^{\mathcal{A}}(T)=\Delta(T)=\eta\sigma(T)$. 所以对于 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 的所有选择, 都有 (2) 成立.

(3′)⇒(1). 令 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)=\partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 或 $\sigma_p(\cdot)\cap\sigma_c(\cdot)$. 假定 $\mathrm{rank}(A)>1$, 我们将证明条件 (3′) 不成立. 首先, 假定存在泛函 $f\in X^*$ 使得 $f,A^*f,(A^*)^2f$ 线性无关. 取向量 x_i $(i=0,1,2)$ 使得 $\langle x_i,(A^*)^jf\rangle=\delta_{ij}$ $(i,\,j=0,\,1,\,2)$. 令

$$T=x_0\otimes(3\|A\|f-A^*f)+x_1\otimes(3\|A\|A^*f-2(A^*)^2f)$$
$$+x_2\otimes(3\|A\|f-A^*f).$$

则 $T\in\mathcal{F}_2(X)$ 且 $(T^*+A^*)f=3\|A\|f$, $(T^*+2A^*)A^*f=3\|A\|A^*f$. 这样 $3\|A\|\in\sigma_p(T^*+A^*)\cap\sigma_p(T^*+2A^*)=\sigma_c(T+A)\cap\sigma_c(T+2A)$. 因为 $(3\|A\|-A)^{-1}T$ 和 $(3\|A\|-2A)^{-1}T$ 是秩二算子, 因此

$$3\|A\|\in\sigma_p(T+A)\cap\sigma_p(T+2A)\cap(\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+A)\cap\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+2A)).$$

然而 $3\|A\|\notin\sigma^{\mathcal{A}}(T)=\sigma_p(T)\cap\sigma_c(T)=\eta\sigma(T)$.

其次，假定对任意的 $g \in X^*$，泛函 g, A^*g, $(A^*)^2 g$ 都线性相关. 那么 A^* 是次数不大于 2 的代数算子，从而 A 也具有相同的性质. 即存在次数不大于 2 的多项式 p 使得 $p(A)=0$. 如果 p 的次数等于 1, 因为 $\operatorname{rank}(A)>1$, 因此存在 $a\neq 0$ 使得 $A=aI$. 令 $T=y\otimes g$ 满足 $\langle y,g\rangle = a$, 则 $\sigma_c(T)=\sigma_p(T)=\partial\sigma(T)=\{0,a\}$. 所以

$$\begin{aligned}&(\sigma_p(T+A)\cap\sigma_c(T+A))\cap(\sigma_p(T+2A)\cap\sigma_c(T+2A))\\ &\quad=\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+A)\cap\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+2A)\\ &\quad=\{2a\},\end{aligned}$$

但 $2a\notin\eta\sigma(T)$. 因此从现在起，我们总假定 A 不是恒等算子的倍数且 p 的次数等于 2. 故存在数 α 和 β 使得 $p(t)=(t-\alpha)(t-\beta)$.

情形1 $\alpha\neq 0$, $\beta\neq\alpha$. 若 $\beta=0$, 因为 $\operatorname{rank}(A)\geq 2$, 因此 $\dim\ker(A-\alpha I)\geq 2$; 若 $\beta\neq 0$, 则 A 可逆. 由于 X 是无限维的，因此子空间 $\ker(A-\alpha I)$ 和 $\ker(A-\beta I)$ 至少有一个的维数大于 1. 不失一般性，我们可假定 $\dim\ker(A-\alpha I)\geq 2$. 这样存在 X 的闭子空间 V_1, V_2 和 V_3 满足 $\dim V_1=1$ 使得 X 分解为 $X=V_1\dot{+}V_2\dot{+}V_3$, 且 A 相应的矩阵表示为

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha I_2 & 0\\ 0 & 0 & \beta I_3\end{pmatrix},$$

其中 I_2, I_3 分别代表子空间 V_2, V_3 上的恒等算子. 令

$$T=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 $\operatorname{rank}(T)=1$. 显然 $\Delta^{\mathcal{A}}(T+A)\cap\Delta^{\mathcal{A}}(T+2A)=\{2\alpha\}$, 但 $2\alpha\notin\eta\sigma(T)$.

情形 2 $\alpha=\beta\neq 0$. 因为 $\mathrm{rank}(A)>1$, 因此存在线性无关的泛函 $f_1,f_2\in X^*$ 使得 $A^*f_1=\alpha f_1$, $A^*f_2=f_1+\alpha f_2$. 取向量 $x_i\in X$ $(i=1,2)$ 使得 $\langle x_i,f_j\rangle=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2)$. 如果 $\alpha\neq\pm 1$, 令 $T=(x_1-x_2)\otimes f_1+(\alpha^2x_1+x_2)\otimes f_2$. 直接计算可知 $T\in\mathcal{F}_2(X)$ 且 $\sigma(T)=\{0,1\pm i\alpha\}$. 由于 $(T^*+A^*)f_2=(\alpha+1)f_2$, $(T^*+2A^*)(f_1-\alpha f_2)=(\alpha+1)(f_1-\alpha f_2)$, 所以 $\alpha+1\in\sigma_c(T+A)\cap\sigma_c(T+2A)$. 而 $(\alpha+1-A)^{-1}T$ 和 $(\alpha+1-2A)^{-1}T$ 是秩 2 算子表明

$$\alpha+1\in\sigma_p(T+A)\cap\sigma_p(T+2A)\cap(\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+A)\cap\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+2A)).$$

但 $0\neq\alpha+1\notin\eta\sigma(T)$; 如果 $\alpha=1$, 令 $T=(x_1-2x_2)\otimes f_1+(-x_1+x_2)\otimes f_2$, 则 $T\in\mathcal{F}_2(X)$ 且 $\sigma(T)=\{0,1\pm\sqrt{2}\}$. 因为 $(T^*+A^*)(f_1-f_2)=3(f_1-f_2)$, $(T^*+2A^*)f_2=3f_2$, 所以 $3\in\sigma_c(T+A)\cap\sigma_c(T+2A)$. 由于 $3-A$ 和 $3-2A$ 可逆，类似于上面的讨论，我们有

$$3\in\sigma_p(T+A)\cap\sigma_p(T+2A)\cap(\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+A)\cap\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+2A)).$$

但 $3\notin\eta\sigma(T)$; 如果 $\alpha=-1$, 令 $T=(-x_1-2x_2)\otimes f_1+(-x_1-x_2)\otimes f_2$, 则 $T\in\mathcal{F}_2(X)$ 且 $\sigma(T)=\{0,-1\pm\sqrt{2}\}$. 因为 $(T^*+A^*)(f_1+f_2)=-3(f_1+f_2)$, $(T^*+2A^*)f_2=-3f_2$, 所以 $-3\in\sigma_c(T+A)\cap\sigma_c(T+2A)$. 由于 $-3-A$ 和 $-3-2A$ 可逆，我们有

$$-3\in\sigma_p(T+A)\cap\sigma_p(T+2A)\cap(\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+A)\cap\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+2A)).$$

但 $-3\notin\eta\sigma(T)$.

情形 3 $\alpha=\beta=0$. 因为 $\mathrm{rank}(A)>1$, 因此存在泛函 f, $g\in X^*$ 使得 f, A^*f, g, A^*g 线性无关. 令 $f_1=f$, $f_2=A^*f$, $f_3=g$, $f_4=A^*g$. 取向量 $x_i\in X$ $(i=1,2,3,4)$ 使得 $\langle x_i,f_j\rangle=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2,3,4)$. 令 $T=x_2\otimes f_1+2x_4\otimes f_3$, 则 $T\in\mathcal{F}_2(X)$ 且 $T^2=0$. 因为 $(T^*+A^*)(A^*g+\sqrt{2}g)=\sqrt{2}(A^*g+\sqrt{2}g)$, $(T^*+2A^*)(\sqrt{2}A^*f+f)=\sqrt{2}(\sqrt{2}A^*f+f)$, 因此 $\sqrt{2}\in\sigma_c(T+A)\cap\sigma_c(T+2A)$. 相似于

情形 2 的讨论，有

$$\sqrt{2} \in \sigma_p(T+A) \cap \sigma_p(T+2A) \cap (\partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+A) \cap \partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+2A)).$$

然而 $\sqrt{2} \notin \eta\sigma(T)$.

到此我们完成了 $(3')\Rightarrow(1)$ 中情形 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot) = \partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 或 $\sigma_p(\cdot) \cap \sigma_c(\cdot)$ 的证明.

因为 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 的每个选择要么以 $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 作为子集合要么以 $\sigma_p(\cdot)\cap \sigma_c(\cdot)$ 作为子集合，且 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 总是 $\eta\sigma(\cdot)$ 的子集合，因此对于 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 的每一选择，$(3')\Rightarrow(1)$ 成立. 证毕.

注 3.2.1 设 $\mathcal{A}$ 是标准算子代数且 $A \in \mathcal{A}$. 如果 $\mathrm{rank}(A) = 1$, 那么对每个 $T \in \mathcal{A}$ 以及任意的复数 $c \neq 1$, 都有 $\Delta^{\mathcal{A}}(T+A) \cap \Delta^{\mathcal{A}}(T+cA) \subseteq \Delta^{\mathcal{A}}(T)$ 成立，其中 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 代表八个谱函数 $\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot) \cap \sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\eta\sigma(\cdot)$, $\sigma_{ap}(\cdot)$, $\sigma_s(\cdot)$ 和 $\sigma_{ap}(\cdot) \cap \sigma_s(\cdot)$ 之一. 然而对于本节的目的，我们只需算子 T 具有有限谱即可.

利用一秩算子和上面所提到的 13 个谱函数之一，下面的引理给出了标准算子代数中两个算子相等的判断准则.

引理 3.2.3 设 $\mathcal{A}$ 是复 Banach 空间 X 上的标准算子代数且 $A, B \in \mathcal{A}$. 令 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 代表 13 个谱函数 $\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{A}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$, $\eta\sigma(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$, $\sigma_{ap}(\cdot)$, $\sigma_s(\cdot)$, $\sigma_{ap}(\cdot)\cap\sigma_s(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)\cap\sigma_c(\cdot)$ 和 $\sigma_p(\cdot)\cup\sigma_c(\cdot)$ 之一. 如果对每个秩一算子 $R \in \mathcal{B}(X)$, 都有 $\Delta^{\mathcal{A}}(A+R) = \Delta^{\mathcal{A}}(B+R)$, 那么 $A = B$.

证明 令 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 是引理中的 13 个谱函数之一. 注意到对于 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 的任一选择，要么 $\sigma_p(\cdot)\cap\sigma_c(\cdot)$ 要么 $\partial\sigma^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 是 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 的子集合. 固定数 λ 使得 $|\lambda| > \max\{\|A\|, \|B\|\}$. 对任意非零向量 $x \in X$, 令 $Ax = y$. 设 $M = \{f \in X^* \mid \langle x, f\rangle = 1\}$. 如果 $f \in M$, 那么 $\lambda \in \sigma_p(A-(y-\lambda x)\otimes f)$. 因为有限秩算子的各种谱都相同，因此 $\lambda \in \sigma_c(A-(y-\lambda x)\otimes f)$ 且由引理 3.2.2 中 $(1)\Rightarrow(2)$ 的证明知 λ 属于 $\sigma^{\mathcal{A}}(A-(y-\lambda x)\otimes f)$ 的孤立点，所以 $\lambda \in \partial\sigma^{\mathcal{A}}(A-(y-\lambda x)\otimes f)$. 这样 $\lambda \in \Delta^{\mathcal{A}}(A-(y-\lambda x)\otimes f) = \Delta^{\mathcal{A}}(B-(y-\lambda x)\otimes f) \subseteq \eta\sigma(B-(y-\lambda x)\otimes f)$. 由于 $|\lambda| > \|B\|$, 我们有 λ 属于 $\sigma^{\mathcal{A}}(B-(y-\lambda x)\otimes f)$

的孤立点，故 $\lambda \in \sigma_p(B-(y-\lambda x)\otimes f)$. 这样存在非零向量 u_f 使得 $(B-(y-\lambda x)\otimes f)u_f = \lambda u_f$, 所以 $u_f = \langle u_f, f\rangle (B-\lambda)^{-1}(y-\lambda x)$. 令 $u = (B-\lambda)^{-1}(y-\lambda x)$. 则对每个 $f \in M$, 有 $(B-(y-\lambda x)\otimes f)u = \lambda u$. 如果 x 和 u 线性无关，那么存在 $f \in M$ 使得 $\langle u, f\rangle = 0$, 因此 $(B-\lambda)u = 0$ 且 $u = 0$, 产生矛盾. 所以 $(B-(y-\lambda x)\otimes f)x = \lambda x$, 从而 $Bx = y$. 现在 x 的任意性表明 $B = A$. 证毕.

注 3.2.2 如果把 $\Delta^{\mathcal{A}}(\cdot)$ 用算子谱函数 $\Delta(\cdot)$ 代替，引理 3.2.2 和 3.2.3 仍然成立.

定理 3.2.4 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是复 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数且 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是可加满射. 令 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 代表 13 个符号 $\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\eta\sigma(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$, $\sigma_{ap}(\cdot)$, $\sigma_s(\cdot)$, $\sigma_{ap}(\cdot)\cap\sigma_s(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)\cap\sigma_c(\cdot)$ 和 $\sigma_p(\cdot)\cup\sigma_c(\cdot)$ 之一，其中 $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$. 如果 $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T)) = \Delta^{\mathcal{A}}(T)$ 对每个 $T \in \mathcal{A}$ 都成立，则下列之一成立:

(1) 存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ 使得对每个算子 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$;

(2) 存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X^*,Y)$ 使得对每个算子 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = AT^*A^{-1}$. 如果 X 或 Y 不自反或者如果 $\mathcal{A}$ 包含元 S 使得 $\Delta^{\mathcal{A}_*}(S^*) \neq \Delta^{\mathcal{A}}(S)$ 且 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 取 $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_p^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_c^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 或 $\sigma_s^{\mathcal{R}}(\cdot)$, 那么这种情形不出现，其中 $\mathcal{A}_* = \{T^* \mid T \in \mathcal{A}\}$.

证明 假定对每个 $T \in \mathcal{A}$, $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T)) = \Delta^{\mathcal{A}}(T)$.

断言 1 Φ 是单射且 $\Phi(I) = I$.

我们首先证明，如果 $S \in \mathcal{A}$ 使得，对每个 $T \in \mathcal{A}$, $\Delta^{\mathcal{A}}(T+S) \subseteq \Delta^{\mathcal{A}}(T)$, 那么 $S = 0$.

相反地，假定 $S \neq 0$. 令 $x \in X$ 使得 $Sx = y \neq 0$. 取泛函 $f \in X^*$ 满足 $\langle x, f\rangle = 1$ 且 $\langle y, f\rangle \neq 0$. 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $|\lambda| > \|S\|$ 且 $T = (\lambda x - y)\otimes f$, 那么 $T \in \mathcal{A}$ 且 $\lambda \in \partial\sigma^{\mathcal{A}}(T+S)\cap\sigma_p(T+S)\cap\sigma_c(T+S) \subseteq \Delta^{\mathcal{A}}(T+S)$. 但 $\Delta^{\mathcal{A}}(T) = \eta\sigma(T) = \{0, \langle \lambda x - y, f\rangle\}$ 且 $\langle \lambda x - y, f\rangle = \lambda - \langle y, f\rangle \neq \lambda$, 矛盾. 故 $S = 0$.

现在 Φ 的单射性是显然的. 事实上，如果 $\Phi(S) = 0$, 那么对

所有的 $T\in\mathcal{A}$, $\Delta^{\mathcal{A}}(T+S)=\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T))=\Delta^{\mathcal{A}}(T)$, 所以 $S=0$.

因为 Φ 是满射，故存在算子 $E\in\mathcal{A}$ 使得 $\Phi(E)=I$. 这样对每个 $T\in\mathcal{A}$, $\Delta^{\mathcal{A}}(T+E-I)=\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T-I)+I)=1+\Delta^{\mathcal{A}}(T-I)=\Delta^{\mathcal{A}}(T)$, 所以 $E=I$.

断言 2 Φ 双边保算子的秩一性.

令 $T\in\mathcal{A}$ 且 $\mathrm{rank}(T)=1$. 对任意的 $B\in\mathcal{F}_2(Y)$, 因为 Φ 是满射，因此存在 $S\in\mathcal{A}$ 使得 $B=\Phi(S)$. 如果 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 是谱函数 $\sigma_p(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)\cap\sigma_c(\cdot)$ 或 $\sigma_p(\cdot)\cup\sigma_c(\cdot)$, 那么由引理 3.2.1 知,

$$\Delta^{\mathcal{A}}(S+T)\cap\Delta^{\mathcal{A}}(S+2T)\subseteq\Delta^{\mathcal{A}}(S);$$

如果 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 是谱函数 $\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)\cap\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\eta\sigma(\cdot)$, $\sigma_{ap}(\cdot)$, $\sigma_s(\cdot)$ 或 $\sigma_{ap}(\cdot)\cap\sigma_s(\cdot)$, 在这些情形下, 因为 $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(S))=\Delta^{\mathcal{A}}(S)$ 表明 $\Phi(S)$ 具有有限谱当且仅当 S 具有有限谱，因此由引理 3.2.2, 我们有

$$\Delta^{\mathcal{A}}(S+T)\cap\Delta^{\mathcal{A}}(S+2T)\subseteq\Delta^{\mathcal{A}}(S).$$

于是由假设，总有 $\Delta^{\mathcal{B}}(B+\Phi(T))\cap\Delta^{\mathcal{B}}(B+2\Phi(T))\subseteq\Delta^{\mathcal{B}}(B)$. 再次应用引理 3.2.2, 我们得到 $\mathrm{rank}(\Phi(T))=1$, 即 Φ 保算子的秩一性. 由于 Φ^{-1} 与 Φ 具有相同的性质，于是 Φ 双边保算子的秩一性.

断言 3 Φ 是线性的.

首先证明 Φ 限制到有限秩算子理想上是线性的. 显然我们只需证明对任意的一秩算子 $x\otimes f$ 以及任意的数 α, 有 $\Phi(\alpha x\otimes f)=\alpha\Phi(x\otimes f)$ 成立即可.

注意到对所有的有限秩算子 F, 都有 $\Delta(F)=\Delta^{\mathcal{A}}(F)=\sigma^{\mathcal{A}}(F)=\sigma(F)$. 特别地，对每个一秩算子 $x\otimes f$, 我们总有 $\Delta^{\mathcal{A}}(x\otimes f)=\{0,\langle x,f\rangle\}$. 下证 Φ 是线性的.

首先假定 $\langle x,f\rangle=1$. 令 $\Phi(x\otimes f)=y\otimes g$, 由于 Φ 保 $\Delta(\cdot)$, 因此 $\langle y,g\rangle=1$. 选择 $y_1\in Y$, $g_1\in Y^*$ 使得 $\langle y,g_1\rangle=\langle y_1,g\rangle=0$ 且 $\langle y_1,g_1\rangle=1$. 因为 Φ 是满射且双边保秩一性，于是存在一秩算

子 $x_i \otimes f_i \in \mathcal{A}$ $(i=1,2)$ 使得 $\Phi(x_1 \otimes f_1) = y \otimes g_1$, $\Phi(x_2 \otimes f_2) = y_1 \otimes g$. 显然 $\operatorname{rank}(x \otimes f + x_i \otimes f_i) = 1$, 从而对每个复数 α, 我们有 $\operatorname{rank}(\alpha x \otimes f + x_i \otimes f_i) = 1$. 所以 $\Delta^{\mathcal{A}}(\alpha x \otimes f + x_i \otimes f_i) = \{0, \alpha\}$. 令 $\Phi(\alpha x \otimes f) = z_\alpha \otimes h_\alpha$, 则 $\Phi(\alpha x \otimes f + x_i \otimes f_i)$ 是秩一算子且 $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(\alpha x \otimes f + x_i \otimes f_i)) = \{0, \alpha\}$. 因此 y 和 z_α (或 y_1 和 z_α) 线性无关或 g 和 h_α (或 g_1 和 h_α) 线性无关. 如果 g_1 和 h_α 线性相关, 那么 y 和 z_α 线性无关. 在张量积 $z_\alpha \otimes h_\alpha$ 的第一项中吸收一个常数, 可令 $h_\alpha = g_1$. 则 $\Phi(\alpha x \otimes f + x_2 \otimes f_2) = z_\alpha \otimes g_1 + y_1 \otimes g$. 由于 g 和 g_1 线性无关, 故存在数 β 使得 $z_\alpha = \beta y_1$, 于是 $\Phi(\alpha x \otimes f) = \beta y_1 \otimes g_1$. 又因为 $\Delta^{\mathcal{B}}(\beta y_1 \otimes g_1) = \Delta^{\mathcal{A}}(\alpha x \otimes f)$ 且 $\langle y_1, g_1\rangle = \langle x, f\rangle = 1$, 故得 $\beta = \alpha$. 选择 $x_3 \otimes f_3 \in \mathcal{A}$ 使得 $\Phi(x_3 \otimes f_3) = y_1 \otimes g_1$, 那么 $\operatorname{rank}(x \otimes f + x_3 \otimes f_3) = 2$. 由于 $y \otimes g + y_1 \otimes g_1$ 是秩 2 幂等元, 于是 $\Delta^{\mathcal{A}}(x \otimes f + x_3 \otimes f_3) = \{0, 1\}$. 所以要么 $\langle x, f_3\rangle = 0$ 要么 $\langle x_3, f\rangle = 0$. 从而对任意的数 α, 我们有

$$\begin{aligned}\{0,1,\alpha\} &= \Delta^{\mathcal{A}}(\alpha x \otimes f + x_3 \otimes f_3) = \Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(\alpha x \otimes f + x_3 \otimes f_3)) \\ &= \Delta^{\mathcal{B}}((\alpha+1) y_1 \otimes g_1) = \{0, \alpha+1\},\end{aligned}$$

矛盾. 所以 g_1 和 h_α 线性无关, 那么必有 y 和 z_α 线性相关. 现在不妨假定 $z_\alpha = y$, 则由 y 和 y_1 的线性无关性以及方程 $\Phi(\alpha x \otimes f + x_2 \otimes f_2) = y \otimes h_\alpha + y_1 \otimes g$ 可推出存在常数 γ 使得 $h_\alpha = \gamma g$. 于是 $\Phi(\alpha x \otimes f) = \gamma \Phi(x \otimes f)$. 又因为 $\Delta^{\mathcal{A}}(\alpha x \otimes f) = \Delta^{\mathcal{A}}(\gamma \Phi(x \otimes f)$, 故 $\gamma = \alpha$.

接下来我们只需考虑 $\langle x, f\rangle = 0$ 的情形. 选择 $f_0 \in X^*$ 使得 $\langle x, f_0\rangle = 1$, 那么 $\Phi(\alpha x \otimes f) = \Phi(\alpha x \otimes (f + f_0)) - \Phi(\alpha x \otimes f_0) = \alpha \Phi(x \otimes f)$. 所以对任意的 $\alpha \in \mathbb{C}$, 任意的 $x \in X$ 及 $f \in X^*$, 都有 $\Phi(\alpha x \otimes f) = \alpha \Phi(x \otimes f)$. 即 Φ 限制到秩一算子上是线性的.

现在对任意的一秩算子 $P \in \mathcal{B}$, 由断言 2, 存在秩一算子 $R \in \mathcal{A}$ 使得 $\Phi(R) = P$. 因为 Φ 限制在有限秩算子理想上是线性的, 因此对任意的 $T \in \mathcal{A}$ 及任意的非零复数 α,

$$\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T)+P) = \Delta^{\mathcal{A}}(T+R) = \frac{1}{\alpha}\Delta^{\mathcal{A}}(\alpha T + \alpha R) = \Delta^{\mathcal{B}}\left(\frac{1}{\alpha}\Phi(\alpha T) + P\right).$$

由引理 3.2.3, 我们有 $\Phi(\alpha T)=\alpha\Phi(T)$, 即 Φ 是线性的.

断言 4 定理中的陈述 (1) 或 (2) 成立.

假定 Φ 线性且对每个 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T))=\Delta^{\mathcal{A}}(T)$.

由断言 1-3, Φ 保单位元且是双边保秩一性的双射. 由定理 2.1.1 知,

(i) 存在线性变换 $A:X\to Y$ 和 $C:X^*\to Y^*$ 使得对每个一秩算子 $x\otimes f\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$ 成立; 或者

(ii) 存在线性变换 $A:X^*\to Y$ 和 $C:X\to Y^*$ 使得对每个一秩算子 $x\otimes f\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cx$ 成立.

因为 Φ 是双射, 因此在两种情形下, A 和 C 都是双射.

假定情形 (i) 发生. 对任意的 $x\in X$ 及 $f\in X^*$, 由于 $\{0,\langle Ax, Cf\rangle\}=\Delta^{\mathcal{B}}(Ax\otimes Cf)=\Delta^{\mathcal{A}}(x\otimes f)=\{0,\langle x,f\rangle\}$, 于是 $\langle Ax,Cf\rangle=\langle x,f\rangle$. 现在由闭图定理知 A 和 C 有界, 故可逆且 $C^*|_Y=A^{-1}$.

由引理 3.1.2 (1)⇒(2) 的证明知, 对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$, $x\in X$, $f\in X^*$ 且 $\lambda\notin\eta\sigma(T)$, 我们有 $\lambda\in\eta\sigma(T+x\otimes f)$ 当且仅当 $\langle(\lambda-T)^{-1}x,f\rangle=1$. 进而, 如果 $|\lambda|>\|T\|$, 那么

$$\begin{aligned}&\lambda\in\eta\sigma(T+x\otimes f)\\&\quad\Leftrightarrow\lambda\in\sigma_p(T+x\otimes f)\cap\sigma_c(T+x\otimes f)\cap\partial\sigma(T+x\otimes f)\\&\quad\Leftrightarrow\langle(\lambda-T)^{-1}x,f\rangle=1.\end{aligned}$$

这样对每个 $T\in\mathcal{A}$, 任意的 $x\in X$ 和 $f\in X^*$ 以及满足 $|\lambda|>\max\{\|T\|,\|\Phi(T)\|\}$ 的所有的 $\lambda\in\mathbb{C}$, 我们有 $\lambda\in\Delta^{\mathcal{A}}(T+x\otimes f)=\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T)+Ax\otimes Cf)$ 当且仅当 $\langle(\lambda-T)^{-1}x,f\rangle=\langle(\lambda-\Phi(T))^{-1}Ax,Cf\rangle=1$. 所以对每个 $T\in\mathcal{A}$, 任意的 $x\in X$ 和 $f\in X^*$ 以及所有的 $\omega\in\mathbb{C}$ 满足 $0<|\omega|<\min\{\|T\|^{-1},\|\Phi(T)\|^{-1}\}$, 都有

$$\langle(I-\omega T)^{-1}x,f\rangle=\langle(I-\omega\Phi(T))^{-1}Ax,Cf\rangle.\tag{3.2.1}$$

方程 (3.2.1) 的每一边在区域 $\{\omega\mid 0<|\omega|<\min\{\|T\|^{-1},\|\Phi(T)\|^{-1}\}\}$ 内解析且 0 为其可去奇点. 对于方程 (3.2.1) 在 $\omega=0$ 处取导数, 则

$\langle Tx, f\rangle = \langle \Phi(T)Ax, Cf\rangle = \langle A^{-1}\Phi(T)Ax, f\rangle$. 所以对任意的 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$.

如果情形 (ii) 发生, 相似于情形 (i) 的证明, 有 $A : X^* \to Y$ 和 $C : X \to Y^*$ 可逆且对每个 $T \in \mathcal{A}$, $\Phi(T) = AT^*A^{-1}$. 令 $\iota : Y \to Y^{**}$ 和 $\kappa : X \to X^{**}$ 是自然嵌入. 因为 $\langle Af, Cx\rangle = \langle x, f\rangle$, 因此 $C^*\iota A = I_{X^*}$, $A^*C = \kappa$. 所以 $\iota(Y) = Y^{**}$, $\kappa(X) = X^{**}$, 即 X 和 Y 自反. 如果存在 $T_0 \in \mathcal{A}$ 使得 $\Delta^{\mathcal{A}_*}(T_0^*) \neq \Delta^{\mathcal{A}}(T_0)$, 其中 $\mathcal{A}_* = \{T^* \mid T \in \mathcal{A}\}$, 那么 $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T_0)) \neq \Delta^{\mathcal{A}}(T_0)$, 因此 Φ 不可能有形式 $\Phi(\cdot) = A(\cdot)^*A^{-1}$. 然而, 这样的 T_0 存在只有当 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 取谱函数 $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$, $\sigma_{ap}(\cdot)$ 或 $\sigma_s(\cdot)$. 证毕.

对于 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 的每个选择, 在定理 3.2.4 中自同构或反自同构的任一情形都有可能发生, 例如假定 X 和 Y 自反但不可分, 取 $\mathcal{A} = \mathbb{C}I + \mathcal{K}(X)$, 其中 $\mathcal{K}(X)$ 代表紧算子理想. 但是如果标准算子代数 $\mathcal{A}$ 包含半可逆但不可逆的元且 Δ 取符号 σ_l, σ_r, σ_p, σ_c, σ_{ap} 或 σ_s, 则 Φ 不可能有形式 $\Phi(\cdot) = A(\cdot)^*A^{-1}$.

鉴于此, 我们有下列推论.

推论 3.2.5 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是复 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数且 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是可加满射. 令 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 代表下列谱函数 $\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot) \cap \sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\partial\sigma^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\eta\sigma(\cdot)$, $\sigma_{ap}(\cdot) \cap \sigma_s(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot) \cap \sigma_c(\cdot)$ 和 $\sigma_p(\cdot) \cup \sigma_c(\cdot)$ 之一, 其中 $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$. 则对每个 $T \in \mathcal{A}$, $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T)) = \Delta^{\mathcal{A}}(T)$ 当且仅当下列性质之一成立:

(1) 存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ 使得对每个 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$;

(2) 存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X^*, Y)$ 使得对每个 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = AT^*A^{-1}$. 在这种情形下 X 和 Y 一定自反.

推论 3.2.6 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是复 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数且 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是可加满射. 令 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 代表谱函数 $\sigma_l^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_r^{\mathcal{R}}(\cdot)$, $\sigma_{ap}(\cdot)$, $\sigma_s(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)$ 或 $\sigma_c(\cdot)$, 其中 $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$. 假定 $\mathcal{A}$ 包含半可逆但不可逆的元. 则对每个 $T \in \mathcal{A}$, $\Delta^{\mathcal{B}}(\Phi(T)) = \Delta^{\mathcal{A}}(T)$ 当且仅当存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ 使得对每个 $T \in \mathcal{A}$,

有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$ 成立.

注 3.2.3 如果 $\Delta^{\mathcal{R}}(\cdot)$ 由 $\Delta(\cdot)$ 代替，定理 3.2.4, 推论 3.2.5 和 3.2.6 也成立.

推论 3.2.7 设 X 和 Y 是复 Banach 空间且 $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(Y)$ 是可加满射，则下列陈述等价.

(1) Φ 保点谱.

(2) Φ 保压缩谱.

(3) 存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 使得对每个 $T\in\mathcal{B}(X)$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$.

证明 我们只需证明 (1)⇒(3) 及 (2)⇒(3).

(2)⇒(3). 由定理 3.2.4, Φ 具有形式 $\Phi(\cdot)=A(\cdot)A^{-1}$ 或 $\Phi(\cdot)=A(\cdot)^*A^{-1}$. 下证第二种情形不出现. 用反证法. 假定对每个 $T\in\mathcal{B}(X)$, 有 $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$, 则 X 和 Y 自反. 由 [151; 命题 1] 知，存在 Y 的可分子空间 W 以及从 Y 到 W 上的投影 P 满足 $\|P\|=1$. 由 Ovsepian-Pelczynski 的有关全有界双正交系的存在性 (见文献 [174; 定理 1]), 存在向量序列 $\{y_n\}\subset W$ 和泛函序列 $\{g_n\}\subset W^*=\mathrm{rng}(P^*)$ 使得

(a) $g_m(y_n)=\delta_{mn}\ (m,n=1,2,\cdots)$;

(b) $\mathrm{span}\{y_n\}$ 在 W 中依范数拓扑稠密;

(c) 如果 $y\in W$ 且对所有的 $n\in\mathbb{N}$, 有 $g_n(y)=0$, 则 $y=0$;

(d) $\sup_n\|y_n\|\|g_n\|=M<\infty$.

令 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}y_n\otimes g_n+I-P$. 我们断言 $S\in\mathcal{B}(Y)$ 是单射且具有稠值域，但不可逆. 事实上，由条件 (d) 和 $\|P\|=1$ 知 S 有界. 因为 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathrm{rng}(S)$, 因此 S 具有稠值域. 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}y_n\otimes g_n$ 是紧算子, 所以 $\mathrm{rng}(S)$ 不闭, 从而 S 不可逆. 现在 Φ 的满射性表明存在算子 $T\in\mathcal{B}(X)$ 使得 $\Phi(T)=S$. 显然 $0\notin\sigma_c(S)=\sigma_c(T)$. 对任意的非零泛函 $f\in X^*$, 令 $g=T^*f\ (\neq 0)$. 则对满足 $\langle x,f\rangle=1$ 的任意向量 $x\in X$, 有 $0\in\sigma_p(T^*-g\otimes x)$, 因此对满足 $\langle Af,h\rangle=1$ 的任

意 $h\in Y^*$, 我们有 $0\in\sigma_c(\Phi(T)-Ag\otimes h)$. 所以对满足 $\langle Af,h\rangle=1$ 的任意 $h\in Y^*$, 存在非零泛函 $w\in Y^*$ 使得 $S^*w=\langle w,Ag\rangle h$. 因为 $w\neq 0$, 因此 $S^*w\neq 0$. 从而 S^* 的值域包含集合 $\{h\in Y^*\mid$ 对某个 $f\in X^*$ 满足 $\langle Af,h\rangle=1\}$. 由于 $A\in\mathcal{B}(X^*,Y)$ 可逆, 于是 $\{h\in Y^*\mid$ 对某个 $f\in X^*$ 满足 $\langle Af,h\rangle=1\}=Y^*$, 所以 $\mathrm{rng}(S^*)=Y^*$, 故 S 可逆, 矛盾. 因此第二种情形不出现.

类似可证 (1)⇒(3) 成立. 证毕.

§3.3 保可逆性或零因子的可加映射

设 X 和 Y 是复 Banach 空间且 $\varphi: X\to Y$ 是一个映射. 如果 φ 可加且对任意的数 $\lambda\in\mathbb{C}$ 和向量 $x\in X$, 有 $\varphi(\lambda x)=\overline{\lambda}\varphi(x)$, 称 φ 是共轭线性的. 更一般地, 如果 φ 可加且满足对所有的数 $\lambda\in\mathbb{C}$ 和向量 $x\in X$, 有 $\varphi(\lambda x)=\tau(\lambda)\varphi(x)$, 其中 τ 是 $\mathbb{C}$ 的环自同构, 称 φ 是 τ- 拟线性的.

设 $\mathcal{A}$ 是 X 上的标准算子代数. 符号 $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{S}_l^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{S}_r^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{TZ}^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{TZ}_r^{\mathcal{A}}$ 分别代表 $\mathcal{A}$ 中所有不可逆元集合, 不左可逆元集合, 不右可逆元集合, 零因子集合, 左零因子集合, 右零因子集合, 拓扑零因子集合, 左拓扑零因子集合和右拓扑零因子集合. 令 $\Theta^{\mathcal{A}}$ 和 $\Omega^{\mathcal{A}}$ 代表 12 个集合 $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{S}_l^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{S}_r^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{TZ}^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{TZ}_r^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{S}_l^{\mathcal{A}}\cap\mathcal{S}_r^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}\cup\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{A}}\cup\mathcal{TZ}_r^{\mathcal{A}}$ 之一. 我们说 $\Omega^{\mathcal{A}}$ 是 $\Theta^{\mathcal{A}}$ 的对偶 (用 $(\Theta^{\mathcal{A}})'$ 表示), 如果用 $\mathcal{B}(H)$ 代替 $\mathcal{A}$, 其中 H 是无限维的复 Hilbert 空间, 我们有 $T\in\Theta^{\mathcal{B}(H)}\Leftrightarrow T^*\in\Omega^{\mathcal{B}(H)}$ 对任意的 $T\in\mathcal{B}(H)$ 都成立. 由定义, 显然我们有 $(\Omega^{\mathcal{A}})''=\Omega^{\mathcal{A}}$, $(\mathcal{S}_l^{\mathcal{A}})'=\mathcal{S}_r^{\mathcal{A}}$, $(\mathcal{Z}^{\mathcal{A}})'=\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$, $(\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}\cup\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}})'=\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}\cup\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$, 等. 本节首先刻画标准算子代数上保持这 12 个集合之一的可加映射. 为此, 我们需要下面的引理, 其证明思想类似于引理 3.2.1 和 3.2.2, 只需作适当的修改. 但为了完整性, 我们简略写出其证明. 令 $\mathcal{F}_n(X)$ 代表秩不大于 n 的算子集合且 $\mathbb{C}I+\mathcal{F}_n(X)=\{\alpha I+F\mid\alpha\in\mathbb{C}$ 且 $F\in\mathcal{F}_n(X)\}$.

引理 3.3.1 令 $\mathcal{A}$ 是复 Banach 空间 X 上的标准算子代数且 $\Theta^{\mathcal{A}}$ 代表 12 个集合 $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}, \mathcal{S}_l^{\mathcal{A}}, \mathcal{S}_r^{\mathcal{A}}, \mathcal{Z}^{\mathcal{A}}, \mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}, \mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}, \mathcal{TZ}^{\mathcal{A}}, \mathcal{TZ}_l^{\mathcal{A}}, \mathcal{TZ}_r^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{S}_l^{\mathcal{A}}\cap\mathcal{S}_r^{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}\cup\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$ 之一. 对于非零算子 $A\in\mathcal{A}$, 下列条件等价.

(1) $\operatorname{rank}(A)=1$.

(2) 对每个 $T\in\mathcal{A}$ 及每个复数 $c\neq 1$, 若 $T+A, T+cA\in\Theta^{\mathcal{A}}$, 则 $T\in\Theta^{\mathcal{A}}$.

(2′) 对每个 $T\in\mathbb{C}I+\mathcal{F}_2(X)$ 及每个复数 $c\neq 1$, 若 $T+A$, $T+cA\in\Theta^{\mathcal{A}}$, 则 $T\in\Theta^{\mathcal{A}}$.

(3) 对每个 $T\in\mathcal{A}$, 若 $T+A, T+2A\in\Theta^{\mathcal{A}}$, 则 $T\in\Theta^{\mathcal{A}}$.

(3′) 对每个 $T\in\mathbb{C}I+\mathcal{F}_2(X)$, 若 $T+A$, $T+2A\in\Theta^{\mathcal{A}}$, 则 $T\in\Theta^{\mathcal{A}}$.

证明 (2)⇒(2′)⇒(3′) 和 (2)⇒(3)⇒(3′) 显然.

(1)⇒(2). 令 $A=x\otimes f$. 设存在 $T\in\mathcal{A}$ 及非零复数 $c\neq 1$ 使得 $T+A, T+cA\in\Theta^{\mathcal{A}}$ 但 $T\notin\Theta^{\mathcal{A}}$, 我们将导出矛盾.

如果 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{S}_l^{\mathcal{A}}$, 那么 T 左可逆且存在 $S\in\mathcal{A}$ 使得 $ST=I$. 因为 $I+SA, I+cSA\in\mathcal{S}_l^{\mathcal{A}}$, 因此 $\{-1,-c^{-1}\}\subseteq\sigma^{\mathcal{A}}(SA)=\sigma(SA)$, 与秩一算子 SA 至多包含一个非零谱点矛盾. 现在假定 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{S}_r^{\mathcal{A}}$ 或 $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$, 则类似地可证明 (2) 成立. 从而对于情形 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{S}_l^{\mathcal{A}}\cap\mathcal{S}_r^{\mathcal{A}}$, (2) 也成立.

如果 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{A}}\cup\mathcal{TZ}_r^{\mathcal{A}}$, 那么 $T\notin\Theta^{\mathcal{A}}$ 蕴涵 T 是双射且作为算子具有逆 T^{-1} (T^{-1} 可能不属于 $\mathcal{A}$). 然而, 秩一算子 $T^{-1}A\in\mathcal{A}$. 现在由上面的讨论知 (2) 也成立.

如果 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{A}}$, 那么 T 是单射且具有闭值域. 因为 $T+A$, $T+cA\in\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{A}}$, 因此存在单位向量序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得当 $n\to\infty$ 时, 有 $\|(T+A)x_n\|\to 0$, $\|(T+cA)u_n\|\to 0$. 因为 $\{\langle x_n,f\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\langle u_n,f\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ 是复平面中的有界子集, 因此存在收敛子列. 故不失一般性, 可假定当 $n\to\infty$ 时, 有 $\langle x_n,f\rangle\to a$, $\langle u_n,f\rangle\to b$. 所以当 $n\to\infty$ 时, $Tx_n\to -ax$, $Tu_n\to -cbx$. 由于 $T\notin\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{A}}$, 显然 a 和 b 非零, 于是 $x\in\operatorname{rng}(T)$. 取 $u\in X$ 使得 $Tu=x$, 那么 $T(I+u\otimes f)=T+x\otimes f\in\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{A}}$ 表明 $I+u\otimes f$

不可逆. 相似地, 可证明 $I+cu\otimes f$ 不可逆. 这样 $u\otimes f$ 包含了两个不同的非零谱 -1 和 $-\frac{1}{c}$, 矛盾. 现在类似可证 (1)⇒(2) 对于 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{T}\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$ 或 $\mathcal{T}\mathcal{Z}$ $(=\mathcal{T}\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}\cap\mathcal{T}\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}})$ 也成立.

如果 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$, 因为 $T+A, T+cA\in\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$, 因此存在非零向量 u 和 v 使得 $Tu=-\langle u,f\rangle x, Tv=-c\langle v,f\rangle x$. 由于 $T\notin\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$, 所以 T 是单射, 于是 u 和 v 线性相关. 从而 $c=1$, 与假设条件 $c\neq 1$ 矛盾. 情形 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$ 或 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}\cup\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$ 的证明类似.

如果 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$ $(=\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}\cap\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}})$, 由上面的讨论知, 我们只需考虑 $T+A\in\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}\backslash\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$ 且 $T+cA\in\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}\backslash\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$, 同时 $T\notin\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}\cup\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$. 因为 $T+A\in\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}\backslash\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$, 因此存在向量 u 使得 $Tu=x$. 由于 $T(I+cu\otimes f)=T+cA\in\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}\backslash\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$, 必有 $(I+cu\otimes f)\notin\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$, 所以 $(I+cu\otimes f)$ 可逆, 从而 $T+cA\notin\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$, 矛盾.

(3′)⇒(1). 设 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$. 假定 $\mathrm{rank}(A)>1$, 我们将证明条件 (3′) 不成立. 首先, 假定存在泛函 $f\in X^*$ 使得 $f, A^*f, (A^*)^2f$ 线性无关. 取向量 $x_0,x_1,x_2\in X$ 使得 $\langle x_i,(A^*)^jf\rangle=\delta_{ij}$ $(i,j=0,1,2)$. 令

$$\begin{aligned}T=&(x_0+x_2)\otimes(3\|A\|f-A^*f)\\&+x_1\otimes(3\|A\|A^*f-2(A^*)^2f)-3\|A\|I.\end{aligned}$$

则 $T\in\mathbb{C}I+\mathcal{F}_2(X)$ 且 $(T^*+A^*)f=0$, $(T^*+2A^*)A^*f=0$. 这样 $T+A, T+2A\in\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$. 因为 $(A-3\|A\|I)[(A-3\|A\|I)^{-1}(T+3\|A\|I)+I]=T+A\in\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$ 且 $(A-3\|A\|I)^{-1}(T+3\|A\|I)$ 具有秩 2, 因此 $(A-3\|A\|I)^{-1}(T+3\|A\|I)+I\in\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$, 从而 $T+A\in\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$. 相似地, 有 $T+2A\in\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$. 于是 $T+A, T+2A\in\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$. 然而, 容易验证 T 在 $\mathcal{A}$ 中可逆, 所以不可能属于 $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$. 故 (3′) 不成立.

其次, 假定对任意的非零泛函 $g\in X^*$, 都有 g, A^*g 和 $(A^*)^2g$ 线性相关. 则 A^* 是次数不大于 2 的代数算子, 从而 A 也具有相同的性质. 即存在次数不大于 2 的多项式 p 使得 $p(A)=0$. 如果 p 的次数等于 1, 那么存在非零数 a 使得 $A=aI$. 选择向量 $y\in Y$ 使得 $\langle y,g\rangle=a$. 令 $T=y\otimes g-2aI$, 那么 T 在 $\mathcal{A}$ 中可逆, 从而

$T \notin \mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$. 但 $T+A, T+2A \in \mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$, 故 (3′) 不成立.

因此, 从现在起我们总假定 A 不是恒等算子的倍数且 p 的次数等于 2. 所以存在数 α 和 β 使得 $p(t)=(t-\alpha)(t-\beta)$.

情形 1 $\alpha \neq 0, \beta \neq \alpha$. 如果 $\beta=0$, 因为 $\operatorname{rank}(A) \geq 2$, 因此 $\dim\ker(A-\alpha I) \geq 2$; 如果 $\beta \neq 0$, 那么 A 可逆. 由于 X 是无限维的, 于是子空间 $\ker(A-\alpha I)$ 和 $\ker(A-\beta I)$ 至少有一个的维数大于 1. 故不失一般性, 可假定 $\dim\ker(A-\alpha I) \geq 2$. 这样存在 X 的闭子空间 V_1, V_2 和 V_3 使得 $\dim V_1=1$, 且关于 X 的空间分解 $X=V_1\dot{+}V_2\dot{+}V_3$, A 有相应的矩阵表示 $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha I_2 & 0\\ 0 & 0 & \beta I_3\end{pmatrix}$, 其中 I_2 和 I_3 分别代表空间 V_2 和 V_3 上的恒等算子. 令

$$T=\begin{pmatrix}-\alpha & 0 & 0\\ 0 & -2\alpha I_2 & 0\\ 0 & 0 & -2\alpha I_3\end{pmatrix},$$

则 $T \in \mathbb{C}I+\mathcal{F}_1(X)$ 在 $\mathcal{A}$ 中可逆. 而 $T+A$ 和 $T+2A$ 是 $\mathcal{A}$ 的零因子, 故 (3′) 不成立.

情形 2 $\alpha=\beta \neq 0$. 因为 $\operatorname{rank}(A)>1$, 因此存在线性无关的泛函 $f_1, f_2 \in X^*$ 使得 $A^*f_1=\alpha f_1$, $A^*f_2=f_1+\alpha f_2$. 取向量 $x_i \in X$ $(i=1,2)$ 使得 $\langle x_i, f_j\rangle=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2)$. 如果 $\alpha \neq \pm 1$, 令 $T=(x_1-x_2)\otimes f_1+(\alpha^2 x_1+x_2)\otimes f_2-(\alpha+1)I$, 那么 $T \in \mathbb{C}I+\mathcal{F}_2(X)$. 因为 $\sigma^{\mathcal{A}}(T)=\{-\alpha-1, -\alpha \pm i\alpha\}$, 因此 T 在 $\mathcal{A}$ 中可逆. 又因为 $(T^*+A^*)f_2=0$, $(T^*+2A^*)(f_1-\alpha f_2)=0$, 所以 $T+A, T+2A \in \mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$. 注意到 $A-(\alpha+1)I$ 和 $2A-(\alpha+1)I$ 可逆, 所以 $T+A, T+2A \in \mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$, 从而 $T+A, T+2A \in \mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$. 故 (3′) 不成立; 如果 $\alpha=1$, 令 $T=(x_1-2x_2)\otimes f_1+(-x_1+x_2)\otimes f_2-3I$, 那么 $T \in \mathbb{C}I+\mathcal{F}_2(X)$ 且 $\sigma(T)=\{-3, -2\pm\sqrt{2}\}$. 现在容易验证 T 在 $\mathcal{A}$ 中可逆且 $(T^*+A^*)(f_1-f_2)=0$, $(T^*+2A^*)f_2=0$, 因此 $T+A, T+2A \in \mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$. 因为 $3I-A$ 和 $3I-2A$ 可逆, 相似于

$\alpha \neq \pm 1$ 情形的讨论，我们也有 $T+A, T+2A \in \mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$. 这样 $T+A$ 和 $T+2A$ 是零因子但 T 不是. 故 (3′) 不成立; 如果 $\alpha=-1$, 令 $T=(-x_1-2x_2)\otimes f_1+(-x_1-x_2)\otimes f_2+3I$, 则 $T\in\mathbb{C}I+\mathcal{F}_2(X)$ 且 $\sigma(T)=\{3,2\pm\sqrt{2}\}$. 因为 $(T^*+A^*)(f_1+f_2)=0, (T^*+2A^*)f_2=0$, 所以 $T+A, T+2A\in\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$. 因为 $-3I-A$ 和 $-3I-2A$ 可逆，我们也有 $T+A, T+2A\in\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}$. 这样 $T+A$ 和 $T+2A$ 是零因子但 T 不是. 故 (3′) 不成立.

情形 3 $\alpha=\beta=0$. 此时 $A^2=0$. 因为 $\mathrm{rank}(A)>1$, 因此存在泛函 $f, g\in X^*$ 使得 f, A^*f, g, A^*g 线性无关. 令 $f_1=f$, $f_2=A^*f$, $f_3=g$, $f_4=A^*g$. 取向量 $x_i\in X$ $(i=1, 2, 3, 4)$ 使得 $\langle x_i, f_j\rangle=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2,3,4)$. 令 $T=x_2\otimes f_1+2x_4\otimes f_3-\sqrt{2}I$. 容易验证 $T\in\mathbb{C}I+\mathcal{F}_2(X)$ 在 $\mathcal{A}$ 中可逆且 $(T^*+A^*)(A^*g+\sqrt{2}g)=0$, $(T^*+2A^*)(\sqrt{2}A^*f+f)=0$. 现在 $A-\sqrt{2}I$ 和 $2A-\sqrt{2}I$ 的可逆性蕴涵存在非零向量 u 和 v 使得 $(T+A)u=0$, $(T+2A)v=0$. 这样 $T+A, T+2A\in\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$. 故 (3′) 不成立. 从而对于情形 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$, (3′)⇒(1) 得证.

因为 $\Theta^{\mathcal{A}}$ 的每个选择都以 $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$ 作为子集且因为 $\Theta^{\mathcal{A}}$ 中的每个元在 $\mathcal{A}$ 中都不可逆，因此对于 $\Theta^{\mathcal{A}}$ 的其他选择，由情形 $\Theta^{\mathcal{A}}=\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}$ 的证明知 (3′)⇒(1) 也成立. 证毕.

引理 3.3.2 设 $\mathcal{A}$ 是复 Banach 空间 X 上的标准算子代数且 $A, B\in\mathcal{A}$. 令 $\Theta^{\mathcal{A}}$ 和 $\Omega^{\mathcal{A}}$ 代表集合 $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}, \mathcal{S}_l^{\mathcal{A}}, \mathcal{S}_r^{\mathcal{A}}, \mathcal{Z}^{\mathcal{A}}, \mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}, \mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}, \mathcal{TZ}^{\mathcal{A}}, \mathcal{TZ}_l^{\mathcal{A}}, \mathcal{TZ}_r^{\mathcal{A}}, \mathcal{TZ}_l^{\mathcal{A}}\cup\mathcal{TZ}_r^{\mathcal{A}}, \mathcal{S}_l^{\mathcal{A}}\cap\mathcal{S}_r^{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{Z}_l^{\mathcal{A}}\cup\mathcal{Z}_r^{\mathcal{A}}$ 之一. 如果对每个算子 $R\in\mathbb{C}I+\mathcal{F}_1(X)$, $A+R\in\Theta^{\mathcal{A}}\Rightarrow B+R\in\Omega^{\mathcal{A}}$, 则 $A=B$.

证明 令 $\Theta^{\mathcal{A}}$ 和 $\Omega^{\mathcal{A}}$ 分别是引理中的 12 个集合之一. 首先注意到 $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}\subseteq\Theta^{\mathcal{A}}\cap\Omega^{\mathcal{A}}$. 对任意的非零向量 $x\in X$, 令 $Ax=y$. 固定数 λ 使得 $|\lambda|>\max\{\|A\|, \|B\|\}$ 且 $y\neq\lambda x$. 令 $M=\{f\in X^*\mid\langle x,f\rangle=1\}$. 如果 $f\in M$, 那么 $\lambda\in\sigma_p(A-(y-\lambda x)\otimes f)$, 从而 $\lambda\in\sigma_c(A-(y-\lambda x)\otimes f)$. 这样 $A-\lambda-(y-\lambda x)\otimes f\in\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}\subseteq\Theta^{\mathcal{A}}$. 由假定，$B-\lambda-(y-\lambda x)\otimes f\in\Omega^{\mathcal{A}}$, 所以 $\lambda\in\sigma^{\mathcal{A}}(B-(y-\lambda x)\otimes f)$. 现在 $|\lambda|>\|B\|$ 表明 $\lambda\in\sigma_p(B-(y-\lambda x)\otimes f)$, 因此存在非零向量 u_f 使得

$(B-(y-\lambda x)\otimes f)u_f = \lambda u_f$. 显然 $u_f = \langle u_f, f\rangle(B-\lambda)^{-1}(y-\lambda x)$. 令 $u = (B-\lambda)^{-1}(y-\lambda x)$, 那么对每个 $f \in M$, $(B-(y-\lambda x)\otimes f)u = \lambda u$. 如果 x 和 u 线性无关，那么存在 $f \in M$ 使得 $\langle u, f\rangle = 0$, 所以 $(B-\lambda)u = 0$, 从而 $u = 0$, 矛盾. 故 x 和 u 必线性相关且 $(B-(y-\lambda x)\otimes f)x = \lambda x$, 因此 $Bx = y$. 由 x 的任意性，我们有 $B = A$. 证毕.

下面的定理是本节的基本结果，证明了标准算子代数间保持上述 12 个集合之一并且保单位元的可加满射具有形式: 同构，共轭同构，反同构或共轭反同构.

定理 3.3.3 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是无限维复 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数且 $\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是保单位元的可加满射. 令 $\Theta^{\mathcal{R}}$ 是 $\mathcal{R}$ 的下列子集合 $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{S}_l^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{S}_r^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{Z}^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{Z}_l^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{Z}_r^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{TZ}^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{TZ}_r^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{S}_l^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}_r^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{Z}_l^{\mathcal{R}} \cup \mathcal{Z}_r^{\mathcal{R}}$ 或 $\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{R}} \cup \mathcal{TZ}_r^{\mathcal{R}}$, 其中 $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$. 如果对所有的 $T \in \mathcal{A}$, $\Phi(T) \in \Theta^{\mathcal{B}}$ 当且仅当 $T \in \Theta^{\mathcal{A}}$, 则下列断言之一成立:

(1) 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A: X \to Y$ 使得对所有的 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$ 成立;

(2) 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A: X^* \to Y$ 使得对所有的 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = AT^*A^{-1}$ 成立. 如果 X 或 Y 不自反，或者如果 $\mathcal{A}$ 包含元 S 使得 $S \in \Theta^{\mathcal{A}}$ 但 $S^* \notin \Theta^{\mathcal{A}_*}$ 且 $\Theta^{\mathcal{A}}$ 取集合 $\mathcal{S}_l^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{S}_r^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{Z}_l^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{Z}_r^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{R}}$ 或 $\mathcal{TZ}_r^{\mathcal{R}}$, 那么这种情形不出现，其中 $\mathcal{A}_* = \{T^* \mid T \in \mathcal{A}\}$.

证明 我们证明下面的几个断言.

断言 1 Φ 是单射.

设 $\Phi(S) = 0$, 则对所有的 $T \in \mathcal{A}$, $T+S \in \Theta^{\mathcal{A}} \Rightarrow \Phi(T) \in \Theta^{\mathcal{B}} \Rightarrow T \in \Theta^{\mathcal{A}}$, 现在由引理 3.3.2 立得 $S = 0$. 故 Φ 是单射.

断言 2 Φ 双边保算子的秩一性.

令 $R \in \mathcal{A}$ 且 $\operatorname{rank}(R) = 1$. 对任意的 $T \in \mathbb{C}I + \mathcal{F}_2(Y) \subset \mathcal{B}$, 因为 Φ 是满射，因此存在 $S \in \mathcal{A}$ 使得 $\Phi(S) = T$. 如果 $T + \Phi(R)$, $T + 2\Phi(R) \in \Theta^{\mathcal{B}}$, 那么 $S+R$, $S+2R \in \Theta^{\mathcal{A}}$. 由引理 3.3.1 的 (1)⇒(3),

有 $S\in\Theta^{\mathcal{A}}$. 再由假定知 $T\in\Theta^{\mathcal{B}}$. 应用引理 3.3.1 的 $(3')\Rightarrow(1)$, 我们有 $\mathrm{rank}(\Phi(A))=1$, 即 Φ 保算子的秩一性. 因为 $\Phi^{-1}(\Theta^{\mathcal{B}})=\Theta^{\mathcal{A}}$, 因此 Φ 双边保算子的秩一性.

由于 Φ 可加, 于是 Φ 是从 $\mathcal{F}(X)$ 到 $\mathcal{F}(Y)$ 上的双射且双边保算子的秩一性. 由定理 2.3.9 知存在环自同构 $\tau:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 且

(i) 存在 τ- 拟线性双射 $A:X\to Y$ 和 $C:X^*\to Y^*$ 使得对所有的 $x\in X$ 和 $f\in X^*$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$ 成立; 或者

(ii) 存在 τ- 拟线性双射 $A:X^*\to Y$ 和 $C:X\to Y^*$ 使得对所有的 $x\in X$ 和 $f\in X^*$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cx$ 成立.

(注意, 到目前为止, 还没有用到 $\Phi(I)=I$ 的假定.)

断言 3 如果情形 1 发生, 则对所有的 $x\in X$ 和 $f\in X^*$, 有 $\Phi(x\otimes f)=A(x\otimes f)A^{-1}$; 如果情形 2 发生, 则对所有的 $x\in X$ 和 $f\in X^*$, 有 $\Phi(x\otimes f)=A(x\otimes f)^*A^{-1}$.

假定情形 1 发生. 首先证明对所有的 $x\in X$ 和 $f\in X^*$, 有 $\langle Ax,Cf\rangle=\tau(\langle x,f\rangle)$. 如果 $\langle x,f\rangle=1$, 那么 $I-x\otimes f\in\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}\subseteq\Theta^{\mathcal{A}}$. 因为 Φ 保单位元, 因此 $I-Ax\otimes Cf\in\Theta^{\mathcal{B}}$, 而此蕴涵 $\langle Ax,Cf\rangle=1$. 如果 $\langle x,f\rangle=\alpha\neq0$, 那么 $1=\langle\alpha^{-1}x,f\rangle=\langle A(\alpha^{-1}x),Cf\rangle=\tau(\alpha)^{-1}\langle Ax,Cf\rangle$, 所以 $\langle Ax,Cf\rangle=\tau(\alpha)$. 现在假定 $\langle x,f\rangle=0$. 如果 $\langle Ax,Cf\rangle=\beta\neq0$, 那么 $I-A(\tau^{-1}(\beta^{-1})x)\otimes Cf\in\Theta^{\mathcal{B}}$, 于是 $I-\tau^{-1}(\beta^{-1})x\otimes f\in\Theta^{\mathcal{A}}$, 故 $\langle x,f\rangle=\tau^{-1}(\beta)\neq0$, 矛盾.

这样, 对任意的秩一算子 $x\otimes f\in\mathcal{A}$ 及任意的 $y\in Y$, 我们都有

$$\begin{aligned}\Phi(x\otimes f)y&=(Ax\otimes Cf)y=\langle y,Cf\rangle Ax=\langle AA^{-1}y,Cf\rangle Ax\\&=\tau(\langle A^{-1}y,f\rangle)Ax=A(\langle A^{-1}y,f\rangle x)\\&=A(x\otimes f)A^{-1}y.\end{aligned}$$

所以 $\Phi(x\otimes f)=A(x\otimes f)A^{-1}$.

如果情形 2 发生, 类似地, 对所有的 $x\in X$ 和 $f\in X^*$, 我们有 $\langle Af,Cx\rangle=\tau(\langle x,f\rangle)$, 从而断言的相应部分成立.

断言 4 对所有的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tau(\lambda) = \lambda$; 或者对所有的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tau(\lambda) = \overline{\lambda}$.

由定理 1.2.8 知, 复数域上的连续环同态要么是恒等映射要么是共轭映射, 因此我们只需证 τ 是连续的. 用反证法. 假定 τ 不连续, 那么 τ 在 0 点的任何邻域内都无界.

不妨假定情形 1 发生. 取 $g_1 \in Y^*$ 满足 $\|g_1\| \le 1$, 并且取单位向量 $u_1 \in X$ 使得 $\langle u_1, C^{-1}g_1\rangle \ne 0$. 因为 τ 在集合 $\{\lambda\langle u_1, C^{-1}g_1\rangle \mid |\lambda| < 2^{-1}\}$ 上无界, 因此存在满足 $|\lambda_1| < 2^{-1}$ 的复数 λ_1 使得 $\tau(\lambda_1\langle u_1, C^{-1}g_1\rangle) > 1$. 令 $x_1 = \lambda_1 u_1$, 则 $\|x_1\| < 2^{-1}$ 且 $|\tau(\langle x_1, C^{-1}g_1\rangle)| > 1$. 取满足 $\|g_2\| \le 1$ 的 $g_2 \in Y^*$ 使得 $\langle x_1, C^{-1}g_2\rangle = 0$. 显然 $C^{-1}g_1$ 和 $C^{-1}g_2$ 线性无关. 因此可取单位向量 $u_2 \in X$ 使得 $\langle u_2, C^{-1}g_2\rangle \ne 0$, 但 $\langle u_2, C^{-1}g_1\rangle = 0$. 由于 τ 在 $\{\lambda\langle u_2, C^{-1}g_2\rangle \mid |\lambda| < 2^{-2}\}$ 上无界, 故存在 λ_2 使得 $|\tau(\lambda_2\langle u_2, C^{-1}g_2\rangle)| > 2$. 令 $x_2 = \lambda_2 u_2$, 那么 $\|x_2\| < 2^{-2}$ 且 $|\tau(\langle x_2, C^{-1}g_2\rangle)| > 2$. 假定所取到的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 满足条件 $\|x_i\| < 2^{-i}$, $\|g_i\| \le 1$ 且当 $i \ne k$ 时, 有 $\langle x_i, C^{-1}g_k\rangle = 0$, $|\tau(\langle x_i, C^{-1}g_i\rangle)| > i$ $(i, k = 1, 2, \cdots, n)$. 另取满足 $\|g_{n+1}\| \le 1$ 的 g_{n+1} 使得 $\langle x_i, C^{-1}g_{n+1}\rangle = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$, 那么 $C^{-1}g_{n+1} \notin \mathrm{span}\{C^{-1}g_1, \cdots, C^{-1}g_n\}$. 选择单位向量 u_{n+1} 使得 $\langle u_{n+1}, C^{-1}g_{n+1}\rangle \ne 0$, 同时 $\langle u_{n+1}, C^{-1}g_i\rangle = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 因为 τ 在 $\{\lambda\langle u_{n+1}, C^{-1}g_{n+1}\rangle \mid |\lambda| < 2^{-(n+1)}\}$ 上无界, 所以存在满足 $|\lambda_{n+1}| < 2^{-(n+1)}$ 的 λ_{n+1} 使得 $|\tau(\langle x_{n+1}, C^{-1}g_{n+1}\rangle)| > n+1$, 其中 $x_{n+1} = \lambda_{n+1}u_{n+1}$. 继续这个过程, 我们得到满足下列条件的两个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$:

(1) 对每个 n, $\|x_n\| < 2^{-n}$ 且 $\|g_n\| \le 1$;

(2) 当 $n \ne k$ 时, $\langle x_n, C^{-1}g_k\rangle = 0$;

(3) $|\tau(\langle x_n, C^{-1}g_n\rangle)| > n$.

注意到 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是 X 中的向量, 因此 $Ax \in Y$. 然而, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 我们有 $\|Ax\| \ge |\langle Ax, g_n\rangle| = |\tau(\langle x, C^{-1}g_n\rangle)| > n$, 矛盾. 所以 τ 连续.

断言 5 A 是有界线性或共轭线性双射.

在情形 1 中, 由 $\langle Ax, Cf\rangle = \tau(\langle x, f\rangle)$ (或在情形 2 中, 由 $\langle Af, Cx\rangle = \tau(\langle x, f\rangle)$), 断言 4 和闭图定理易知, 此断言成立.

断言 6 对所有的 $T \in \mathcal{A}$, $\Phi(T) = ATA^{-1}$; 或者对所有的 $T \in \mathcal{A}$, $\Phi(T) = AT^*A^{-1}$.

假定情形 1 成立. 对每个 $T \in \mathcal{A}$, 令 $\Psi(T) = A^{-1}\Phi(T)A$. 则 $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是保单位元的线性双射且 $\Psi(\Theta^{\mathcal{A}}) = \Theta^{\mathcal{A}}$. 由断言 3, 对每个秩一算子 $x \otimes f \in \mathcal{A}$, 都有 $\Psi(x \otimes f) = x \otimes f$. 这样对任意的 $T \in \mathcal{A}$ 及任意的 $x \otimes f \in \mathcal{A}$ 和每个复数 $\lambda \in \mathbb{C}$, 我们有 $\Psi(T) + \lambda + x \otimes f \in \Theta^{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $T + \lambda + x \otimes f \in \Theta^{\mathcal{A}}$. 现在由引理 3.3.2, 有 $\Psi(T) = T$. 从而对每个 $T \in \mathcal{A}$, 都有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$ 成立.

现在假定情形 2 成立. 令 $\iota : Y \to Y^{**}$ 和 $\kappa : X \to X^{**}$ 是自然嵌入. 由 $\langle Af, Cx\rangle = \tau(\langle x, f\rangle)$ 和方程 $\langle Wx, f\rangle = \overline{\langle x, W^*f\rangle}$, 其中 $\tau(\lambda) \equiv \lambda$ 或 $\tau(\lambda) \equiv \overline{\lambda}$ 且 W 是共轭线性算子, 我们有 $C^*\iota A = I_{X^*}$, $A^*C = \kappa$. 因此 $\iota(Y) = Y^{**}$, $\kappa(X) = X^{**}$, 即 X 和 Y 自反.

令 $\Psi(T) = A^*\Phi(T)^*(A^*)^{-1}$, 则 $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是保单位元的线性双射. 显然 $T \in \Theta^{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $\Psi(T) \in (\Theta^{\mathcal{A}})'$, 其中 $(\Theta^{\mathcal{A}})'$ 是 $\Theta^{\mathcal{A}}$ 的对偶. 由断言 3, 对每个秩一算子 $x \otimes f \in \mathcal{A}$, $\Psi(x \otimes f) = x \otimes f$. 这样对每个 $R \in \mathbb{C}I + \mathcal{F}_1(X)$, 我们有 $T + R \in \Theta^{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $\Psi(T) + R \in (\Theta^{\mathcal{A}})'$. 由引理 3.3.2, $\Psi(T) = T$. 从而对每个算子 T, 有 $\Phi(T) = AT^*A^{-1}$ 成立.

如果存在 $S \in \mathcal{A}$ 使得 $S \in \Theta^{\mathcal{A}}$ 但 $S^* \notin \Theta^{\mathcal{A}_*}$, 其中 $\mathcal{A}_* = \{T^* \mid T \in \mathcal{A}\}$, 因为 $\Phi(S) = AS^*A^{-1} \notin \Theta^{\mathcal{B}}$, 因此当 $\Theta^{\mathcal{A}}$ 取集合 $\mathcal{S}_l^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{S}_r^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{Z}_l^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{Z}_r^{\mathcal{R}}$, $\mathcal{T}\mathcal{Z}_l^{\mathcal{R}}$ 或 $\mathcal{T}\mathcal{Z}_r^{\mathcal{R}}$ 时, Φ 不可能有形式 $\Phi(\cdot) = A(\cdot)^*A^{-1}$. 证毕.

在定理 3.3.3 中, 对于 $\Theta^{\mathcal{R}}$ 的任一选择, Φ 都有可能取到下列四种形式: 同构, 反同构, 共轭同构和共轭反同构. 例如取 X 和 Y 自反但不可分, $\mathcal{A} = \mathbb{C}I + \mathcal{K}(X)$, 其中 $\mathcal{K}(X)$ 是紧算子理想. 也注意到在定理 3.3.3 中, 如果 Φ 是线性的, 那么 Φ 是同构或反同

构.

现在利用定理 3.3.3, 我们讨论标准算子代数上有关算子值域或零空间性质的一些可加保持问题. 有些结论甚至对于线性的情形都是新的. 设 $T\in\mathcal{B}(X)$, 如果 T 是单射且具有稠值域, 称 T 是拟仿射的.

定理 3.3.4 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是无限维复 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是保单位元的可加满射, 则下列性质等价.

(1) Φ 双边保算子的可逆性.

(2) Φ 双边保算子的半可逆性.

(3) Φ 双边保零因子.

(4) Φ 双边保半零因子.

(5) Φ 双边保拓扑零因子.

(6) Φ 双边保半拓扑零因子.

(7) Φ 双边保算子的拟仿射性.

(8) Φ 双边保极大半理想.

(9) 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A:X\to Y$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$; 或者存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A:X^*\to Y$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$; 后一种情形出现只有当 X 和 Y 自反.

证明 显然 (9) 蕴涵条件 (1)—(8).

取 $\Theta^{\mathcal{R}}=\mathcal{S}^{\mathcal{R}}, \mathcal{S}_l^{\mathcal{R}}\cap\mathcal{S}_r^{\mathcal{R}}, \mathcal{Z}^{\mathcal{R}}, \mathcal{Z}_l^{\mathcal{R}}\cup\mathcal{Z}_r^{\mathcal{R}}, \mathcal{TZ}^{\mathcal{R}}$ 或 $\mathcal{TZ}_l^{\mathcal{R}}\cup\mathcal{TZ}_r^{\mathcal{R}}$, 其中 $\mathcal{R}=\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{B}$. 由定理 3.3.3 知, (1)—(6) 中的任何一个都蕴涵 (9) 成立. 至于 (7)⇒(9), 因为 $\mathcal{F}(X)\subseteq\mathcal{A}$, 因此 T $(\in\mathcal{A})$ 作为 $\mathcal{B}(X)$ 中的算子是拟仿射的当且仅当 T 既不是 $\mathcal{A}$ 的左零因子也不是右零因子, 这样 (4)⇔(7). 因为一个元可逆当且仅当它既不属于任何极大左理想也不属于任何极大右理想, 因此 (1)⇔(8). 证毕.

定理 3.3.5 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是无限维复 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是保单位元的可加满射, 则下列

条件 (1)—(12) 中的任何一个都蕴涵 (14) 成立. 进而, 如果 $\mathcal{A}$ 包含左可逆但不可逆的元, 那么陈述 (1)—(13) 等价.

(1) Φ 双边保算子的左可逆性.

(2) Φ 双边保算子的右可逆性.

(3) Φ 双边保左零因子.

(4) Φ 双边保右零因子.

(5) Φ 双边保左拓扑零因子.

(6) Φ 双边保右拓扑零因子.

(7) Φ 双边保算子的单射性.

(8) Φ 双边保算子的值域稠性.

(9) Φ 双边保算子的下方有界性.

(10) Φ 双边保算子的满射性.

(11) Φ 双边保极大左理想.

(12) Φ 双边保极大右理想.

(13) 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A: X \to Y$ 使得对每个 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$.

(14) 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A: X \to Y$ 使得对每个 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$; 或者存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A: X^* \to Y$ 使得对每个 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = AT^*A^{-1}$. 在后一种情形下, X 和 Y 一定自反.

证明 由定理 3.3.3 可知, (1)—(6) 中的任何一个都蕴涵 (14) 成立. 因为一个元不具有左逆当且仅当它属于某个极大左理想, 因此 (1)⇔(11). 类似地, 有 (2)⇔(12). 又因为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是标准算子代数, 因此容易验证 (3)⇔(7), (4)⇔(8), (5)⇔(9) 及 (6)⇔(10). 所以 (1)—(12) 中的任何一个都蕴涵 (14) 成立.

现在假定 $\mathcal{A}$ 包含左可逆但不可逆的元 S, 设 R 为其左逆. 那么 S 是右零因子, 右拓扑零因子但 S^* 不是; R 右可逆, 也是左零因子, 左拓扑零因子但 R^* 不是. 这些说明 Φ 不可能取形式 $\Phi(\cdot) = A(\cdot)^*A^{-1}$. 因此条件 (1)—(12) 中的任何一个都与 (13) 等价. 证毕.

特别地，我们有下列结论.

推论 3.3.6 设 $\Phi: \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是保单位元的可加满射，其中 H 和 K 是无限维的复 Hilbert 空间，则下列陈述等价.

(1) Φ 双边保算子的左可逆性.

(2) Φ 双边保算子的右可逆性.

(3) Φ 双边保算子的单射性.

(4) Φ 双边保算子的值域稠性.

(5) Φ 双边保算子的下方有界性.

(6) Φ 双边保算子的满射性.

(7) 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A: H \to K$ 使得对每个 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$.

证明 因为 $\mathcal{B}(H)$ 中存在半可逆但不可逆的元. 例如取 H 的可分子空间 M, 令 S 是 M 上的单侧移位. 设 $T = S \oplus G$, 其中 $G \in \mathcal{B}(M^{\perp})$ 可逆. 因为 S 左可逆但不可逆，从而 T 左可逆但不可逆. 现在由定理 3.3.5 知本推论成立. 证毕.

推论 3.3.7 设 $\Phi: \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 是保单位元的可加满射，其中 X 和 Y 是无限维的复 Banach 空间，则下列陈述等价.

(1) Φ 双边保算子的单射性.

(2) Φ 双边保算子的值域稠性.

(3) 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A: X \to Y$ 使得对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$.

证明 由定理 3.3.5 知，存在可逆算子 A 使得 $\Phi(\cdot) = A(\cdot)A^{-1}$ 或 $\Phi(\cdot) = A(\cdot)^*A^{-1}$, 现在由推论 3.2.7 立得反同构不出现. 证毕.

对任意的 S, T, 如果 $TS = 0$ 当且仅当 $\Phi(T)\Phi(S) = 0$, 称映射 Φ 双边保零积.

定理 3.3.8 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是无限维复 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数且 $\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是可加满射，则 Φ 双边保零积当且仅当存在非零复数 c 和可逆有界线性或共轭线性算子 $A: X \to Y$ 使得对每个 $T \in \mathcal{A}$, $\Phi(T) = cATA^{-1}$.

证明 只需证必要性. 显然 Φ 既双边保左零因子也双边保右零因子. 由定理 3.3.3 证明中的断言 1 和断言 2 知, Φ 是单射且双边保秩一性, 所以存在 τ- 拟线性双射 A 和 C 使得要么定理 3.3.3 证明中的情形 (i) 成立; 要么情形 (ii) 成立. 下证情形 (ii) 不出现. 相反地, 假定 (ii) 发生, 即对每个秩一算子 $x\otimes f\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cx$. 选择 $u\in X$ 和 $f\in X^*$ 使得 $\langle u,f\rangle=0$. 因为 A 和 C 是满射, 因此存在 $x\in X$ 和 $h\in X^*$ 使得 $\langle Ah,Cx\rangle\neq 0$. 然而 $(x\otimes f)(u\otimes h)=0$ 表明 $0=\Phi(x\otimes f)\Phi(u\otimes h)=\langle Ah,Cx\rangle Af\otimes Cu\neq 0$, 矛盾. 所以 Φ 具有情形 (i) 的形式, 即对每个秩一算子 $x\otimes f\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$.

其次, 我们证明存在非零复数 c 使得 $\Phi(I)=cI$.

对任意的 $x\otimes f\in\mathcal{A}$, 如果 $\langle x,f\rangle=\alpha\neq 0$, 因为

$$(I-\alpha^{-1}x\otimes f)(x\otimes f)=(x\otimes f)(I-\alpha^{-1}x\otimes f)=0,$$

且 Φ 保零积, 因此

$$\begin{aligned}&(\Phi(I)-\tau(\alpha)^{-1}Ax\otimes Cf)(Ax\otimes Cf)\\&=(Ax\otimes Cf)(\Phi(I)-\tau(\alpha)^{-1}Ax\otimes Cf)\\&=0,\end{aligned}$$

所以 $\Phi(I)(Ax\otimes Cf)=(Ax\otimes Cf)\Phi(I)$; 如果 $\langle x,f\rangle=0$, 取向量 $u\in X$ 使得 $\langle u,f\rangle\neq 0$, 那么由上面的证明知,

$$\Phi(I)((Ax+Au)\otimes Cf))=((Ax+Au)\otimes Cf)\Phi(I),$$

$$\Phi(I)(Au\otimes Cf)=(Au\otimes Cf)\Phi(I).$$

故在这种情形下, 仍有 $\Phi(I)(Ax\otimes Cf)=(Ax\otimes Cf)\Phi(I)$. 所以对任意的 $x\otimes f\in\mathcal{A}$, 我们都有 $\Phi(I)(Ax\otimes Cf)=(Ax\otimes Cf)\Phi(I)$. 因为 A 和 C 是满射, 因此 $\Phi(I)$ 与每个秩一算子交换, 从而是恒等算子的倍数, 即存在复数 c 使得 $\Phi(I)=cI$. 现在 Φ 的单射性表明 $c\neq 0$. 所以 $c^{-1}\Phi$ 保单位元且是双边保零因子的可加满射, 现在由定理 3.3.4 知, 结论成立. 证毕.

§3.4 注　记

本章主要取材于 Cui 和 Hou [59], [61—62] 和 [111]. 历史上, Jafarian 和 Sourour [124] 于 1986 年给出 $\mathcal{B}(X)$ 上保谱线性满射的刻画. 注意到保谱线性映射保单位元且双边保算子的可逆性, 对此类线性满射的刻画, Šemrl [191] 找到对实空间情形也适用的较简短的证明. 1996 年 Sourour [193] 得到 $\mathcal{B}(X)$ 上保单位元且保可逆性线性满射的刻画, 但证明繁复, 后来被 Brašer 和 Šemrl [31] 所简化. 然而此简单证明并不适用于本章讨论的其他各种情形, 也不适用于实空间情形. 有关这方面的讨论, 读者还可参考文献 [11], [32], [44], [89] 等. 本章内容也与著名的 Kaplansky 问题有关, 我们将在第四章进一步讨论.

定理 3.1.6 中 (3) 和 (5) 的等价性推广了文献 [185] 中的主要结论之一, 在那里作者假定映射是双边保持的并且 X 是 Hilbert 空间. 推论 3.1.7 中 (1) 和 (3) 的等价性也由 Sourour 在文献 [193] 中得到.

注意到当 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ 以及 $\Delta(\cdot) = \sigma(\cdot)$ 时, 引理 3.2.2 中 (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3) 在 [171] 中被证明; 对于情形 $\Delta(\cdot) = \sigma_p(\cdot)$, 文献 [185] 中蕴涵 (1)$\Leftrightarrow$(2).

文献 [114] 中证明了 $\mathcal{B}(H)$ 上双边保零积的可加满射是自同构或共轭自同构的非零常数倍, 其中 H 是无限维的复 Hilbert 空间; 文献 [6] 中证明了标准算子代数上双边保零积的线性双射是同构的非零常数倍. 定理 3.3.8 推广了这些结论.

$\mathcal{B}(X)$ 上保点谱和 $\mathcal{B}(H)$ 上保满谱线性满射的刻画首先被 Šemrl [185] 讨论, 其中 H 为复 Hilbert 空间, 由此分别得到 $\mathcal{B}(X)$ 上双边保单射性和 $\mathcal{B}(H)$ 上双边保值域满性的保单位线性满射的刻画. 保谱可加满射和保点谱可加满射的刻画分别由 Omladič, Šemrl [171] 和 Wang [197] 得到. 本章的结果都相应改善和丰富了上述研究成果, 并对各种不同的保持映射用统一的方法进行处理.

考察 §3.2 中的讨论, 下面的猜测似乎是合理的, 对于 Hilbert

空间和 l^p 空间 $(1 \le p < \infty)$, 这个猜测显然正确. 但是, 对一般的 Banach 空间我们不能证明其正确性. 然而, 如果能证明在每个可分自反的无限维复 Banach 空间上, 存在左可逆但不可逆的算子, 或等价地, 每个可分自反的无限维复 Banach 空间都与其自身的一个可补子空间线性同胚, 那么下面的猜测是正确的.

猜测 3.4.1 令 X 和 Y 是无限维复Banach 空间且 $\Phi: \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 是可加满射, 则下列断言等价.

(1) Φ 保左谱.

(2) Φ 保右谱.

(3) Φ 保近似点谱.

(4) Φ 保满谱.

(5) 存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ 使得对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$.

定理 3.1.6 和推论 3.1.7 以及定理 3.3.4 和 3.3.5 讨论了 $\mathcal{B}(X)$ 中有关算子值域或零空间许多情形的单边或双边保持映射, 对于保持算子值域闭性的映射, 甚至在 Hilbert 空间的情形, 得到其刻画都很困难, 然而我们有下列猜测. 令 $\mathcal{K}(X)$ 和 $\mathcal{F}(X)$ 分别代表 $\mathcal{B}(X)$ 中紧算子理想和有限秩算子的集合.

猜测 3.4.2 设 X 和 Y 是复Banach 空间且 $\Phi: \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 是保单位元的线性满射. 如果 Φ 双边保算子的值域闭性, 那么存在满足 $\varphi(\mathcal{F}(X)) \subseteq \mathcal{F}(Y)$ 的线性映射 $\varphi: \mathcal{B}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ 并且下列之一成立:

(1) 存在 Fredholm 算子 $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ 和 $B \in \mathcal{B}(Y,X)$, 满足 $AB = I - \varphi(I)$, $BA = I + K$, 其中 K 是紧算子, 使得对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$, 都有 $\Phi(T) = ATB + \varphi(T)$;

(2) 存在 Fredholm 算子 $A \in \mathcal{B}(X^*,Y)$ 和 $B \in \mathcal{B}(Y,X^*)$, 满足 $AB = I - \varphi(I)$, $BA = I + K$, 其中 K 是紧算子, 使得对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$, 都有 $\Phi(T) = AT^*B + \varphi(T)$.

我们还可提出下面的问题:

问题 3.4.3 假定 Φ 是双射, §3.3 中诸结果中有关双边性的

假设条件是否可去掉？

最后注意到，本章总假设 X 是复 Banach 空间. 另一方面，本章涉及的许多保持问题对实空间情形也有意义，例如， $\mathcal{B}(X)$ 上保单位且保算子某种可逆性或某种与算子值域和零空间有关性质的线性映射和可加映射的刻画问题. 然而，这些问题至今没有解决，有兴趣的读者也不妨尝试一下. 特别地， Šemrl 提出的下面问题还没有得到解决.

问题 3.4.4 设 X 为实 Banach 空间， $\Phi : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X)$ 保单位的线性双射. 如果 Φ 保算子的可逆性，那么是否 Φ 一定是自同构或反自同构？

第四章　Banach 代数与 C*- 代数上的线性映射

本章在更一般的框架，即 Banach 代数，C*- 代数和 von Neumann 代数上，讨论线性保持问题. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是包含单位元 I 的复 Banach 代数. 用 $\Delta(\cdot)$ 表示谱函数 $\sigma(\cdot), \sigma_l(\cdot), \sigma_r(\cdot), \sigma_l(\cdot)\cap\sigma_r(\cdot)$, $\partial\sigma(\cdot)$ 或 $\eta\sigma(\cdot)$. 设 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性映射，对任意的 $T\in\mathcal{A}$, 如果 $\Delta(\Phi(T))\subseteq\Delta(T)$ (或 $\Delta(\Phi(T))=\Delta(T)$), 称 Φ 压缩 (或保持) 谱函数 $\Delta(\cdot)$.

本章分七节. 第一节用统一的方法刻画了包含单位元的半单复 Banach 代数间压缩上面的六个谱函数之一的线性映射, 证明了这样的线性满射保幂等性. 利用这一结论, 也给出了半单复 Banach 代数间同态或同构的刻画.

第二节讨论实秩零 C*- 代数上压缩上面的六个谱函数之一的线性映射. 主要结果是证明了从实秩零 C*- 代数到半单 Banach 代数上压缩这六个谱函数之一的线性满射是 Jordan 同态. 进而，刻画了实秩零 C*- 代数到半单 Banach 代数上保 (或左、或右、或半) 可逆性的线性映射.

第三节讨论实秩零 C*- 代数上保极大 (或左、或右、或半) 理想的线性映射. 也讨论了可数可分解因子 vN 代数上保极大左 (或右) 理想的自伴线性映射.

第四节讨论 vN 代数上保零积的线性映射. 证明了从 vN 代数到因子 Banach 代数上保零积的有界线性满射是同态的非零常数倍；如果 $\mathcal{B}$ 的中心存在极大正交投影族，也刻画了从 vN 代数 $\mathcal{A}$ 到 vN 代数 $\mathcal{B}$ 上保零积的有界线性满射的结构.

第五节首先定义了有限 vN 代数中元的迹秩概念，并给出了迹秩的一些性质. 通过这些性质可以看到，迹秩事实上是矩阵代数中矩阵秩到有限 vN 代数的合适推广. 本节主要结果是证明了

从有限 vN 代数 $\mathcal{A}$ 的线性子空间 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{A}$ 自身保单位元且完全迹秩不增 (或完全保迹秩) 的线性映射能延拓到由 $\mathcal{M}$ 生成的代数到 $\mathcal{A}$ 的完全迹秩不增 (或完全保迹秩) 的代数同态; 从而刻画了有限 vN 代数到其自身保单位元的自伴线性满射. 另外, 还给出这些结论在矩阵代数上的应用.

第六节首先刻画了 Banach 代数上谱有界的线性映射, 证明了从含单位元的复 Banach 代数到作用在 Banach 空间上标准算子代数上的谱有界线性满射保平方零元; 进而, 刻画了从复 Banach 代数到标准算子代数上的 2- 谱有界线性映射. 作为应用, 也讨论了 $\mathcal{B}(H)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 的谱有界线性映射.

第七节首先讨论 $\mathcal{B}(H)$ 的相似不变子空间, 进而刻画了 $\mathcal{B}(H)$ 上双边保相似性的有界线性满射的结构.

§4.1 Banach 代数上谱函数压缩的线性映射

本节首先讨论半单复 Banach 代数间压缩本章引言中提到的六个谱函数之一的线性映射. 设 $P \in \mathcal{A}$, 如果 $P^2 = P$, 称 P 是幂等元. 下面的引理利用谱刻画了半单复 Banach 代数中的幂等元, 由于证明较复杂, 故从略. 有兴趣的读者可参考文献 [11].

引理 4.1.1 设 $\mathcal{A}$ 是包含单位元的半单复 Banach 代数且 $P \in \mathcal{A}$, 则 P 是幂等元当且仅当 $\sigma(P) \subseteq \{0,1\}$, 并且存在正数 r 和 c, 使得当 $\|P-T\| < r$ 时, 有 $\sigma(T) \subseteq \sigma(P) + c\|P-T\|$, 其中集合 $\sigma(P) + c\|P-T\|$ 代表以 $\sigma(P)$ 中的点为中心, $c\|P-T\|$ 为半径的圆盘的并.

我们把将幂等元映成幂等元的映射称为是保幂等性的. 如果两个幂等元 P_1 和 P_2 满足 $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$, 称它们相互正交. 显然, 保幂等性的线性映射把相互正交的幂等元映成相互正交的幂等元.

下面定理是本节的主要结论之一, 也是本章第一节和第二节的基础.

定理 4.1.2 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是包含单位元 I 的半单复 Banach 代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性满射. 令 $\Delta(\cdot)$ 代表六个谱函数 $\sigma(\cdot)$, $\sigma_l(\cdot)$, $\sigma_r(\cdot)$, $\sigma_l(\cdot)\cap\sigma_r(\cdot)$, $\partial\sigma(\cdot)$ 和 $\eta\sigma(\cdot)$ 之一. 假定对每个 $T\in\mathcal{A}$, $\Delta(\Phi(T))\subseteq\Delta(T)$, 则 Φ 保幂等性且 $\Phi(I)=I$.

证明 先考虑 $\Delta(\cdot)=\partial\sigma(\cdot)$ 的情形. 我们首先证明 Φ 是连续的. 对每个 $T\in\mathcal{A}$, 由假定, $\partial\sigma(\Phi(T))\subseteq\partial\sigma(T)$, 于是 $r(\Phi(T))\leq r(T)$. 因为 Φ 是满射且 $\mathcal{B}$ 半单, 由定理 1.2.3 知 Φ 连续, 因此 $\ker\Phi$ 是 $\mathcal{A}$ 的闭线性子空间. 令 $\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\ker\Phi$ 是商映射, 则 Φ 诱导了连续线性双射 $\widehat{\Phi}:\mathcal{A}/\ker\Phi\to\mathcal{B}$, 且 $\widehat{\Phi}\circ\pi=\Phi$. 所以存在两个正常数 α 和 β, 使得对所有的 $T\in\mathcal{A}$, 有

$$\alpha\|\pi(T)\|\leq\|\widehat{\Phi}(\pi(T))\|=\|\Phi(T)\|\leq\beta\|\pi(T)\|,$$

其中 $\|\pi(T)\|=\inf\{\|T-A\|\mid A\in\ker\Phi\}$. 设 $P\in\mathcal{A}$ 是任一幂等元, 则 $\sigma(P)\subseteq\{0,1\}$, 从而 $\partial\sigma(P)\subseteq\{0,1\}$. 如果 $\Phi(P)=0$, 显然结论成立; 现在假定 $\Phi(P)\neq 0$. 由于 $\partial\sigma(\Phi(P))\subseteq\partial\sigma(P)\subseteq\{0,1\}$, 故 $\sigma(\Phi(P))\subseteq\eta\sigma(\Phi(P))\subseteq\{0,1\}$. 利用引理 4.1.1, 存在 r, $c>0$, 使得当 $\|P-T\|<r$ 时, 有 $\sigma(T)\subseteq\{0,1\}+c\|P-T\|$. 特别地, 当 $\|P-T-A\|<r$ 时, 我们有 $\sigma(T+A)\subseteq\{0,1\}+c\|P-T-A\|$. 给定 T 满足 $\|\pi(P-T)\|<r$, 则对任意充分小的 $\varepsilon>0$, 存在 $A\in\ker\Phi$ 使得 $\|P-T-A\|<\|\pi(P-T)\|+\varepsilon<r$. 所以当 $\|\pi(P-T)\|<r$ 时, 有

$$\partial\sigma(\Phi(T))\subseteq\partial\sigma(T+A)\subseteq\sigma(T+A)\subseteq\{0,1\}+c\|\pi(P-T)\|+c\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$, 则 $\partial\sigma(\Phi(T))\subseteq\{0,1\}+c\|\pi(P-T)\|$, 因此

$$\partial\sigma(\Phi(T))\subseteq\{0,1\}+\frac{c}{\alpha}\|\Phi(P)-\Phi(T)\|.$$

故当 $\|\pi(P-T)\|<r$ 时,

$$\sigma(\Phi(T))\subseteq\eta\sigma(\Phi(T))\subseteq\{0,1\}+\frac{c}{\alpha}\|\Phi(P)-\Phi(T)\|.$$

由于 $\widehat{\Phi}$ 是满射且是开映射, 于是存在正数 r_1 使得当 $\|\Phi(P)-B\|<r_1$ 时, $\sigma(B)\subseteq\{0,1\}+\frac{c}{\alpha}\|\Phi(P)-B\|$. 再次由引理 4.1.1, 我们得到 $\Phi(P)^2=\Phi(P)$, 即 Φ 保幂等性. 因为 $\partial\sigma(\Phi(I))\subseteq\{1\}$, 因此 $\sigma(\Phi(I))\subseteq\eta\sigma(\Phi(I))\subseteq\{1\}$. 又因为 $\Phi(I)^2=\Phi(I)$, 所以 $\Phi(I)=I$.

对任意的 $T\in\mathcal{A}$, 因为 $\partial\sigma(T)$ 是集合 $\sigma_l(T)\cap\sigma_r(T)$, $\sigma_l(T)$, $\sigma_r(T)$, $\sigma(T)$ 或 $\eta\sigma(T)$ 的子集, 因此如果 $\Delta(\cdot)=\sigma_l(\cdot)\cap\sigma_r(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\sigma_l(\cdot)$, $\sigma_r(\cdot)$ 或 $\eta\sigma(\cdot)$, 且如果 Φ 压缩谱函数 $\Delta(\cdot)$, 那么由上面的讨论知, Φ 保幂等性且 $\Phi(I)=I$. 证毕.

推论 4.1.3 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个包含单位元的半单复 Banach 代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性满射. 令 $\Delta(\cdot)$ 代表六个谱函数 $\sigma(\cdot)$, $\sigma_l(\cdot)$, $\sigma_r(\cdot)$, $\sigma_l(\cdot)\cap\sigma_r(\cdot)$, $\partial\sigma(\cdot)$ 和 $\eta\sigma(\cdot)$ 之一. 若对每个 $T\in\mathcal{A}$, $\Delta(\Phi(T))=\Delta(T)$, 则 Φ 保单位元且是保幂等性的双射.

证明 由定理 4.1.2, 我们只需证明 Φ 是单射. 设 $T\in\mathcal{A}$ 且 $\Phi(T)=0$. 若 $\Delta(\cdot)=\partial\sigma(\cdot)$. 对任意拟幂零元 $A\in\mathcal{A}$, 因为 $\Delta(T+A)=\Delta(\Phi(T+A))=\Delta(\Phi(A))=\Delta(A)=\{0\}$, 因此 $r(T+A)=0$. 由定理 1.2.5 知, $T\in\mathrm{rad}(\mathcal{A})$, 其中 $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ 代表 $\mathcal{A}$ 的 Jacobson 根. 由于 $\mathcal{A}$ 是半单的, 故 $T=0$, 即 Φ 是单射. 因为 $\Delta(\cdot)$ 的任一选择都包含谱边界, 因此对于其他的五种情形, Φ 也是单射. 证毕.

注 4.1.1 在定理 4.1.2 中, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是半单的以及 Φ 是满射的假定不能去掉. 例如, 对于前者, 我们可以取 $\mathcal{A}=\mathcal{B}=\mathcal{T}_n$ ($n\times n$ 上三角矩阵代数). 因为 $\mathcal{T}_n$ 中的元可逆当且仅当它的所有对角元都非零, 因此使对角元固定不变的 $\mathcal{T}_n$ 上的每个线性映射都保可逆性, 但一般来说不是保幂等的. 对于后者, 令 $\mathcal{A}=\mathcal{B}(H)$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}(H\oplus H)$ 并且 $\Phi(T)=\begin{pmatrix} T & \varphi(T)I \\ 0 & T\end{pmatrix}$, 其中 $\mathcal{B}(H)$ 代表 Hilbert 空间 H 上的所有有界线性算子组成的 Banach 代数并且 φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的线性泛函, 则 Φ 保谱, 但不一定保幂等性.

应用定理 4.1.2, 下面讨论 Banach 代数间完全谱压缩 (或完全保谱) 的线性映射. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是包含单位元的复 Banach 代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性映射. 对于每个正整数 n, 赋予代数 $\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$

合适的范数, 则 $\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$ 也是包含单位元的复 Banach 代数. 在 $\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$ 上, 我们只使用由 n 个 $\mathcal{A}$ 的笛卡尔乘积诱导的 l^2 Banach 范数所确定的算子范数. 对于 $A_{ij}\in\mathcal{A}$ $(i,j=1,\cdots,n)$, 定义 $\Phi_n((A_{ij})_{n\times n})=(\Phi(A_{ij}))_{n\times n}$, 那么 $\Phi_n:\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})\to\mathcal{B}\otimes M_n(\mathbb{C})$ 是线性映射. 如果 Φ_n 保谱 (或谱压缩), 那么称 Φ 是 n- 保谱 (或 n- 谱压缩) 的; 如果对每个正整数 n, Φ 都是 n- 保谱的 (或 n- 谱压缩的), 则称 Φ 完全保谱 (或完全谱压缩). 注意到如果 Φ 是 n- 保谱的, 那么对于 $0<k\leq n$, Φ 也是 k- 保谱的. 类似可定义 n- 保可逆性和完全保可逆性线性映射的概念.

下面的结论利用完全谱压缩线性映射刻画了半单 Banach 代数间的同态.

定理 4.1.4 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个包含单位元的半单复 Banach 代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性满射, 则下列陈述等价.

(1) Φ 是同态.

(2) Φ 完全谱压缩.

(3) Φ 是 2- 谱压缩的.

(4) Φ 保单位元且完全保可逆性.

(5) Φ 保单位元且 2- 保可逆性.

证明 显然, 任意两个 Banach 代数间的满同态都是完全谱压缩的, 因此 (1) ⇒ (2) ⇒ (3) 且 (1) ⇒ (4) ⇒ (5).

假定 (3) 成立, 即 Φ 是 2- 谱压缩的, 则 Φ 也是谱压缩的. 由定理 4.1.2 知, $\Phi(I)=I$, 故 (3) 和 (5) 等价. 所以我们只需证明 (3)⇒(1). 设 Φ 保单位元且 2- 谱压缩. 注意到如果 $\mathcal{A}$ 是半单的, 那么对每个正整数 n, $\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$ 也是半单的. 因此由定理 4.1.2 知, $\Phi_2:\mathcal{A}\otimes M_2(\mathbb{C})\to\mathcal{B}\otimes M_2(\mathbb{C})$ 保幂等性. 设 $T,S\in\mathcal{A}$ 且 S 可逆. 由于

$$\begin{pmatrix} T & S \\ S^{-1}(T-T^2) & I-S^{-1}TS \end{pmatrix}\in\mathcal{A}\otimes M_2(\mathbb{C})$$

是幂等元，于是

$$\begin{pmatrix} \Phi(T) & \Phi(S) \\ \Phi(S^{-1}(T-T^2)) & I-\Phi(S^{-1}TS) \end{pmatrix}^2$$
$$= \begin{pmatrix} \Phi(T) & \Phi(S) \\ \Phi(S^{-1}(T-T^2)) & I-\Phi(S^{-1}TS) \end{pmatrix},$$

所以

$$\Phi(T)^2+\Phi(S)\Phi(S^{-1}(T-T^2))=\Phi(T), \tag{4.1.1}$$

$$\Phi(T)\Phi(S)+\Phi(S)(I-\Phi(S^{-1}TS))=\Phi(S). \tag{4.1.2}$$

在 (4.1.1) 式中取 $S=I$, 则对任意的 $T\in\mathcal{A}$, $\Phi(T^2)=\Phi(T)^2$, 即 Φ 是 Jordan 同态. 从而对任意的 $R,T\in\mathcal{A}$, 有

$$\Phi(RTR)=\Phi(R)\Phi(T)\Phi(R). \tag{4.1.3}$$

对任意的可逆元 $S\in\mathcal{A}$, (4.1.2) 式蕴涵

$$\Phi(S^{-1}TS)=\Phi(S)^{-1}\Phi(T)\Phi(S). \tag{4.1.4}$$

这样由 (4.1.3) 式及 (4.1.4) 式，对任意的可逆元 S 以及任意的 T, 都有

$$\Phi(S^2T)=\Phi(S(STS)S^{-1})=\Phi(S)\Phi(STS)\Phi(S)^{-1}=\Phi(S)^2\Phi(T). \tag{4.1.5}$$

任取非零复数 $\lambda\in\mathbb{C}$ 使得 $\lambda-S$ 可逆. 用 $\lambda-S$ 代替 (4.1.5) 式中的 S, 则对 $\mathcal{A}$ 中的任意 T 及可逆元 S, 都有 $\Phi(ST)=\Phi(S)\Phi(T)$. 如果 S 不可逆，取 $\lambda\in\mathbb{C}$ 使得 $\lambda-S$ 可逆，那么 $\Phi((\lambda-S)T)=(\lambda-\Phi(S))\Phi(T)$, 从而仍有 $\Phi(ST)=\Phi(S)\Phi(T)$. 所以 Φ 是同态. 证毕.

推论 4.1.5 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个包含单位元的半单复 Banach 代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性满射，则下列陈述等价.

(1) 存在同态 $\Psi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 以及可逆元 $D\in\mathcal{B}$ 使得 $\Phi=L_D\circ\Psi$, 其中 L_D 代表左乘 D 的映射.

(2) Φ 完全保可逆性.

(3) Φ 是 2- 保可逆性的.

证明 令 $B=\Phi(I)^{-1}$ 且 $\Psi=L_B\circ\Phi$, 则 $\Psi(I)=I$. 容易验证 $\Psi_n=L_{B^{(n)}}\circ\Phi_n$, 其中 $B^{(n)}$ 代表对角元为 B 的 n 阶对角算子矩阵. 所以 Φ_n 保可逆性当且仅当 Ψ_n 谱压缩. 现在由定理 4.1.4, 结论立得. 证毕.

从定理 4.1.4 及其证明, 我们可得半单复 Banach 代数间同构的如下刻画, 证明略.

定理 4.1.6 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个包含单位元的半单复 Banach 代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性映射, 则下列陈述等价.

(1) Φ 是同构.

(2) Φ 是满射且完全保谱.

(3) Φ 是满射且 2- 保谱.

(4) Φ 是双射且完全谱压缩.

(5) Φ 是双射且 2- 谱压缩.

推论 4.1.7 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个包含单位元的半单复 Banach 代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性映射, 则下列陈述等价.

(1) 存在同构 $\Psi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 以及可逆元 $D\in\mathcal{B}$ 使得 $\Phi=L_D\circ\Psi$.

(2) Φ 是满射且双边完全保可逆性.

(3) Φ 是满射且双边 2- 保可逆性.

(4) Φ 是双射且完全保可逆性.

(5) Φ 是双射且 2- 保可逆性.

注 4.1.2 如果去掉 Φ 的满射性假定, 本节的结论 4.1.4—4.1.7 将不成立. 例如, 设 H 是希尔伯特空间, $\mathcal{A}=\mathcal{B}(H)$ 并且 $\mathcal{B}=\mathcal{B}(H\oplus H)$. 假设 $C\in\mathcal{B}(H)$ 且 $\phi\in\mathcal{B}(H)^*$ 是非零线性泛函满足 $\phi(I)=0$. 对每个 $A\in\mathcal{A}$, 定义 $\Phi(A)=\begin{pmatrix}A & \phi(A)C\\ 0 & A\end{pmatrix}$, 则

$\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 保单位元且双边保可逆性. 但一般说来，Φ 不是 Jordan 同态.

§4.2　C*- 代数上保可逆性的线性映射

注意到，由命题 1.3.1 知，每个 C*- 代数都是半单的. 作为 §4.1 中结论的应用，本节首先给出实秩零 C*- 代数上压缩六种谱函数之一线性映射的刻画；进而给出实秩零 C*- 代数上保可逆性、保半可逆性、保左可逆性或保右可逆性线性映射的刻画.

定理 4.2.1　设 $\mathcal{A}$ 是包含单位元的实秩零 C*- 代数，$\mathcal{B}$ 是包含单位元的半单复 Banach 代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性满射. 令 $\Delta(\cdot)$ 代表六个谱函数 $\sigma(\cdot)$, $\sigma_l(\cdot)$, $\sigma_r(\cdot)$, $\sigma_l(\cdot)\cap\sigma_r(\cdot)$, $\partial\sigma(\cdot)$ 和 $\eta\sigma(\cdot)$ 之一. 如果对每个 $T\in\mathcal{A}$, $\Delta(\Phi(T))\subseteq\Delta(T)$, 则 Φ 是 Jordan 同态. 进而，如果 $\mathcal{B}$ 是素的，那么 Φ 要么是同态要么是反同态.

证明　取自伴元 $A\in\mathcal{A}$ 使得 A 是正交自伴幂等元的实线性组合，即 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}t_iP_i$, 其中 $t_i\in\mathbb{R}$, $P_i^2=P_i=P_i^*$ 并且如果 $i\neq j$, $P_iP_j=0$. 由定理 4.1.2 的证明知，Φ 连续且把相互正交的自伴幂等元映成相互正交的幂等元，因此 $\Phi(A^2)=\Phi(A)^2$. 由于 $\mathcal{A}$ 是实秩零 C*- 代数，由定理 1.3.2, $\mathcal{A}$ 中正交自伴幂等元的有限实线性组合的集合在 $\mathcal{A}$ 的自伴元集合中是稠密的，故对所有的自伴元 A, 有 $\Phi(A^2)=\Phi(A)^2$. 用 $C+D$ 代替 A, 其中 C 和 D 自伴，我们有 $\Phi(CD+DC)=\Phi(C)\Phi(D)+\Phi(D)\Phi(C)$. 对任意的 $T\in\mathcal{A}$, 记 $T=T_1+iT_2$, 其中 T_1,T_2 分别是 T 的实部与虚部，那么由 T_1 和 T_2 的自伴性，我们有

$$\begin{aligned}\Phi(T^2)&=\Phi(T_1^2-T_2^2+i(T_1T_2+T_2T_1))\\&=\Phi(T_1)^2-\Phi(T_2)^2+i(\Phi(T_1)\Phi(T_2)+\Phi(T_2)\Phi(T_1))\\&=\Phi(T)^2,\end{aligned}$$

即 Φ 是 Jordan 同态.

如果 $\mathcal{B}$ 是素环，由定理 1.2.6 知，从环 $\mathcal{A}$ 到素环 $\mathcal{B}$ 的每个满

的 Jordan 同态要么是同态要么是反同态，故定理中的最后一个断言成立．证毕．

称左可逆或右可逆的元是半可逆的．如果一个映射把半可逆元映成半可逆元，称它保半可逆性．下面讨论实秩零 C^*- 代数上保 (或左，或右，或半) 可逆性的线性映射．

定理 4.2.2 设 $\mathcal{A}$ 是包含单位元 I 的实秩零 C^*- 代数，$\mathcal{B}$ 是包含单位元的半单复 Banach 代数．令 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性满射．如果 Φ 满足下列性质之一：

(1) Φ 保可逆性，

(2) Φ 保左可逆性且 $\Phi(I)$ 可逆，

(3) Φ 保右可逆性且 $\Phi(I)$ 可逆，

(4) Φ 保半可逆性且 $\Phi(I)$ 可逆，

则存在 Jordan 同态 Ψ 使得 $\Phi=L_{\Phi(I)}\circ\Psi$.

证明 令 $\Psi=L_{\Phi(I)^{-1}}\circ\Phi$ 且 $\Delta(\cdot)$ 代表谱函数 $\sigma(\cdot)$, $\sigma_l(\cdot)$, $\sigma_r(\cdot)$ 和 $\sigma_l(\cdot)\cap\sigma_r(\cdot)$ 之一．如果 Φ 满足定理中的四个性质之一，那么 Ψ 也满足相应的性质．因为 $\Psi(I)=I$, 故对每个 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\Delta(\Psi(T))\subseteq\Delta(T)$. 现在由定理 4.2.1 知 Ψ 是 Jordan 同态．证毕．

下一个结论给出了从实秩零 C^*- 代数到包含非平凡左可逆元的素半单 Banach 代数上同构的刻画．

推论 4.2.3 设 $\mathcal{A}$ 是包含单位元的实秩零 C^*- 代数，$\mathcal{B}$ 是包含单位元的素半单复 Banach 代数．令 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性映射．如果 $\mathcal{B}$ 包含一个左可逆但不可逆的元，那么下列性质等价．

(1) Φ 是左 (或右) 谱压缩的双射．

(2) Φ 保单位元且是保左 (或右) 可逆性的双射．

(3) Φ 是保左 (或右) 谱的满射．

(4) Φ 是同构．

证明 显然，我们只需证明 (1)⇒(4), (2)⇒(4) 及 (3)⇒(4). 对于 (2)⇒(4), 设 Φ 保单位元且是保左可逆性的双射，则 Φ 左谱压缩．由于 $\mathcal{B}$ 是素的，于是由定理 4.2.1 知，Φ 是同构或反同构．令 $A\in\mathcal{A}$ 左可逆但不可逆且 $B\in\mathcal{A}$ 是 A 的左逆，则 $\Phi(A)$ 左可

逆. 如果 Φ 是反同构, 那么 $I=\Phi(BA)=\Phi(A)\Phi(B)$, 因此 $\Phi(A)$ 右可逆. 故 $\Phi(A)$ 可逆且 $I=\Phi(B)\Phi(A)=\Phi(AB)$. 因为 Φ 是单射且 $\Phi(I)=I$, 所以 $AB=I$, 从而 A 可逆, 矛盾. 如果 Φ 保右可逆性, 相似地, 可证明 Φ 是同构. (1) $\Rightarrow$(4) 和 (3)$\Rightarrow$(4) 的证明是类似的. 证毕.

设 X 和 Y 是 Banach 空间, $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}(X)$ 和 $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{B}(Y)$ 是两个 Banach 子代数且 $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是同构. 如果存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 使得对任意的 $T\in\mathcal{A}$, 有 $\phi(T)=ATA^{-1}$, 称 ϕ 是空间同构. 对于从 $\mathcal{B}(H)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 上的压缩 $\Delta(\cdot)$ 的线性映射, 我们有更加具体的刻画.

推论 4.2.4 令 H 和 K 复 Hilbert 空间且 $\Delta(\cdot)$ 代表谱函数 $\sigma(\cdot)$, $\sigma_l(\cdot)\cap\sigma_r(\cdot)$, $\partial\sigma(\cdot)$ 或 $\eta\sigma(\cdot)$. 设 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$ 是线性映射, 则下列性质等价.

(1) Φ 是压缩 $\Delta(\cdot)$ 的双射.

(2) Φ 是保 $\Delta(\cdot)$ 的满射.

(3) Φ 保单位元且是保可逆 (或半可逆) 性的双射.

(4) Φ 是 Jordan 同构.

(5) Φ 是同构或反同构.

(6) 存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(H,K)$ 使得对每个 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$; 或者对每个 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T)=AT^{tr}A^{-1}$, 其中 T^{tr} 代表 T 关于 H 的任意但预先固定的一个标准正交基的转置.

证明 由定理 4.2.1 及 4.2.2 知, (1)—(5) 等价. 由于从 $\mathcal{B}(H)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 的每个同构或反同构都是空间的, 因此存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(H,K)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$; 或者对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T)=AT^{tr}A^{-1}$, 其中 T^{tr} 代表 T 关于 H 的任意但预先固定标准正交基的转置. 故 (6) 成立. 证毕.

如果 Φ 是左 (或, 右) 谱压缩的双射, 由定理 4.2.2 及推论 4.2.3, 我们不难得到下列结论, 证明略.

推论 4.2.5 令 H 和 K 是复 Hilbert 空间且 $\Delta(\cdot)$ 代表谱函数

$\sigma_l(\cdot)$ 或 $\sigma_r(\cdot)$. 设 $\Phi: \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是线性映射，则下列性质等价.

(1) Φ 是压缩 $\Delta(\cdot)$ 的双射.

(2) Φ 是保 $\Delta(\cdot)$ 的满射.

(3) Φ 保单位元且是保左 (或，右) 可逆性的双射.

(4) Φ 是同构.

(5) 存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(H,K)$ 使得对每个 $T \in \mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$.

§4.3 C*- 代数上保理想的线性映射

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个 C*- 代数， $\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是线性映射. 如果 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{A}$ 的极大理想蕴涵 (或, 当且仅当) $\Phi(\mathcal{J})$ 是 $\mathcal{B}$ 的极大理想，称 Φ 保 (或，双边保) 极大理想. 我们把极大左理想或者极大右理想称为极大半理想. 如果一个映射把极大半理想映成极大半理想，称它保极大半理想；如果它把极大左 (或，右) 理想映成极大左 (或，右) 理想，称它保极大左 (或，右) 理想. 本节讨论实秩零 C*- 代数上单边或双边保极大 (或左，或右，或半) 理想的线性映射.

定理 4.3.1 设 $\mathcal{B}$ 是包含单位元的半单复 Banach 代数， $\mathcal{A}$ 是包含单位元 I 的实秩零 C*- 代数且 $\Phi: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 是线性双射. 若 Φ 满足下列性质之一:

(1) Φ 保极大左理想并且 $\Phi^{-1}(I)$ 可逆,

(2) Φ 保极大右理想并且 $\Phi^{-1}(I)$ 可逆,

(3) Φ 保极大半理想,

则存在 Jordan 同构 Ψ 及可逆元 D 使得 $\Phi = \Psi \circ L_D$.

证明 因为每个极大左 (或, 右) 理想都是真左 (或, 右) 理想，所以一个元不左 (或，右) 可逆当且仅当它属于某个极大左 (或，右) 理想并且一个元不可逆当且仅当它属于某个极大半理想. 由于 Φ 是双射，故如果 Φ 满足定理中的三个性质之一，那么相应地

Φ^{-1} 保左可逆性，右可逆性或可逆性之一. 由定理 4.2.2 知，存在 Jordan 同构 Ψ 使得 $\Phi^{-1} = L_{\Phi^{-1}(I)} \circ \Psi^{-1}$, 从而 $\Phi = \Psi \circ L_D$, 其中 $D = \Phi^{-1}(I)^{-1}$ 可逆. 证毕.

定理 4.3.2 设 $\mathcal{A}$ 是包含单位元 I 的实秩零 C*- 代数且 $\mathcal{B}$ 是包含单位元的半单复 Banach 代数. 假定 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是线性满射且 $\Phi(I)$ 可逆. 如果 Φ 满足下列性质之一:

(1) Φ 双边保极大左理想,

(2) Φ 双边保极大右理想,

则存在 Jordan 同构 Ψ 使得 $\Phi = L_{\Phi(I)} \circ \Psi$.

证明 由定理 4.3.1 的证明知，Φ 双边保极大左 (或，右) 理想当且仅当 Φ 双边保左 (或，右) 可逆性，因此如果 (1) 成立，那么 Φ 是双边保左可逆性的线性满射. 由定理 4.2.2 知, 存在 Jordan 同态 Ψ 使得 $\Phi = L_{\Phi(I)} \circ \Psi$. 所以 $\Psi(I) = I$ 且 Ψ 双边保左可逆性，从而 Ψ 保左谱. 由推论 4.1.3 知，Ψ 是单射. 如果 (2) 成立，类似可证定理的结论成立. 证毕.

设 $\mathcal{R}$ 是作用在 Hilbert 空间 H 上的 vN 代数且 Φ 是 $\mathcal{R}$ 的自同构, 如果 Φ 保 * 运算, 即对任意的 $T \in \mathcal{R}$, 都有 $\Phi(T^*) = \Phi(T)^*$, 称 Φ 是自伴的; 如果 Φ 自伴且是代数自同构, 称 Φ 是 *- 自同构. 令 $\mathcal{R}' = \{A \in \mathcal{B}(H) \mid \text{对任意的 } B \in \mathcal{R}, \text{有 } AB = BA\}$, 称 $\mathcal{R}'$ 是 $\mathcal{R}$ 的换位.

下面讨论可数可分解因子 vN 代数上保极大左 (或，右) 理想的自伴线性映射.

定理 4.3.3 设 $\mathcal{A}$ 是作用在 Hilbert 空间 H 上的可数可分解因子 vN 代数，令 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是保单位元的自伴线性双射. 则 Φ 保极大左 (或，右) 理想当且仅当 Φ 是 *- 自同构. 进而，如果 $\mathcal{A}$ 有限，或 III 型，或半有限但 $\mathcal{A}'$ ($\mathcal{A}$ 的换位) 真无限，那么存在酉算子 $U \in \mathcal{B}(H)$ 使得对所有的 $A \in \mathcal{A}$ 都有 $\Phi(A) = UAU^*$.

证明 由定理 4.3.2, Φ 是 Jordan*- 同构. 由 [195; 定理 3.3] 知，存在正交中心投影 $E, F \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 满足 $E + F = I$ 使得 $\Phi_1(\cdot) = \Phi(\cdot)E$ 是 *- 同构，$\Phi_2(\cdot) = \Phi(\cdot)F$ 是 *- 反同构，且有 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

因为 $\mathcal{A}$ 是因子，故 $\Phi=\Phi_1$ 是 *- 自同构或 $\Phi=\Phi_2$ 是 *- 反自同构. 下证反自同构的情形不可能发生.

反之，假定 Φ 是 *- 反自同构且 Φ 保极大左理想. 令 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{A}$ 的任一极大左理想，那么 $\Phi(\mathcal{J})$ 也是极大左理想. 任取 $D\in\mathcal{J}$ 及 $A\in\mathcal{A}$, 则 $\Phi(D)\Phi(A)=\Phi(AD)\in\Phi(\mathcal{J})$, 由 Φ 的满射性知 $\Phi(\mathcal{J})$ 也是右理想. 这样对每个极大左理想 $\mathcal{J}$, $\Phi(\mathcal{J})$ 都是极大双边理想. 如果 $\mathcal{A}$ 是有限因子或是 III 型因子，由于 $\mathcal{A}$ 是可数可分解的，因此由定理 1.3.5 和 1.3.6 知， $\mathcal{A}$ 是简单的，即没有任何非平凡闭理想，现在 Φ 的单射性表明这是不可能的，所以这种情形不发生；如果 $\mathcal{A}$ 是 I_∞ 型或 II_∞ 型可数可分解因子，那么定理 1.3.7 告诉我们， $\mathcal{A}$ 有惟一的范数闭真双边理想，即具有有限值域投影的算子理想的范数闭包 $\mathcal{K}$ 是惟一的真闭双边理想，于是对 $\mathcal{A}$ 的每个极大左理想 $\mathcal{J}$, 都有 $\Phi(\mathcal{J})=\mathcal{K}$. 由 Φ 的单射性， $\mathcal{J}$ 也是 $\mathcal{A}$ 惟一的左理想，因此 $\mathcal{J}=\mathcal{K}$. 然而很容易找到一个左理想，含有不属于 $\mathcal{K}$ 的元 (例如，可用向右单侧移位算子 S 及 SS^* 来构造例子), 矛盾. 如果 Φ 保极大右理想，类似可证明反自同构不出现.

至于定理的第二个断言，由命题 1.3.8, 有限或 III 型或半有限但其换位真无限的因子 vN 代数的 *- 自同构是空间的，因此存在酉算子 $U\in\mathcal{B}(H)$ 使得对每个 $A\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(A)=UAU^*$. 证毕.

推论 4.3.4 设 $\mathcal{A}$ 是作用在 Hilbert 空间 H 上可数可分解的因子 von Neumann 代数， $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是自伴线性满射且 $\Phi(I)$ 可逆. 如果 Φ 双边保极大左 (或右) 理想，那么存在 *- 自同构 Ψ 使得 $\Phi=L_{\Phi(I)}\circ\Psi$. 进而，如果 $\mathcal{A}$ 有限，或 III 型，或半有限但 $\mathcal{A}'$ ($\mathcal{A}$ 的换位) 真无限，那么存在酉算子 $U\in\mathcal{B}(H)$ 使得对任意的 $A\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(A)=\Phi(I)UAU^*$.

为刻画从半单交换 Banach 代数到 Banach 代数上保理想的线性双射，我们需要下面的引理，由于证明较繁，故不在这儿重述，有兴趣的读者可参见文献 [134].

引理 4.3.5 设 $\mathcal{A}$ 是包含单位元的 Banach 代数， $\mathcal{B}$ 是包含单位元的半单交换 Banach 代数. 令 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是保单位元的线

性映射. 如果 Φ 保可逆性, 那么 Φ 是同态.

定理 4.3.6 设 $\mathcal{A}$ 是包含单位元的半单交换 Banach 代数, $\mathcal{B}$ 是包含单位元的 Banach 代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性双射. 如果 Φ 把极大理想映成极大半理想, 那么存在同构 Ψ 使得 $\Phi=L_E\circ\Psi$, 其中 $E\in\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ 的中心) 可逆.

证明 因为 $\mathcal{A}$ 半单且交换, 因此极大半理想的集合与极大理想的集合一致. 由于 Φ 是双射, 所以 Φ 把极大理想映成极大半理想当且仅当 Φ^{-1} 保可逆性. 令 $\varphi=L_D\circ\Phi^{-1}$, 其中 $D=\Phi^{-1}(I)^{-1}$, 那么 $\varphi(I)=I$ 且 $\varphi:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ 保可逆性. 利用引理 4.3.5, φ 是同构, 从而 φ^{-1} 是同构且对每个 $A\in\mathcal{A}$, $\Phi(A)=\varphi^{-1}(D)\varphi^{-1}(A)=\varphi^{-1}(DA)=\varphi^{-1}(AD)=\varphi^{-1}(A)\varphi^{-1}(D)$, 于是 $\varphi^{-1}(D)$ 与 $\mathcal{B}$ 中的每个元交换, 即 $\varphi^{-1}(D)\in\mathcal{Z}(\mathcal{B})$. 令 $E=\varphi^{-1}(D)$ 且 $\Psi=\varphi^{-1}$, 则 $\Phi=L_E\circ\Psi$. 证毕.

§4.4 von Neumann 代数上保零积的线性映射

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是代数, 映射 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 称为保零积 (或, 双边保零积) 的, 如果对于 $A,B\in\mathcal{A}$, $AB=0\Rightarrow\Phi(A)\Phi(B)=0$ (或, $AB=0\Leftrightarrow\Phi(A)\Phi(B)=0$).

设 $\mathcal{B}$ 是包含单位元的 Banach 代数, $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 代表 $\mathcal{B}$ 的中心并且 I 代表 $\mathcal{B}$ 的单位元. 如果 $\mathcal{Z}(\mathcal{B})=\mathbb{C}I$, 即 $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 是由单位元的倍数组成, 称 $\mathcal{B}$ 是因子.

定理 4.4.1 设 $\mathcal{A}$ 是 von Neumann 代数, $\mathcal{B}$ 是包含单位元的因子 Banach 代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是有界线性满射, 则下列性质等价.

(1) Φ 保零积.

(2) Φ 是同态的非零常数倍.

证明 显然, 我们只需证明 (1)$\Rightarrow$ (2). 假定 (1) 成立. 首先证明存在非零数 $\lambda\in\mathbb{C}$ 使得 $\Phi(I)=\lambda I$.

令 $Q\in\mathcal{A}$ 是任意幂等元, 则 $Q(I-Q)=0$. 由假定, 有

$\Phi(Q)\Phi(I-Q)=0$, 所以

$$\Phi(Q)\Phi(I)=\Phi(I)\Phi(Q)=\Phi(Q)^2. \tag{4.4.1}$$

因为 von Neumann 代数中所有投影实线性组合的集合在自伴元集合中按照范数拓扑是稠密的, 又 Φ 有界, 因此对所有的 $S\in\mathcal{A}$, 都有 $\Phi(S)\Phi(I)=\Phi(I)\Phi(S)$. 这样由 Φ 的满射性, 我们有 $\Phi(I)\in\mathcal{Z}(\mathcal{B})$. 又由于 $\mathcal{B}$ 是因子, 故存在 $\lambda\in\mathbb{C}$ 使得 $\Phi(I)=\lambda I$.

下证 $\lambda\neq 0$. 否则有 $\Phi(I)=0$. 由 (4.4.1) 式易知, 对每个幂等元 Q, $\Phi(Q)^2=0$. 如果 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i P_i$, 其中 P_i $(i=1,\cdots,n)$ 是一族正交投影且 $\alpha_i\in\mathbb{R}$, 那么

$$\Phi(A)^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\Phi(P_i)^2=0.$$

因为 Φ 有界, 因此对每个自伴元 $A\in\mathcal{A}$, 都有 $\Phi(A)^2=0$. 现在对 $\mathcal{A}$ 中的任意两个自伴元 A 和 B, 有 $0=\Phi(A+B)^2=\Phi(A)\Phi(B)+\Phi(B)\Phi(A)$. 令 $T=T_1+iT_2$ 是 $\mathcal{A}$ 中的任意一个元, 其中 T_1,T_2 分别是 T 的实部和虚部. 由 T_1 和 T_2 的自伴性, 我们有 $\Phi(T)^2=0$. 故 Φ 的像由平方为零的元组成, 与这 Φ 的满射性矛盾. 事实上, 因为 Banach 代数 $\mathcal{B}$ 含有平方非零的元, 例如单位元 I. 因此 $\lambda\neq 0$. 不失一般性, 我们可假定 $\lambda=1$, 即 $\Phi(I)=I$.

其次证明 Φ 是 Jordan 同态. 由 (4.4.1) 式, 对任意的幂等元 Q, 有 $\Phi(Q)=\Phi(Q)^2$, 即 $\Phi(Q)$ 是幂等元, 故 Φ 保幂等性. 由于 von Neumann 代数是实秩零 C*- 代数, 故由定理 4.2.1 的证明知, Φ 是 Jordan 同态.

最后我们将证明 Φ 是同态. 令 $A, B\in\mathcal{A}$ 使得 $AB=0$, 那么 $\Phi(A)\Phi(B)=0$ 并且 $\Phi(BA)=\Phi(BA+AB)=\Phi(B)\Phi(A)+\Phi(A)\Phi(B)=\Phi(B)\Phi(A)$. 对任意幂等元 $P\in\mathcal{A}$ 及任意的 $T\in\mathcal{A}$, 因为 $TP(I-P)=0$, 因此 $\Phi(TP)=\Phi(TP)\Phi(P)$. 这样

$$\begin{aligned}\Phi(PT)-\Phi(PTP)&=\Phi(PT(I-P))=\Phi(P)\Phi(T(I-P))\\&=\Phi(P)\Phi(T)-\Phi(P)\Phi(TP)\end{aligned}$$

$$= \Phi(P)\Phi(T) - \Phi(P)\Phi(TP)\Phi(P)$$
$$= \Phi(P)\Phi(T) - \Phi(PTP),$$

并且 $\Phi(PT) = \Phi(P)\Phi(T)$. 所以对任意的 $S, T \in \mathcal{A}$, 都有 $\Phi(ST) = \Phi(S)\Phi(T)$ 成立, 即 Φ 是同态. 证毕.

推论 4.4.2 设 $\mathcal{A}$ 是 von Neumann 代数, $\mathcal{B}$ 是包含单位元的因子 Banach 代数且 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是有界线性映射, 则下列断言等价.

(1) Φ 是双边保零积的满射.

(2) Φ 是保零积的双射.

(3) Φ 是同构的非零常数倍.

证明 (3)$\Rightarrow$ (1) 显然. 对于 (1)$\Rightarrow$ (2), 我们只需证明 Φ 是单射. 设 $\Phi(T) = 0$. 对任意的 $S \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T)\Phi(S) = 0$. 因为 Φ 双边保零积, 因此 $TS = 0$, 从而 $T = 0$, 即 Φ 是单射.

(2)$\Rightarrow$ (3) 由定理 4.4.1 立得. 证毕.

设 $\mathcal{B}$ 是作用在复 Hilbert 空间 K 上的 von Neumann 代数且 $E, F \in \mathcal{B}$ 是两个投影. 如果存在部分等距 $V \in \mathcal{B}$ 使得 $E = V^*V$ 且 $F = VV^*$, 我们说 E 和 F 等价, 记为 $E \sim F$. 关系式 $E \preceq F$ 代表 E 弱等价于 F, 即 E 与 F 的一个子投影等价. 假定 $\{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 是正交投影族满足 $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda = I$. 设 $\{Q_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \subset \mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 是满足 $\sum\limits_{\alpha \in \Delta} Q_\alpha = I$ 的任意一个正交投影族. 如果对任意的 $\alpha \in \Delta$, 存在 $\lambda \in \Lambda$ 使得 $P_\lambda \preceq Q_\alpha$, 称 $\{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 中的一个极大正交投影族.

定理 4.4.3 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是分别作用在复 Hilbert 空间 H 和 K 上的 von Neumann 代数且 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是有界线性满射. 设 $\mathcal{B}$ 的中心存在极大正交投影族, 则下列断言等价.

(1) Φ 保零积.

(2) 存在同态 $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 使得 $\Phi = L_{\Phi(I)} \circ \Psi$, 其中 $\Phi(I) \in \mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 可逆.

证明 显然只需证 (1)⇒ (2). 假定 (1) 成立. 由定理 4.4.1 的证明知, $\Phi(I)=D\in\mathcal{Z}(\mathcal{B})$. 取极大正交投影族 $\{P_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}\subset\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 使得 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}P_\lambda=I$. 令 $K_\lambda=P_\lambda K$, 那么 $K=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}^{\oplus}K_\lambda$. 对任意的 $S\in\mathcal{B}$, 令 $S_\lambda=S|_{K_\lambda}$, 则 $S=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}^{\oplus}S_\lambda$. 令 $\mathcal{B}_\lambda=\{S_\lambda\mid S\in\mathcal{B}\}\subseteq\mathcal{B}(K_\lambda)$, 则对任意的 $\lambda\in\Lambda$, $\mathcal{B}_\lambda$ 是 K_λ 上的因子 vN 代数且 $\mathcal{B}=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}^{\oplus}\mathcal{B}_\lambda$. 否则, 一定存在 $\lambda_0\in\Lambda$ 使得 $\mathcal{B}_{\lambda_0}$ 不是 K_{λ_0} 上的因子 vN 代数, 那么存在 P_{λ_0} 的非零子投影 $P_{\alpha_1},P_{\alpha_2}\in\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 使得 $P_{\alpha_1}+P_{\alpha_2}=P_{\lambda_0}$. 因此 $\{P_{\alpha_1},P_{\alpha_2},P_\lambda\mid\lambda\in\Lambda$ 且 $\lambda\neq\lambda_0\}$ 是正交投影族且 $P_{\alpha_1}+P_{\alpha_2}+\sum\limits_{\lambda\in\Lambda,\lambda\neq\lambda_0}P_\lambda=I$, 这与 $\{P_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 的极大性矛盾. 所以 $D=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}^{\oplus}\alpha(\lambda)I_\lambda$, 其中对每个 $\lambda\in\Lambda$, I_λ 是 Hilbert 空间 K_λ 上的单位算子且 $\alpha(\lambda)\in\mathbb{C}$.

现在, 对每个 $\lambda\in\Lambda$ 以及任意的 $T\in\mathcal{A}$, 定义 $\Phi_\lambda(T)=\Phi(T)|_{K_\lambda}$, 那么 $\Phi_\lambda:\mathcal{A}\to\mathcal{B}_\lambda$ 是保零积的线性映射. 显然 $\Phi(\cdot)=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}^{\oplus}\Phi_\lambda(\cdot)$. 因为 Φ 是满射, 因此 Φ_λ 也是满射. 由定理 4.4.1, 我们有 $\Phi_\lambda(I)=\alpha(\lambda)I_\lambda\neq0$ 且存在同态 $\Psi_\lambda:\mathcal{A}\to\mathcal{B}_\lambda$ 使得 $\Phi_\lambda=\alpha(\lambda)\Psi_\lambda$. 令 $\Psi=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}^{\oplus}\Psi_\lambda$, 那么 $\Psi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是同态且 $\Phi=L_D\circ\Psi$. 显然正规元 D 可逆. 否则, Φ 的值域不包含任何可逆元, 与 Φ 的满射性矛盾. 证毕.

推论 4.4.4 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是分别作用在复 Hilbert 空间 H 和 K 上的 von Neumann 代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是有界线性映射, 设 $\mathcal{B}$ 的中心存在极大正交投影族, 则下列断言等价.

(1) Φ 是双边保零积的满射.

(2) Φ 是保零积的双射.

(3) 存在同构 $\Psi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 使得 $\Phi = L_{\Phi(I)} \circ \Psi$, 其中 $\Phi(I) \in \mathcal{Z}(\mathcal{B})$ 可逆.

证明 由推论 4.4.2 及定理 4.4.3 立得. 证毕.

§4.5 von Neumann 代数上保迹秩的线性映射

令 H 是 Hilbert 空间. 对于 $T \in \mathcal{B}(H)$, 集合 $\ker T$ 和 $\mathrm{rng}(T)$ 分别代表 T 的零空间和值域. 设 $\mathcal{A}$ 是作用在 H 上的 von Neumann 代数, 则对任意的正整数 n, $\mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C}) = \{(T_{ij})_{n\times n} \mid T_{ij} \in \mathcal{A}\}$ 是 $\mathcal{B}(H^{(n)})$ 的 von Neumann 子代数, 其中 $H^{(n)}$ 是 n 个 H 的直和. 保秩映射在保持问题的研究中是基本重要的. 然而在一般的 von Neumann 代数中没有有限秩的概念. 由定理 1.3.3 知, von Neumann 代数有限当且仅当存在忠实的正规中心值迹. 利用此性质, 在有限 von Neumann 代数中, 我们可以定义元的迹秩 (tr-rank) 概念.

定义 4.5.1 设 $\mathcal{A}$ 是作用在 Hilbert 空间 H 上的有限 von Neumann 代数, I 代表 $\mathcal{A}$ 的单位元. 令 ρ 是在 $\mathcal{A}$ 的中心上不变的 (惟一) 中心值迹. 对任意的 $\mathbf{T} = (T_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$, 定义 $\rho_n(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^{n} \rho(T_{ii})$, 并称 $\text{tr-rank}(\mathbf{T}) = \rho_n(P_{\mathbf{T}})$ 为 $\mathbf{T}$ 的迹秩, 其中 $\mathbf{T}$ 看作是 Hilbert 空间 $H^{(n)}$ 上的算子且 $P_{\mathbf{T}}$ 是到 $\mathbf{T}$ 的值域闭包上的投影.

因为中心值迹 ρ 是忠实的, 因此 $\text{tr-rank}(\mathbf{T}) = 0$ 蕴涵 $\mathbf{T} = 0$.

设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是两个有限 von Neumann 代数且 $\Phi: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是线性映射. 如果对每个 $T \in \mathcal{A}$, $\text{tr-rank}(\Phi(T)) \leq \text{tr-rank}(T)$ (或, $\text{tr-rank}(\Phi(T)) = \text{tr-rank}(T)$), 称 Φ 迹秩不增 (或, 保迹秩). 对每个自然数 n, 如果 $\Phi_n: \mathcal{M} \otimes M_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{N} \otimes M_n(\mathbb{C})$ 迹秩不增 (或, 保迹秩), 称 Φ 完全迹秩不增 (或, 完全保迹秩), 其中 $\Phi_n((T_{ij})_{n\times n}) = (\Phi(T_{ij}))_{n\times n}$.

在证明主要结论之前, 我们先探讨一些有关迹秩的性质. 从

下面的命题可看到迹秩是矩阵代数中矩阵秩到有限 von Neumann 代数的合适推广.

命题 4.5.1 设 $\mathcal{A}$ 是作用在 Hilbert 空间 H 上的有限 von Neumann 代数. 令 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{E},\ \mathbf{F}\in\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$, 其中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 是投影, 则下列成立.

(1) $\mathbf{E}\sim\mathbf{F}$ 当且仅当 tr-rank($\mathbf{E}$) =tr-rank($\mathbf{F}$);

(2) $\mathbf{E}\preceq\mathbf{F}$ 当且仅当 tr-rank($\mathbf{E}$) $\le$tr-rank($\mathbf{F}$);

(3) 如果 $\mathbf{EA}=\mathbf{A}$, 那么 tr-rank($\mathbf{A}$) $\le$tr-rank($\mathbf{E}$);

(4) tr-rank($\mathbf{AB}$) $\le$ min{tr-rank($\mathbf{A}$), tr-rank($\mathbf{B}$)};

(5) 如果 $\mathbf{B}$ 可逆, 那么 tr-rank($\mathbf{BA}$) =tr-rank($\mathbf{AB}$) =tr-rank($\mathbf{A}$);

(6) 如果 $\mathbf{T}=(T_{ij})_{n\times n}\in\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$ 满足对所有的 (i,j), $T_{ij}=A$, 那么

$$\text{tr-rank}(\mathbf{T})=\text{tr-rank}(A).$$

证明 (1) 由定义 4.5.1, 对 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$, 容易验证 $\rho_n(\mathbf{AB})=\rho_n(\mathbf{BA})$. 如果 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 是投影使得 $\mathbf{E}\sim\mathbf{F}$, 那么存在部分等距 $\mathbf{V}\in\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\mathbf{E}=\mathbf{V}^*\mathbf{V}$ 且 $\mathbf{F}=\mathbf{VV}^*$. 这样

$$\text{tr-rank}(\mathbf{E})=\rho_n(\mathbf{E})=\rho_n(\mathbf{V}^*\mathbf{V})=\rho_n(\mathbf{VV}^*)=\rho_n(\mathbf{F})=\text{tr-rank}(\mathbf{F}).$$

反之, 令 $\rho^{(n)}(\mathbf{T})=\frac{1}{n}\rho_n(\mathbf{T})\otimes I_n$. 则 $\rho^{(n)}$ 是 $\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$ 的忠实的且在中心上不变的中心值迹. 假定 tr-rank($\mathbf{E}$) =tr-rank($\mathbf{F}$), 则 $\rho^{(n)}(\mathbf{E})=\rho^{(n)}(\mathbf{F})$, 从而由定理 1.3.4 知, $\mathbf{E}\sim\mathbf{F}$.

(2) $\mathbf{E}\preceq\mathbf{F}$ 当且仅当存在 $\mathbf{F}$ 的子投影 $\mathbf{F}_1$ 使得 $\mathbf{E}\sim\mathbf{F}_1$. 由 ρ_n 的性质和 (1) 知, (2) 成立.

(3) 令 $\mathbf{A}=\mathbf{V}|\mathbf{A}|$ 是 $\mathbf{A}$ 的极分解. 因为 $\mathbf{EA}=\mathbf{A}$ 且 $\ker\mathbf{A}=\ker(|\mathbf{A}|)=\ker\mathbf{V}$, 因此对任意的 $x\in\ker\mathbf{A}$, 有 $(\mathbf{I}-\mathbf{E})\mathbf{V}x=0$, 即 $(\mathbf{I}-\mathbf{E})\mathbf{V}|_{\ker\mathbf{A}}=0$; 对任意的 $y\in$rng($|\mathbf{A}|$), 存在 $x\in(\ker|\mathbf{A}|)^{\perp}=(\ker\mathbf{A})^{\perp}$ 使得 $y=|\mathbf{A}|x$, 所以 $(\mathbf{I}-\mathbf{E})\mathbf{V}y=(\mathbf{I}-\mathbf{E})\mathbf{V}|\mathbf{A}|x=0$. 又因为 $(\ker\mathbf{A})^{\perp}=\overline{\text{rng}}(|\mathbf{A}|)$ (rng($|\mathbf{A}|$) 的闭包), 我们有 $(\mathbf{I}-\mathbf{E})\mathbf{V}|_{(\ker\mathbf{A})^{\perp}}=0$, 所以 $(\mathbf{I}-\mathbf{E})\mathbf{V}=0$, 也有 $(\mathbf{I}-\mathbf{E})\mathbf{VV}^*=0$. 这表明 $P_{\mathbf{A}}=\mathbf{VV}^*\le\mathbf{E}$. 由性质 (2) 知, tr-rank($\mathbf{A}$) $\le$tr-rank($\mathbf{E}$).

(4) 因为 $P_{\mathbf{A}}\mathbf{AB} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{AB} = \mathbf{AB}P_{\mathbf{B}^*}$ 且 $P_{\mathbf{B}} \sim P_{\mathbf{B}^*}$, 因此由 (1) 和 (3), (4) 立得.

(5) 如果 $\mathbf{B}$ 可逆，那么 tr-rank$(\mathbf{B}) = nI$. 应用 (4), 我们有 tr-rank$(\mathbf{AB}) \leq \min\{$tr-rank$(\mathbf{A}), nI\}$ =tr-rank$(\mathbf{A})$ 且 tr-rank$(\mathbf{A})$ =tr-rank$(\mathbf{ABB}^{-1}) \leq \min\{$tr-rank $(\mathbf{AB}), nI\}$ =tr-rank$(\mathbf{AB})$. 因此 (5) 成立.

(6) 令

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} I & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & -I & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & -I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -I & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -I & I \end{pmatrix},$$

那么 $\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{V}$ 可逆且

$$\mathbf{WTV} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}.$$

所以由 (5), 我们得到 tr-rank($\mathbf{T}$) =tr-rank($\mathbf{WTV}$) =tr-rank(A). 证毕.

现在我们来证明本节的主要结论.

定理 4.5.2 设 $\mathcal{A}$ 是有限 vN 代数且 $\mathcal{M}$ 是包含单位元 I 的 $\mathcal{A}$ 的线性子空间. 令 $\Phi:\mathcal{M}\to\mathcal{A}$ 是保单位元的线性映射. 如果 Φ 完全迹秩不增 (或, 完全保迹秩), 那么 Φ 能够延拓为由 $\mathcal{M}$ 生成的 $\mathcal{A}$ 的子代数到 $\mathcal{A}$ 的完全迹秩不增 (或, 完全保迹秩) 的代数同态.

证明 对任意的 $T_i\in\mathcal{M}$ $(i=1,\cdots,k)$, 令

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} T_1 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & T_2 & -I & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & T_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_{k-1} & -I\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & T_k \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -T_2 & -I & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -T_3T_2 & -T_3 & -I & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -T_{k-1}\cdots T_2 & -T_{k-1}\cdots T_3 & -T_{k-1}\cdots T_4 & \cdots & -I & 0\\ T_k\cdots T_2 & T_k\cdots T_3 & T_k\cdots T_4 & \cdots & T_k & I \end{pmatrix}$$

且

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I\\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 & T_1\\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & T_2T_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & T_{k-2}\cdots T_1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & T_{k-1}\cdots T_1 \end{pmatrix},$$

那么 $\mathbf{T} \in \mathcal{M} \otimes M_k(\mathbb{C})$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{A} \otimes M_k(\mathbb{C})$ 且 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 可逆. 直接计算可知,

$$\mathbf{ATB} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & T_k \cdots T_1 \end{pmatrix},$$

由命题 4.5.1 的性质 (5) 知, tr-rank($\mathbf{T}$) =tr-rank($\mathbf{ATB}$), 故

$$(k-1)I + \text{tr-rank}(T_k \cdots T_2 T_1) = \text{tr-rank}(\mathbf{T}).$$

因为 Φ 保单位元且完全 tr-rank 不增, 所以

$$\begin{aligned}(k-1)I &+ \text{tr-rank}(\Phi(T_k) \cdots \Phi(T_2)\Phi(T_1)) \\ &= \text{tr-rank}(\Phi_k(\mathbf{T})) \leq \text{tr-rank}(\mathbf{T}) \\ &= (k-1)I + \text{tr-rank}(T_k \cdots T_2 T_1),\end{aligned}$$

从而

$$\text{tr-rank}(\Phi(T_k) \cdots \Phi(T_2)\Phi(T_1)) \leq \text{tr-rank}(T_k \cdots T_2 T_1), \qquad (4.5.1)$$

即保单位元的完全迹秩不增的线性映射像的乘积的迹秩不大于原像相应乘积的迹秩.

现在对所有的 $r = 1, \cdots, m$ 以及 $s_r = 1, \cdots, k_r$, 令 $S_{rs_r} \in \mathcal{M}$. 假定 $T \in \mathcal{A}$ 具有形式 $T = \sum\limits_{r=1}^{m} S_{r1} \cdots S_{rk_r}$. 令 $\mathbf{W}_{rs_r} = (W_{ij}^{(rs_r)})_{m\times m} \in \mathcal{M} \otimes M_m(\mathbb{C})$, 其中 $W_{rr}^{(rs_r)} = S_{rs_r}$, 如果 $i \neq r$, 有 $W_{ii}^{(rs_r)} = I$, 且如果 $i \neq j$, 有 $W_{ij}^{(rs_r)} = 0$. 令 $\mathbf{A} = (A_{ij})_{m\times m}$ 满足对所有的 (i,j), $A_{ij} = I$, 则

$$\begin{aligned}&\mathbf{AW}_{11} \cdots \mathbf{W}_{1k_1}\mathbf{W}_{21} \cdots \mathbf{W}_{(m-1)k_{(m-1)}}\mathbf{W}_{m1} \cdots \mathbf{W}_{mk_m}\mathbf{A} \\ &= \mathbf{V} = (\mathbf{V}_{ij})_{m\times m},\end{aligned}$$

其中对 $i, j = 1, \cdots, m$, $V_{ij} = T = \sum_{r=1}^{m} S_{r1} \cdots S_{rk_r}$. 由命题 4.5.1 的性质 (6) 知,

$$\text{tr-rank}\left(\sum_{r=1}^{m} S_{r1} \cdots S_{rk_r}\right) = \text{tr-rank}(\mathbf{V}).$$

令

$$\begin{aligned}\mathbf{B} = (B_{ij}) = \Phi_m(\mathbf{A})\Phi_m(\mathbf{W}_{11}) \cdots \Phi_m(\mathbf{W}_{1k_1})\Phi_m(\mathbf{W}_{21}) \\ \cdots \Phi_m(\mathbf{W}_{(m-1)k_{(m-1)}})\Phi_m(\mathbf{W}_{m1}) \\ \cdots \Phi_m(\mathbf{W}_{mk_m})\Phi_m(\mathbf{A}),\end{aligned}$$

那么对 $i, j = 1, \cdots, m$, $B_{ij} = S = \sum_{r=1}^{m} \Phi(S_{r1}) \cdots \Phi(S_{rk_r})$. 相似地,我们有

$$\text{tr-rank}(\mathbf{B}) = \text{tr-rank}(\sum_{r=1}^{m} \Phi(S_{r1}) \cdots \Phi(S_{rk_r})).$$

因为 $\Phi_m : \mathcal{M} \otimes M_m(\mathbb{C}) \to \mathcal{A} \otimes M_m(\mathbb{C})$ 完全迹秩不增,类似于不等式 (4.5.1), 我们有 tr-rank($\mathbf{B}$) $\leq$tr-rank($\mathbf{V}$). 因此

$$\text{tr-rank}\left(\sum_{r=1}^{m} \Phi(S_{r1}) \cdots \Phi(S_{rk_r})\right) \leq \text{tr-rank}\left(\sum_{r=1}^{m} S_{r1} \cdots S_{rk_r}\right). \tag{4.5.2}$$

令 $\widehat{\mathcal{M}}$ 是由 $\mathcal{M}$ 生成的 $\mathcal{A}$ 的子代数,定义

$$\widehat{\Phi}\left(\sum_{r=1}^{m} S_{r1} \cdots S_{rk_r}\right) = \left(\sum_{r=1}^{m} \Phi(S_{r1}) \cdots \Phi(S_{rk_r})\right),$$

那么 $\widehat{\Phi} : \widehat{\mathcal{M}} \to \mathcal{A}$ 是线性的. 如果 $\sum_{r=1}^{m} S_{r1} \cdots S_{rk_r} = 0$, 不等式 (4.5.2) 表明

$$\sum_{r=1}^{m} \Phi(S_{r1}) \cdots \Phi(S_{rk_r}) = 0,$$

所以 $\widehat{\Phi}$ 的定义是合理的. 设 T, S 及 $TS \in \mathcal{M}$, 则显然有 $\Phi(TS) = \Phi(T)\Phi(S)$. 这样 $\widehat{\Phi}$ 是同态 Φ 的延拓. 因为 $\widehat{\Phi}_m = \widehat{\Phi_m}$, 因此 $\widehat{\Phi}$ 也是完全迹秩不增的.

如果 Φ 完全保迹秩, 只需在上面讨论中把 " tr-rank " 之间的不等号改为等号 " = " 即可. 因此在这种情形下, $\widehat{\Phi}$ 完全保迹秩, 而且 $\widehat{\Phi}$ 是单射. 证毕.

利用定理 4.5.2 可得下列推论.

推论 4.5.3 设 $\mathcal{A}$ 是有限 von Neumann 代数且 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子代数. 令 $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ 是保单位元的线性映射. 如果 Φ 完全迹秩不增 (或, 完全保迹秩), 那么 Φ 是代数同态 (或, 单射代数同态).

接下来, 我们讨论有限 von Neumann 代数上保迹秩的自伴线性映射. 首先回忆一些概念. 设 $\mathcal{A}$ 是有限 von Neumann 代数且 $T \in \mathcal{A}$, 则 T 的中心覆盖 C_T 是投影 $I - P$, 其中 P 是 $\mathcal{A}$ 中满足 $P_\alpha T = 0$ 的所有中心投影 P_α 的并, 即 C_T 是 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 中满足 $QT = T$ 的最小中心投影 Q, 其中 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 代表 $\mathcal{A}$ 的中心. 下面的引理引自文献 [68; p.305, 推论].

引理 4.5.4 设 $\mathcal{A}$ 是有限 von Neumann 代数. 如果 Φ 是 $\mathcal{A}$ 的 *- 自同构且 Φ 限制到 $\mathcal{A}$ 的中心上是恒等映射, 那么 Φ 是空间的.

定理 4.5.5 设 $\mathcal{A}$ 是有限 von Neumann 代数且 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是保单位元的自伴线性满射. 则 Φ 完全保迹秩当且仅当 Φ 是 $\mathcal{A}$ 的空间 *- 自同构且 Φ 限制到中心上是恒等映射.

证明 显然只需证必要性, 设 Φ 完全保迹秩. 由推论 4.5.3 知, Φ 是 $\mathcal{A}$ 的 *- 自同构. 显然, 对任意的 $A \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, 我们有 $\Phi(A) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 且 $\Phi|_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})} : \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \to \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 是双射. 因为同构保谱半径且代数 $\mathcal{A}$ 是半单的, 因此由定理 1.2.3 知, Φ 有界. 对任意的投影 $P \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, 由于 Φ 自伴, 于是 $\Phi(P) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 也是投影, 从而对每个投影 $P \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, Φ 的保迹秩性表明 $\Phi(P) = P$. 因为 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 中的每个算子都是 $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ 中正交投影线性组合的范数极限, 因此对每个 $Z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, $\Phi(Z) = Z$. 由引理 4.5.4 知, Φ 是空间的. 证毕.

利用上述结果, 我们继续 §2.2 的讨论. 由于矩阵代数是有限

的，故由定理 4.5.2 及其证明，有下列结论.

定理 4.5.6 设 $\mathbb{F}$ 为实数域或复数域. 如果 $\Phi:\mathcal{M}\subset M_n(\mathbb{F})\to M_n(\mathbb{F})$ 是完全秩不增 (或，完全保秩) 的线性映射且 $\Phi(I_n)=I_n$，则 Φ 能延拓到由 $\mathcal{M}$ 生成的代数上完全秩不增 (或，完全保秩) 的代数同态.

现在可以进一步给出有关问题 2.2.2 以及猜测 2.2.3 和 2.2.4 的一些肯定结果.

推论 4.5.7 设 $\mathcal{M}\subseteq M_n(\mathbb{F})$ 是包含单位元 I_n 的线性子空间. 令 $\Phi:\mathcal{M}\to M_n(\mathbb{F})$ 保单位元且是完全秩不增 (或，完全保秩) 的线性映射. 如果 $\mathcal{M}$ 生成的代数是 $M_n(\mathbb{F})$，那么存在可逆矩阵 $A\in M_n(\mathbb{F})$ 使得对任意的 $T\in\mathcal{M}$，有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$.

证明 由定理 4.5.6，我们可把 Φ 看作是 $M_n(\mathbb{F})$ 上的完全秩不增线性映射. 利用推论 2.2.2，存在 $A, B\in M_n(\mathbb{F})$ 使得对每个 T，有 $\Phi(T)=ATB$. 因为 $\Phi(I_n)=I_n$，因此 A 可逆且 $\Phi(T)=ATA^{-1}$. 证毕.

例 4.5.1 令 $\mathcal{M}\subseteq M_n(\mathbb{F})$ 是线性子空间且 $\widehat{\mathcal{M}}$ 是由 $\mathcal{M}$ 生成的子代数. 如果 $\mathcal{M}$ 包含两个矩阵

$$R=\begin{pmatrix} r_1 & & & & 0 \\ & r_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r_{n-1} & \\ 0 & & & & r_n \end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix} 0 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1} \\ u_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $r_i\neq 0$, $u_i\neq 0$ 且当 $i\neq j$ 时，$r_i\neq r_j$ $(i,j=1,\cdots,n)$，则

$\widehat{\mathcal{M}} = M_n(\mathbb{F})$.

推论 4.5.8 设 $\mathcal{M} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ 是包含 I_n 的线性空间且 $\Phi: \mathcal{M} \to M_n(\mathbb{C})$ 是保单位的完全秩不增线性映射. 如果由 $\mathcal{M}$ 生成的代数是 $M_n(\mathbb{C})$ 的半单子代数, 则存在可逆矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{M}$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$.

证明 有定理 4.5.6 和推论 2.2.5 立得. 证毕.

例 4.5.2 设 $S, T \in M_n(\mathbb{C})$ 且 $\Phi: \mathrm{span}\{I_n, T\} \to M_n(\mathbb{C})$ 是线性映射. 如果对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 有 $\Phi(\alpha I_n + \beta T) = \alpha I_n + \beta S$, 则由定理 4.5.6 和 [91; 定理 2.1] 知,

(1) Φ 完全秩不增当且仅当存在可逆矩阵 $A_k \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $S = \lim_{n\to\infty} A_k T A_k^{-1}$;

(2) Φ 完全保秩当且仅当存在可逆矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $S = ATA^{-1}$.

推论 4.5.9 设 $\mathcal{M}$ 是包含单位元的 $M_n(\mathbb{C})$ 的自伴线性子空间且 $\Phi: \mathcal{M} \to M_n(\mathbb{C})$ 是保单位的线性映射. 则下列断言等价:

(1) Φ 完全秩不增.

(2) Φ 完全保秩.

(3) 存在可逆矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 使得对所有的 $T \in \mathcal{M}$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$.

(4) 存在下有界的可逆矩阵列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M_n(\mathbb{C})$ 使得对所有的 $T \in \mathcal{M}$,

$$\Phi(T) = \lim_{k\to\infty} A_k T A_k^{-1}.$$

推论 4.5.10 设 $\mathcal{M} \subset M_n(\mathbb{C})$ 是线性子空间且具有基 $\{I_n, T_1, \cdots, T_r\}$. 假定这组基生成一个半单子代数. 令 $\Phi: \mathcal{M} \to M_n(\mathbb{C})$ 是保单位元的线性映射且把 T_i 映为 S_i, 则下列断言等价.

(1) Φ 完全秩不增.

(2) Φ 完全保秩.

(3) $(T_1, \cdots, T_r)$ 和 $(S_1, \cdots, S_r)$ 联合相似.

§4.6 Banach 代数上谱有界的线性映射

令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是包含单位元的复 Banach 代数且 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性映射. 如果存在正常数 M 使得对每个 $T\in\mathcal{A}$, 有 $r(\Phi(T))\leq Mr(T)$, 其中 $r(T)$ 代表 T 的谱半径, 称 Φ 是谱有界的. 当 $M=1$ 时, 我们称 Φ 是谱半径不增的. 注意到对谱有界线性映射的研究可简化到谱半径不增线性映射的讨论. 事实上, 令 $\Psi=M^{-1}\Phi$, 那么 $r(\Psi(T))=M^{-1}r(\Phi(T))\leq r(T)$, 即 Ψ 是谱半径不增的.

下面的定理刻画了从 Banach 代数到标准算子代数上谱有界的线性映射, 是本节的主要结论之一.

定理 4.6.1 设 $\mathcal{A}$ 是包含单位元的复 Banach 代数且 $\mathcal{B}$ 是作用在复 Banach 空间 X 上的标准算子代数. 令 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性满射. 假定 Φ 谱有界, 则 Φ 保平方零元.

证明 由定理前的讨论, 我们可假定 Φ 是谱半径不增的. 以下分几步证之.

第一步 设 $A\in\mathcal{A}$ 使得对某个 $k\geq 2$, 有 $A^k=0$. 令 $Q=\Phi(A)$. 假定 $B\in\mathcal{B}$ 满足 $BQ^iB=0$ $(i=0,1,\cdots,k-1)$. 那么对每个复数 λ, 有

$$r(\lambda Q^k+BQ^{k-1}+QBQ^{k-2}+\cdots+Q^{k-1}B)=0.$$

令 $B_1=BQ^{k-1}+QBQ^{k-2}+\cdots+Q^{k-1}B$ 且 $B_2=Q^k$. 因为

$$r(B+\lambda Q)^k=r[(B+\lambda Q)^k]$$

且

$$B^2=BQB=BQ^2B=\cdots=BQ^{k-2}B=0,$$

因此 $r(B+\lambda Q)^k=|\lambda|^{k-1}r(B_1+\lambda B_2)$. 由于 Φ 是满射, 于是存在 $C\in\mathcal{A}$ 使得 $\Phi(C)=B$, 从而由 Φ 的谱半径不增性, 我们得到

$$r(B+\lambda Q)^k=r(\Phi(C+\lambda A))^k\leq r(C+\lambda A)^k.$$

因为 $A^k=0$, 因此 $r(C+\lambda A)^k=r[(C+\lambda A)^k]=r(C_0+\lambda C_1+\cdots+\lambda^{k-1}C_{k-1})$, 其中 $C_0=C^k$, $C_1=C^{k-1}A+\cdots+AC^{k-1}$, $\cdots$, $C_{k-1}=A^{k-1}C+\cdots+CA^{k-1}$. 这样对任意的复数 λ, 我们都有

$$|\lambda|^{k-1}r(B_1+\lambda B_2)\leq r(C_0+\lambda C_1+\cdots+\lambda^{k-1}C_{k-1}),$$

从而对满足 $|\lambda|\geq 1$ 的任何复数 λ, 都有

$$\begin{aligned}r(B_1+\lambda B_2)&\leq|\lambda|^{-k+1}r(C_0+\lambda C_1+\cdots+\lambda^{k-1}C_{k-1})\\&\leq\|C_0\|+\|C_1\|+\cdots+\|C_{k-1}\|.\end{aligned}$$

另一方面, 对满足 $|\lambda|\leq 1$ 的任意复数 λ, 有

$$r(B_1+\lambda B_2)\leq\|B_1+\lambda B_2\|\leq\|B_1\|+\|B_2\|.$$

于是函数 $\lambda\mapsto r(B_1+\lambda B_2)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上有界. 由命题 1.2.2 知, 谱半径是次调和函数, 由次调和函数的 Liouville 定理 1.1.10 知, 对每个复数 λ, 都有 $r(B_1+\lambda B_2)=r(B_1)$. 因为 $B_1B=0$, 因此对某些 $D_i\in\mathcal{B}$, 我们有 $B_1^2=D_{k-2}BQ^{k-2}+D_{k-3}BQ^{k-3}+\cdots+D_0B$, 从而 $B_1^2QB=B_1^2B=0$. 这表明对某些 $E_i\in\mathcal{B}$, 有 $B_1^3=E_{k-3}BQ^{k-3}+E_{k-2}BQ^{k-2}+\cdots+E_0B$, 所以 $B_1^3Q^2B=B_1^3QB=B_1^3B=0$. 重复这个过程, 我们得到 $B_1^{k+1}=0$. 故对每个复数 $\lambda\in\mathbb{C}$, 都有 $r(B_1+\lambda B_2)=0$.

第二步 设 $S\in\mathcal{A}$, 如果对某个 $k\geq 2$, $S^k=0$, 则 $\Phi(S)^{2k-1}=0$.

令 $Q=\Phi(S)$, 假定 $Q^{2k-1}\neq 0$. 因为 $r(Q)=0$, 因此对每个次数不大于 $2k-1$ 的复多项式 p, 有 $p(Q)\neq 0$. 局部代数算子的 Kaplansky 定理告诉我们, 存在向量 $u\in X$ 使得向量 u, Qu, Q^2u, $\cdots$, $Q^{2k-1}u$ 线性无关, 所以 $Q^{k-1}u\notin M$, 这里,

$$\begin{aligned}M=\operatorname{span}\{&u,Qu,\cdots,Q^{k-2}u,Q^ku,Q^{k+1}u,\\&\cdots,Q^{2k-2}u,Q^{2k-1}u-Q^{k-1}u\}.\end{aligned}$$

因此存在线性泛函 $f \in X^*$ 使得 $f(Q^{k-1}u) = 1$ 且 $f(M) = \{0\}$. 于是

$$f(u) = 0, f(Qu) = 0, \cdots, f(Q^{k-2}u) = 0, f(Q^{k-1}u) = 1,$$

$$f(Q^k u) = 0, f(Q^{k+1}u) = 0, \cdots, f(Q^{2k-2}u) = 0, f(Q^{2k-1}u) = 1.$$

令 $A = (u - Q^k u) \otimes f$. 注意到对 $i = 0, 1, \cdots, k-2$, $AQ^i u = 0$, 但 $AQ^{k-1}u = u - Q^k u$. 所以

$$(Q^k + AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1}A)u = Q^k u + (u - Q^k u) = u,$$

由此可知

$$r(Q^k + AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1}A) \geq 1.$$

然而, 对于 $i = 0, 1, \cdots, k-1$, 因为 $f(Q^i u - Q^{k+i}u) = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} AQ^i A &= ((u - Q^k u) \otimes f)Q^i((u - Q^k u) \otimes f) \\ &= ((u - Q^k u) \otimes f)((Q^i u - Q^{k+i}u) \otimes f) = 0. \end{aligned}$$

所以由第一步可得 $r(Q^k + AQ^{k-1} + QAQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1}A) = 0$, 矛盾. 故第二步的断言成立.

第三步 我们断言 Φ 保平方零元.

由第二步的结论知, 对任意 $A \in \mathcal{A}$, $A^2 = 0$ 蕴涵 $\Phi(A)^3 = 0$. 假定存在某个 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $A^2 = 0$, 但 $\Phi(A)^2 \neq 0$. 令 $\Phi(A) = Q$, 那么对每个次数不超过 2 的复多项式 p, 有 $p(Q) \neq 0$. 于是存在向量 $u \in X$ 使得向量 u, Qu 和 Q^2u 线性无关, 所以 $u \notin M = \mathrm{span}\{Qu, Q^2u - u\}$. 因此存在线性泛函 $f \in X^*$ 使得 $f(u) = f(Q^2u) = 1$ 但 $f(Qu) = 0$. 令 $B = (Q^2u - u) \otimes f$, 则 $B^2 = BQB = 0$. 由第一步, 我们有 $r(Q^2 + BQ + QB) = 0$. 然而 $(Q^2 + BQ + QB)(u - Qu) = u - Qu$ 蕴涵 $r(Q^2 + BQ + QB) \geq 1$, 矛盾. 所以 Φ 保平方零元. 证毕.

作为定理 4.6.1 的应用, 我们证明下面的结论.

定理 4.6.2 设 $\mathcal{A}$ 是包含单位元的复 Banach 代数，$\mathcal{B}$ 是作用在复 Banach 空间上的标准算子代数且 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是线性满射，则 $\Phi_2 : \mathcal{A} \otimes M_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{B} \otimes M_2(\mathbb{C})$ 谱有界当且仅当 Φ 是同态与非零常数的乘积.

证明 显然，只需证明必要性. 设 Φ_2 谱有界. 不失一般性，我们可以假定 Φ_2 是谱半径不增的. 由定理 4.6.1 知，Φ_2 保平方零元. 设 $C \in \mathcal{A}$ 可逆，则对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 因为

$$\begin{pmatrix} A & C \\ -C^{-1}A^2 & -C^{-1}AC \end{pmatrix}^2 = 0,$$

因此

$$\begin{pmatrix} \Phi(A) & \Phi(C) \\ -\Phi(C^{-1}A^2) & -\Phi(C^{-1}AC) \end{pmatrix}^2 = 0.$$

所以

$$\Phi(A)^2 - \Phi(C)\Phi(C^{-1}A^2) = 0 \tag{4.6.1}$$

且

$$\Phi(A)\Phi(C) - \Phi(C)\Phi(C^{-1}AC) = 0. \tag{4.6.2}$$

在 (4.6.2) 式中，取 $C = I$, 则 $\Phi(I)\Phi(A) = \Phi(A)\Phi(I)$. 因为 Φ 是谱半径不增的满射且 $\mathcal{B}$ 是标准算子代数，因此存在某个复数 c 满足 $|c| \leq 1$ 使得 $\Phi(I) = cI$. 我们断言 $c \neq 0$. 否则，在 (4.6.1) 式中取 $C = I$, 那么对每个元 $A \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(A)^2 = 0$, 这与 Φ 的满射性矛盾. 故不失一般性，可假定 $\Phi(I) = I$. 在 (4.6.1) 式中取 $C = I$, 则对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(A^2) = \Phi(A)^2$, 即 Φ 是 Jordan 同态. 在 (4.6.1) 式中取 $A = I$, 则 Φ 保可逆性且对任意的可逆元 $C \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(C^{-1}) = \Phi(C)^{-1}$. 现在 (4.6.2) 式表明 $\Phi(C^{-1}AC) = \Phi(C)^{-1}\Phi(A)\Phi(C)$. 由于 Φ 是 Jordan 的，我们有

$$\Phi(AC^2) = \Phi(C^{-1}CACC) = \Phi(C)^{-1}\Phi(CAC)\Phi(C) = \Phi(A)\Phi(C)^2. \tag{4.6.3}$$

其次, 任选非零数 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\lambda - C$ 可逆, 在 (4.6.3) 式中用 $\lambda - C$ 代替 C, 则对 $\mathcal{A}$ 中的所有元 A 及可逆元 C, 有 $\Phi(CA) = \Phi(C)\Phi(A)$. 如果 C 不可逆, 取 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\lambda - C$ 可逆, 则 $\Phi((\lambda - C)A) = (\lambda - \Phi(C))\Phi(A)$, 从而 $\Phi(CA) = \Phi(C)\Phi(A)$. 所以对任意的 $A, C \in \mathcal{A}$, 都有 $\Phi(CA) = \Phi(C)\Phi(A)$, 即 Φ 是同态. 证毕.

推论 4.6.3 设 $\mathcal{A}$ 是包含单位元的复 Banach 代数, $\mathcal{B}$ 是作用在复 Banach 空间上的标准算子代数. 令 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是线性双射, 则 $\Phi_2 : \mathcal{A} \otimes M_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{B} \otimes M_2(\mathbb{C})$ 谱有界当且仅当 Φ 是同构与非零常数的乘积.

如果 $\mathcal{A}$ 是标准算子代数, 那么 Φ 有更加具体的形式.

定理 4.6.4 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是作用在复 Banach 空间 X 上的标准算子代数. 令 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是线性双射. 则 $\Phi_2 : \mathcal{A} \otimes M_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{B} \otimes M_2(\mathbb{C})$ 谱有界当且仅当存在非零复数 c 和可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X)$ 使得对每个 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = cATA^{-1}$.

证明 显然, 只需证必要性. 假设 Φ_2 谱有界. 由推论 4.6.3 知, Φ 是同构与非零常数的乘积. 因为标准算子代数间的同构是空间的, 因此存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X)$ 及非零常数 c, 使得对每个算子 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(T) = cATA^{-1}$. 证毕.

从现在起我们讨论定理 4.6.1 对 Hilbert 空间情形的应用. 令 H 和 K 是两个无限维的复 Hilbert 空间. 应用定理 4.6.1, 下面的定理完全刻画了从 $\mathcal{B}(H)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 上谱有界的线性映射, 是本节的另一个主要结论.

定理 4.6.5 设 H 和 K 是两个无限维的复 Hilbert 空间且 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是线性双射, 则下列条件等价.

(1) Φ 谱有界.

(2) 存在非零复数 d 和保幂等的有界线性映射 $\Psi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 使得 $\Phi = d\Psi$.

(3) Φ 是 Jordan 同构的非零常数倍.

(4) Φ 是同构或反同构的非零常数倍.

(5) 存在非零复数 d 和可逆算子 $A \in \mathcal{B}(H, K)$, 使得对每个

$T \in \mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T) = dATA^{-1}$; 或者对每个 $T \in \mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T) = dAT^{tr}A^{-1}$, 其中 T^{tr} 代表 T 关于 H 的任意但预先固定标准正交基的转置.

在证明这个定理之前，我们需要下面的引理.

引理 4.6.6 设 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是线性满射. 如果 Φ 保平方零元，那么对所有的幂等元 $R \in \mathcal{B}(H)$, 都有 $\Phi(R)^2\Phi(I) = \Phi(I)\Phi(R)^2$.

证明 设 $H = H_1 \oplus H_2$, 其中 H_1 和 H_2 是 H 的无限维闭线性子空间，但不一定正交. 令 P 和 Q $(= I - P)$ 是相应于这个直和分解的幂等元，满足 $\operatorname{rng}(P) = H_1$, $\ker P = H_2$. 假定 $A, B \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $PAP = A$, $QBQ = B$. 由定理 1.1.12 知， A 和 B 能表示为 5 个平方零算子的和. 比如 $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$, $B = B_1+B_2+B_3+B_4+B_5$, 且有 $PA_iP = A_i$, $QB_iQ = B_i$ $(i = 1, \cdots, 5)$. 显然 $(A_i + B_j)^2 = 0$, 所以 $\Phi(A_i)\Phi(B_j) + \Phi(B_j)\Phi(A_i) = 0$, 从而 $\Phi(A)\Phi(B) + \Phi(B)\Phi(A) = 0$. 即对每个 $A, B \in \mathcal{B}(H)$, 有

$$\Phi(PAP)\Phi((I-P)B(I-P)) + \Phi((I-P)B(I-P))\Phi(PAP) = 0. \tag{4.6.4}$$

下证对所有的幂等元 R, 都有

$$\Phi(R)\Phi(I) + \Phi(I)\Phi(R) = 2\Phi(R)^2. \tag{4.6.5}$$

如果 $R \in \mathcal{B}(H)$ 是幂等元且值域和零空间都是无限维的，那么在 (4.6.4) 式中，取 $A = B = I$, 则 $\Phi(R)\Phi(I-R) + \Phi(I-R)\Phi(R) = 0$, 从而 (4.6.5) 式成立.

如果 R 的值域是有限维的，取值域与零空间都是无限维的幂等元 P_1 使得 $P_1 \perp R$ (即 $P_1R = RP_1 = 0$), 那么

$$\begin{aligned}
&\Phi(P_1)\Phi(R) + \Phi(R)\Phi(P_1) \\
&\quad = \Phi(P_1P_1P_1)\Phi((I-P_1)R(I-P_1)) \\
&\qquad + \Phi((I-P_1)R(I-P_1))\Phi(P_1P_1P_1) = 0,
\end{aligned}$$

所以 $\Phi(P_1+R)^2=\Phi(P_1)^2+\Phi(R)^2$ 并且

$$\begin{aligned}
&\Phi(R)\Phi(I)+\Phi(I)\Phi(R)\\
&\quad=\Phi(P_1+R-P_1)\Phi(I)+\Phi(I)\Phi(P_1+R-P_1)\\
&\quad=\Phi(P_1+R)\Phi(I)+\Phi(I)\Phi(P_1+R)-\Phi(P_1)\Phi(I)-\Phi(I)\Phi(P_1)\\
&\quad=2\Phi(P_1+R)^2-2\Phi(P_1)^2=2\Phi(R)^2,
\end{aligned}$$

即有 (4.6.5) 式成立.

如果 R 的零空间是有限维的，那么

$$\Phi(I-R)\Phi(I)+\Phi(I)\Phi(I-R)=2\Phi(I-R)^2,$$

因此 $\Phi(R)\Phi(I)+\Phi(I)\Phi(R)=2\Phi(R)^2$. 完成 (4.6.5) 式的证明. 所以对任意的幂等元 $R\in\mathcal{B}(H)$, 我们都有

$$\Phi(R)^2\Phi(I)+\Phi(R)\Phi(I)\Phi(R)=2\Phi(R)^3,$$

$$\Phi(I)\Phi(R)^2+\Phi(R)\Phi(I)\Phi(R)=2\Phi(R)^3.$$

故 $\Phi(R)^2\Phi(I)=\Phi(I)\Phi(R)^2$. 证毕.

定理 4.6.7 设 H 和 K 是两个无限维的 Hilbert 空间且 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$ 是线性满射. 如果 Φ 谱有界，则要么对所有的紧算子 $C\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(C)=0$; 要么 Φ 是单射. 在后一种情形下，Φ 是同构或反同构的非零常数倍，即存在非零复数 d 和可逆算子 $A\in\mathcal{B}(H,K)$, 使得下列断言之一成立:

(1) 对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T)=dATA^{-1}$;

(2) 对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T)=dAT^{tr}A^{-1}$ 成立，其中 T^{tr} 代表 T 关于 H 的任意但预先固定标准正交基的转置.

证明 设 Φ 谱有界. 由定理 4.6.1 知，Φ 保平方零元. 进而，可假定 Φ 是谱半径不增的.

断言 1 对 $\mathcal{B}(H)$ 中的任意正交幂等元 P_1 和 P_2, 下式成立:

$$\Phi(P_1+P_2)^2=\Phi(P_1)^2+\Phi(P_2)^2. \tag{4.6.6}$$

由引理 4.6.6 的证明知，对于 $i=1$ 或 2, 如果 $\dim \operatorname{rng}(P_i) = \dim \operatorname{rng}(I-P_i)=\infty$, 那么 (4.6.6) 式成立. 因此为证明 (4.6.6) 式，我们只需验证下列四种情形:

(i) $\dim \operatorname{rng}(P_1)<\infty$, $\dim \operatorname{rng}(P_2)<\infty$;

(ii) $\dim \operatorname{rng}(P_1)<\infty$, $\dim \operatorname{rng}(I-P_2)<\infty$;

(iii) $\dim \operatorname{rng}(I-P_1)<\infty$, $\dim \operatorname{rng}(P_2)<\infty$;

(iv) $\dim \operatorname{rng}(I-P_1)<\infty$, $\dim \operatorname{rng}(I-P_2)<\infty$.

如果情形 (i) 发生，我们能找到幂等元 P_3 使得与 P_1+P_2 正交并且 $\dim \operatorname{rng}(P_3) = \dim \operatorname{rng}(I-P_3)=\infty$, 所以

$$\begin{aligned}\Phi(P_1+P_2)^2+\Phi(P_3)^2 &= \Phi(P_1+P_2+P_3)^2\\ &= \Phi(P_1)^2+\Phi(P_2+P_3)^2\\ &= \Phi(P_1)^2+\Phi(P_2)^2+\Phi(P_3)^2,\end{aligned}$$

故 $\Phi(P_1+P_2)^2=\Phi(P_1)^2+\Phi(P_2)^2$. 对剩余的三种情形，类似地可证明 (4.6.6) 式也成立.

断言 2 存在非零复数 c 使得 $\Phi(I)=cI$.

因为 Φ 是谱半径不增的满射且 $\mathcal{B}(K)$ 半单，由定理 1.2.3 知，Φ 有界. 令 $A\in\mathcal{B}(H)$ 是正交投影的线性组合，即 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iP_i$, 其中 $\{P_i\}_{i=1}^n$ 是一组相互正交的投影. 则由 (4.6.6) 式，$\Phi(A)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2\Phi(P_i)^2$. 所以由引理 4.6.6, 我们有 $\Phi(A)^2\Phi(I)=\Phi(I)\Phi(A)^2$. 由于 $\mathcal{B}(H)$ 中的任何自伴元都是正交投影线性组合的范数极限, 故 Φ 的有界性和线性性蕴涵 $\Phi(B)^2\Phi(I)=\Phi(I)\Phi(B)^2$ 对任意的自伴算子 $B\in\mathcal{B}(H)$ 成立. 令 $C,D\in\mathcal{B}(H)$ 自伴，则 $\Phi(C+D)^2\Phi(I)=\Phi(I)\Phi(C+D)^2$, 从而

$$(\Phi(C)\Phi(D)+\Phi(D)\Phi(C))\Phi(I)=\Phi(I)(\Phi(C)\Phi(D)+\Phi(D)\Phi(C)).$$

对任意的 $T\in\mathcal{B}(H)$, 记 $T=C+iD$, 其中 C 和 D 自伴. 因为

$$\begin{aligned}&\Phi(C+iD)^2\Phi(I)\\ &=\Phi(C)^2\Phi(I)-\Phi(D)^2\Phi(I)+i(\Phi(C)\Phi(D)+\Phi(D)\Phi(C))\Phi(I)\\ &=\Phi(I)\Phi(C+iD)^2,\end{aligned}$$

对每个 $T\in\mathcal{B}(H)$, 我们都有 $\Phi(T)^2\Phi(I)=\Phi(I)\Phi(T)^2$. 由于 Φ 是满射, 于是对所有的 $S\in\mathcal{B}(K)$, 有 $S^2\Phi(I)=\Phi(I)S^2$ 成立. 对任意秩一算子 $x\otimes y\in\mathcal{B}(K)$, 如果 $\langle x,y\rangle\neq 0$, 则 $x\otimes y$ 是秩一幂等元的常数倍, 即 $x\otimes y=(\frac{x\otimes y}{\sqrt{\langle x,y\rangle}})^2$, 其中 $\sqrt{\langle x,y\rangle}$ 是数 $\langle x,y\rangle$ 的平方根. 所以 $(x\otimes y)\Phi(I)=\Phi(I)(x\otimes y)$; 如果 $\langle x,y\rangle=0$, 那么 $x\otimes(\frac{1}{n}x+y)$ 是秩一幂等元的常数倍, 因此 $[x\otimes(\frac{1}{n}x+y)]\Phi(I)=\Phi(I)[x\otimes(\frac{1}{n}x+y)]$, 从而 $(x\otimes y)\Phi(I)=\Phi(I)(x\otimes y)$. 于是对所有的 $F\in\mathcal{F}(K)$, 都有 $F\Phi(I)=\Phi(I)F$. 由于 $\mathcal{F}(K)$ 在 $\mathcal{B}(K)$ 中是弱稠的, 从而对所有的 $S\in\mathcal{B}(K)$, 有 $S\Phi(I)=\Phi(I)S$. 因此存在 $c\in\mathbb{C}$ 使得 $\Phi(I)=cI$. 下证 $c\neq 0$. 如果 $c=0$, 那么 $\Phi(I)=0$. 由 (4.6.5) 式, 对所有的幂等元 R, 我们有 $\Phi(R)^2=0$. 又因 Φ 有界, 故对所有的自伴算子 C, 有 $\Phi(C)^2=0$. 这样对所有的 $T\in\mathcal{B}(K)$, 都有 $\Phi(T)^2=0$, 与 Φ 的满射性矛盾. 故不失一般性, 可假定 $\Phi(I)=I$.

现在由 (4.6.5) 式知 Φ 保幂等性. 从而由定理 4.2.1 的证明知 Φ 是 Jordan 同态.

由于 $\mathcal{B}(K)$ 是素环, 定理 1.2.6 告诉我们, Φ 是同态或反同态. 如果 Φ 不是单射, 那么 $\ker\Phi$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的非零闭理想. 因为 $\mathcal{B}(H)$ 的最小非平凡闭理想是紧算子理想 $\mathcal{K}(H)$, 所以 $\ker\Phi\supseteq\mathcal{K}(H)$. 因此对所有的紧算子 $C\in\mathcal{K}(H)$, 有 $\Phi(C)=0$. 如果 Φ 是单射, 那么 Φ 是同构或反同构. 因为 $\mathcal{B}(H)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 上的每个同构或反同构都是空间的, 因此存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(H,K)$, 使得对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$ 成立; 或者对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T)=AT^{tr}A^{-1}$ 成立, 其中 T^{tr} 代表 T 关于 H 的任意但预先固定标准正交基的转置. 证毕.

定理4.6.5的证明 显然 (2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(5)$\Rightarrow$(1). (1)$\Rightarrow$(2) 由定理 4.6.7 立得. 证毕.

注意到如果 Hilbert 空间 H 是可分的, 那么在定理 4.6.7 中, Φ 是单射. 事实上, 如果 Φ 不是单射, 那么 $\mathcal{B}(K)$ 同构于或反同构于商代数 $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$, 这与 $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ 的简单性矛盾.

推论 4.6.8 令 H 和 K 是两个无限维的 Hilbert 空间并且 H 可分. 假定 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$ 是线性满射. 那么 Φ 谱有界当且仅当存在非零复数 d 和可逆算子 $A\in\mathcal{B}(H,K)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T)=dATA^{-1}$ 成立; 或者对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T)=dAT^{tr}A^{-1}$ 成立, 其中 T^{tr} 代表 T 关于 H 的任意但预先固定标准正交基的转置.

注 4.6.1 如果 $\mathcal{B}(K)$ 被 Banach 空间上的标准算子代数代替, 本节中的证明仍然适用. 因此当 Φ 是从 $\mathcal{B}(H)$ 到标准算子代数上的谱有界线性映射时, 这一节的结论仍然成立.

§4.7 相似不变子空间和保相似性的线性映射

本节总假定 H 是可分复 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(H)$ 代表 H 上所有有界线性算子构成的 Banach 代数, $\mathcal{K}(H)$ 代表 $\mathcal{B}(H)$ 中的所有紧算子全体. 令 $\mathrm{GL}(\mathcal{B}(H))$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 中的可逆算子群. 如果 A, $B\in\mathcal{B}(H)$, 符号 $A\simeq B$ 表示 A 与 B 相似, 即存在可逆算子 $V\in\mathrm{GL}(\mathcal{B}(H))$ 使得 $A=V^{-1}BV$. 对于 $A\in\mathcal{B}(H)$, $\mathcal{S}(A)$ 代表 A 的相似轨道, 即 $\mathcal{S}(A)=\{V^{-1}AV\mid V\in\mathrm{GL}(\mathcal{B}(H))\}$, $\overline{\mathcal{S}(A)}$ 代表 $\mathcal{S}(A)$ 的范数闭包. 设 $\mathcal{M}\subset\mathcal{B}(H)$ 是一个子集, 如果对任意的 $A\in\mathcal{M}$, 有 $\mathcal{S}(A)\subseteq\mathcal{M}$, 称 $\mathcal{M}$ 是相似不变的; 如果 $\mathcal{M}$ 是闭子空间, 称 $\mathcal{M}$ 是相似不变子空间. 设 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 到其自身的有界线性映射, 对于 $A,B\in\mathcal{B}(H)$, 如果 $A\simeq B$ 蕴涵 $\Phi(A)\simeq\Phi(B)$, 称 Φ 保相似性; 如果 Φ 可逆且 Φ 和 Φ^{-1} 都保相似性, 称 Φ 双边保相似性.

本节刻画 $\mathcal{B}(H)$ 的相似不变子空间及其上保相似性的线性映射. 我们总假定 $\dim H=\infty$, 并不加区别地用 I 代表不同空间上的恒等算子. 首先刻画 $\mathcal{B}(H)$ 的相似不变子空间.

引理 4.7.1 对于 $T\in\overline{\mathcal{S}(A)}$, 我们有 $\sigma(A)\subseteq\sigma(T)$.

引理 4.7.2 ([5; 推论 9.37]) 令 $A\in\mathcal{B}(H)$. 则 $\sigma(T)=\sigma(A)$ 对所有的 $T\in\overline{\mathcal{S}(A)}$ 都成立当且仅当 A 是多项式紧算子. $\mathcal{S}(A)$ 是闭的当且仅当 A 相似于具有有限个谱点的正规算子.

引理 4.7.3 ([91; 命题 5.13]) 令 $T \in \mathcal{B}(H)$. 设 N 是正规算子使得 $\sigma(N)=\sigma(T)$ 且对每个孤立点 $\lambda \in \sigma(T)$, 有 $\dim H(\lambda,N)=\dim H(\lambda,T)$, 那么 $N \in \overline{\mathcal{S}(T)}$, 其中 $H(D,A)$ 代表算子 A 的 Riesz 子空间， D 是复平面 $\mathbb{C}$ 的子集.

引理 4.7.4 ([5; 引理 8.1]) 如果 $Q \in \mathcal{B}(H)$ 是拟幂零的且对所有的 $k=1,2,\cdots$, 有 $Q^k \neq 0$, 则 $\overline{\mathcal{S}(Q)}$ 包含所有的紧拟幂零算子.

引理 4.7.5 设 $\mathcal{M}$ 是相似不变子空间且 $T \in \mathcal{M}$. 如果 $T \neq 0$ 并且存在整数 k 使得 $T^k=0$, 那么 $\mathcal{M}$ 包含 $\mathcal{K}(H)$.

证明 由于 $\mathcal{M}$ 是闭子空间，为证明 $\mathcal{M}$ 包含 $\mathcal{K}(H)$, 只需证明 $\mathcal{M}$ 包含所有的有限秩算子. 进而我们只需证明 $\mathcal{M}$ 包含所有的一秩算子. 而由 $\mathcal{M}$ 的相似不变性，我们只需证明 $\mathcal{M}$ 中包含一个一秩幂零算子和一个一秩投影即可.

首先证明 $\mathcal{M}$ 包含一个一秩幂零算子. 设 $T \in \mathcal{B}(H)$. 假定存在整数 k 使得 $T^k=0$ 但 $T^{k-1} \neq 0$. 令 $H=\ker T \oplus (\ker T)^{\perp}$, 则 T 可表示为算子矩阵 $T=\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$. 设 $V_m=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & mI \end{pmatrix}$, $T_1=\lim_{m\to\infty} V_m T V_m^{-1}$, 则 $T_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. 这蕴涵 $T_1 \in \mathcal{M}$. 进而 $T_0=T-T_1 \in \mathcal{M}$ 且 $T_0^2=0$. 注意到 $A \neq 0$, 因此 $T_0 \neq 0$. 不失一般性，我们可假定 $T^2=0$. 所以存在非零向量 $x \in (\ker T)^{\perp}$ 使得 $Tx=y\neq 0$. 因为 $\operatorname{rng}(T) \subseteq \ker T$, 我们有 $x \perp y$. 于是 $H=(\ker T \ominus \{y\}) \oplus \{\mathbb{C}y\} \oplus \{\mathbb{C}x\} \oplus ((\ker T)^{\perp} \ominus \{x\})$. 从而存在非零常数 α 使得 $T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & \alpha & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 定义 $G_m=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & mI \end{pmatrix}$.

令 $T_2=\lim_{m\to\infty} G_m T G_m^{-1}$, 那么 $T_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是一秩幂

零算子且有 $T_2 \in \mathcal{M}$.

下证 $\mathcal{M}$ 包含一个一秩投影. 因为 $\mathcal{M}$ 是相似不变的, 故 $\mathcal{M}$ 包含 $\mathcal{B}(H)$ 中的所有一秩幂零算子. 设 $\{e_1, e_2, \cdots\}$ 是 H 的一组标准正交基. 注意到对满足 $i \neq j$ 的每对 (i, j), 我们有 $(e_i \otimes e_j)^2 = 0$, 所以 $\{e_i \otimes e_j \mid i \neq j\} \subset \mathcal{M}$. 于是对满足 $i \geq 2$ 的每个正整数 i, 有 $e_1 \otimes e_i + e_i \otimes e_1 \in \mathcal{M}$. 现在容易验证对每个 $i = 2,3,\cdots$, 都有 $e_1 \otimes e_i + e_i \otimes e_1 \simeq e_1 \otimes e_1 - e_i \otimes e_i$, 故 $\{e_1 \otimes e_1 - e_i \otimes e_i \mid i = 2,3,\cdots\} \subset \mathcal{M}$. 因此对满足 $m \geq 2$ 的每个正整数 m, 都有 $e_1 \otimes e_1 - \frac{1}{m}\sum_{i=2}^{m+1} e_i \otimes e_i \in \mathcal{M}$. 然而, 在此情形下, 我们有

$$\lim_{m\to\infty}\left\| e_1 \otimes e_1 - \left(e_1 \otimes e_1 - \frac{1}{m}\sum_{i=2}^{m+1} e_i \otimes e_i \right) \right\| = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m} = 0.$$

从而 $e_1 \otimes e_1 \in \mathcal{M}$. 证毕.

注 4.7.1 由引理 4.7.5 的证明知, 非零幂零算子之相似轨道的闭包包含一个一秩幂零算子.

引理 4.7.6 如果 $A^2 = 0$, 那么 $A \simeq A^*$.

证明 注意到 $\mathrm{rng}(A) \subseteq \ker(A)$ (或 $\mathrm{rng}(A^*) \subseteq \ker(A^*)$) 且 $H = \overline{\mathrm{rng}}(A) \oplus \overline{\mathrm{rng}}(A^*) \oplus (\ker(A^*) \ominus \overline{\mathrm{rng}}(A^*)) = \overline{\mathrm{rng}}(A) \oplus \overline{\mathrm{rng}}(A^*) \oplus (\ker(A) \ominus \overline{\mathrm{rng}}(A))$. 我们有

$$A = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $X \in \mathcal{B}(\overline{\mathrm{rng}}(A^*), \overline{\mathrm{rng}}(A))$ 是单射稠值域算子. 令 $X = U|X|$ 是 X 的极分解, 则 $U \in \mathcal{B}(\overline{\mathrm{rng}}(A^*), \overline{\mathrm{rng}}(A))$ 是酉算子. 设 $S = \begin{pmatrix} 0 & U & 0 \\ U^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$, 则 S 可逆且 $S^{-1}AS = A^*$. 证毕.

现在我们证明本节的主要结论之一.

定理 4.7.7 设 $\dim H=\infty$. 则 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{B}(H)$ 是相似不变子空间当且仅当 $\mathcal{M}$ 具有下列形式之一:

(1) $\{0\}$;

(2) $\{\lambda I\mid\lambda\in\mathbb{C}\}$;

(3) $\mathcal{K}(H)$;

(4) $\{\lambda I+K\mid\lambda\in\mathbb{C},\ K\in\mathcal{K}(H)\}$;

(5) $\mathcal{B}(H)$.

证明 充分性显然. 为证必要性, 假定 $\mathcal{M}$ 是非零的相似不变子空间.

断言 1 如果对每个 $A\in\mathcal{M}$, $\sigma(A)$ 仅包含一点, 那么 $\mathcal{M}=\{\lambda I\mid\lambda\in\mathbb{C}\}$.

如果 $\mathcal{M}$ 中的每个算子都是正规的, 那么 $\mathcal{M}=\{\lambda I\mid\lambda\in\mathbb{C}\}$. 否则, 存在非正规算子 $A\in\mathcal{M}$ 使得 $\sigma(A)=\{\lambda\}$. 于是由引理 4.7.3, $\lambda I\in\mathcal{M}$. 从而 $A-\lambda I\in\mathcal{M}$, 且 $\sigma(A-\lambda I)=\{0\}$. 这样 $\mathcal{M}$ 包含一个非零拟幂零算子. 应用引理 4.7.4 和 4.7.5, 我们有 $\mathcal{M}$ 包含一个一秩投影, 矛盾.

断言 2 如果 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{K}(H)$, 那么 $\mathcal{M}=\mathcal{K}(H)$.

由假设和断言 1, 存在 $T\in\mathcal{M}$ 使得 $\sigma(T)$ 不是单点集. 现在引理 4.7.1 和 4.7.3 蕴涵存在非零正规紧算子 $N\in\mathcal{M}$. 设 $\lambda_0\in\sigma(N)$ 非零, 则关于分解 $H=\ker(N-\lambda_0I)\oplus(\ker(N-\lambda_0I))^{\perp}$, $N=\begin{pmatrix}\lambda_0I & 0\\ 0 & N_1\end{pmatrix}$. 显然 $\ker(N-\lambda_0I)$ 和 $(\ker(N-\lambda_0I))^{\perp}$ 都不为零. 取单位向量 $x\in\ker(N-\lambda_0I)$ 及单位向量 $y\in(\ker(N-\lambda_0I))^{\perp}$, 则 $x\otimes y\in\mathcal{M}$. 事实上, 容易验证 $N\simeq N+x\otimes y$, 因此 $N+x\otimes y\in\mathcal{M}$, 这表明 $x\otimes y\in\mathcal{M}$. 利用引理 4.7.5, 我们有 $\mathcal{M}=\mathcal{K}(H)$.

断言 3 如果存在非紧算子 $A\in\mathcal{M}$ 使得 $\sigma(A)$ 不是单点集, 但对任意的 $T\in\mathcal{M}$, 都有 $\sigma_e(T)$ 是单点集, 那么 $\mathcal{M}=\{\lambda I+K\mid\lambda\in\mathbb{C},\ K\in\mathcal{K}(H)\}$, 其中 $\sigma_e(T)$ 代表 T 的本性谱.

首先观察到, 如果存在算子 $J\in\mathcal{M}$ 满足下列性质: 存在 $L\in\overline{S(J)}$ 使得 $\sigma(J)$ 是 $\sigma(L)$ 的真子集, 则由于 $\sigma(L)$ 和 $\sigma(J)$ 的每一分

支的交非空且 $\sigma(L)$ 边界的极限点包含在 $\sigma_e(L)$ 中，故 $\sigma_e(L)$ 不是单点集 (见 [91]), 这与假定矛盾. 所以由引理 4.7.2, $\mathcal{M}$ 中的每个算子都是多项式紧的. 现在由引理 4.7.3, 我们可假定 A 是一个非紧正规算子. 令 $\sigma_e(A)=\{\mu\}$, 则 $\mu\neq 0$. 我们有，对某个 $K\in\mathcal{K}(H)$, $A=\mu I+K$. 由于 $\sigma(A)$ 不是单点集，类似于断言 2 的证明，我们有 $\mathcal{K}(H)\subset\mathcal{M}$. 故 $\mu I\in\mathcal{M}$, 从而 $\{\lambda I\mid\lambda\in\mathbb{C}\}\subset\mathcal{M}$, 也有 $\{\lambda I+K\mid\lambda\in\mathbb{C},\ K\in\mathcal{K}(H)\}\subseteq\mathcal{M}$.

下证逆包含关系成立. 对任意的 $T\in\mathcal{M}$, 设 $\sigma_e(T)=\{\lambda_0\}$, 则由引理 4.7.2 知存在 k 使得 $(T-\lambda_0)^k$ 是紧的. 由 [91; 定理 7.2], 存在 $K_0\in\mathcal{K}(H)$ 使得 $(T-\lambda_0+K_0)^k=0$. 令 $T_0=T-\lambda_0+K_0$, 我们只需证明 $T_0\in\{\lambda I+K\mid\lambda\in\mathbb{C},\ K\in\mathcal{K}(H)\}$. 如果 $T_0=0$, 显然成立. 否则，关于分解 $H=\ker T_0\oplus(\ker T_0)^{\perp}$, 令 $T_0=\begin{pmatrix}0 & X\\ 0 & Y\end{pmatrix}$, $T_1=\begin{pmatrix}0 & X\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 且 $T_{11}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & Y\end{pmatrix}$. 因为

$$\lim_{m\to\infty}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & mI\end{pmatrix}T_0\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & m^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{m}X\\ 0 & Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & Y\end{pmatrix},$$

并且 $\mathcal{M}$ 是线性的，我们有 $T_1, T_{11}\in\mathcal{M}$. 显然 $T_1^2=0$, $T_{11}^{k-1}=0$ 且 $T_0=T_1+T_{11}$. 通过相同的方式，我们可得到 $k-1$ 个算子 $T_j\in\mathcal{M}$ $(j=1,2,\cdots,k-1)$ 满足 $T_j^2=0$ 且 $T_0=\sum_{j=1}^{k-1}T_j$. 故不失一般性，可假定 $T_0^2=0$. 由引理 4.7.6, 我们有 $T_0\simeq T_0^*$, 此蕴涵 $T_0\in\mathcal{M}$. 令 $T_0=H_1+iH_2$, 其中 H_1 和 H_2 自伴，那么 H_1, $H_2\in\mathcal{M}$. 从而由假定， $H_1, H_2\in\{\lambda I+K\mid\lambda\in\mathbb{C},\ K\in\mathcal{K}(H)\}$, 即 $T_0^*\in\{\lambda I+K\mid\lambda\in\mathbb{C},\ K\in\mathcal{K}(H)\}$.

断言 4 如果存在 $A\in\mathcal{M}$ 使得 $\sigma_e(A)$ 至少包含两点，那么 $\mathcal{M}=\mathcal{B}(H)$.

由引理 4.7.3, 可假定存在正规算子 $N \in \mathcal{M}$, 其本质谱至少包含两点 λ_1 和 λ_2. 令 Δ_1 和 Δ_2 是 $\mathbb{C}$ 的两个开子集满足 $\overline{\Delta}_1 \cap \overline{\Delta}_2 = \emptyset$, $\lambda_1 \in \Delta_1$ 且 $\lambda_2 \in \Delta_2$. 设 N 的谱分解为 $N = \int \mu dE_\mu$. 令 $H_1 = E(\Delta_1)H$, $H_2 = E(\Delta_2)H$ 且 $H_3 = (H_1 \oplus H_2)^\perp$, 则关于分解 $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$, N 可表示为

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{pmatrix}.$$

显然 $\sigma(N_1) \cap \sigma(N_2) = \emptyset$ 且 H_1 和 H_2 都是无限维的. 容易验证对每个 $X \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$,

$$\begin{pmatrix} N_1 & X & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{pmatrix}.$$

所以 $\begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$. 从而在 $\mathcal{M}$ 中我们可找到平方为零的算子. 因为 $\mathcal{M}$ 是相似不变的且 H_1 和 H_2 是无限维的, 故 $\mathcal{M}$ 包含所有平方为零的算子. 注意到 $\mathcal{M}$ 中的每个幂零算子都是平方零算子的线性组合, 所以所有的幂零算子都属于 $\mathcal{M}$. 现在由 [91; 定理 5.15], 我们得到 $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$. 证毕.

由定理 4.7.7, 立得下列推论.

推论 4.7.8 设 $A, B \in \mathcal{B}(H)$. 如果对所有的 $S \in \mathrm{GL}(\mathcal{B}(H))$, 都有 $AS^{-1}BS = S^{-1}BSA$ 成立, 则 A 或 B 是单位元的倍数.

推论 4.7.9 如果 A 不是紧算子和单位算子的倍数, 那么包含 A 的相似不变子空间就是 $\mathcal{B}(H)$.

在本节的剩余部分, 我们讨论 $\mathcal{B}(H)$ 上保相似性的线性映射.

命题 4.7.10 如果 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ 是保相似性的有界线性满射, 则 Φ 是单射.

证明 因为 Φ 保相似性，故 $\ker\Phi$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的相似不变子空间. 因此 $\ker(\Phi)$ 具有定理 4.7.7 中陈述的五种形式之一. 下证 $\ker(\Phi)=\{0\}$. 事实上，容易验证 Φ^2 和 Φ^3 也是保相似性的映射，且有

$$\ker\Phi\subseteq\ker\Phi^2\subseteq\ker\Phi^3\subset\mathcal{B}(H).$$

如果 $\ker\Phi\neq\{0\}$，由于 Φ 是满射，故 $\{0\}\subset\ker\Phi^2\subset\ker\Phi^3\subset\mathcal{B}(H)$，且其包含均为真包含. 然而，这是不可能的，因为由定理 4.7.7 知，$\mathcal{B}(H)$ 中没有这样一个相似不变子空间链，所以 Φ 是单射. 证毕.

下面的定理是本节的另一主要结论.

定理 4.7.11 设 H 是可分无限维 Hilbert 空间且 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)$ 是有界线性满射. 则 Φ 双边保相似性当且仅当下列条件之一成立：

(1) 存在非零数 $\alpha\in\mathbb{C}$ 和 $V\in\mathrm{GL}(\mathcal{B}(H))$ 使得对任意的 $X\in\mathcal{B}(H)$，有 $\Phi(X)=\alpha V^{-1}XV$.

(2) 存在非零数 $\alpha\in\mathbb{C}$ 和 $V\in\mathrm{GL}(\mathcal{B}(H))$ 使得对任意的 $X\in\mathcal{B}(H)$，有 $\Phi(X)=\alpha V^{-1}X^{tr}V$，其中 X^{tr} 代表 X 关于 H 的任一给定基的转置.

先证明下面的引理.

引理 4.7.12 设 H 是可分无限维 Hilbert 空间且 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)$ 是有界线性满射. 如果 Φ 双边保相似性，那么 $\Phi(\{\lambda I\mid\lambda\in\mathbb{C}\})=\{\lambda I\mid\lambda\in\mathbb{C}\}$ 且 $\Phi(\mathcal{K}(H))=\mathcal{K}(H)$.

证明 令 $\mathcal{M}_1=\Phi^{-1}(\{\lambda I\mid\lambda\in\mathbb{C}\})$，$\mathcal{M}_2=\Phi^{-1}(\mathcal{K}(H))$，那么 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 是相似不变子空间且 $\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2=\{0\}$. 利用定理 4.7.7 知，引理成立. 证毕.

引理 4.7.13 设 H 是可分无限维 Hilbert 空间且 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)$ 是有界线性满射. 假定 Φ 双边保相似性，则 T 是拟幂零算子蕴涵 $\Phi(T)$ 也是拟幂零算子；进而，T 是一秩幂零算子蕴涵 $\Phi(T)$ 也是一秩幂零算子.

证明 假定 $\sigma(T)=\{0\}$. [5; 命题 5.13] 告诉我们，存在序列

$V_n \in \mathrm{GL}(\mathcal{B}(H))$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} V_n^{-1}TV_n=0$.由假设, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(V_n^{-1}TV_n) = 0$. 因为 Φ 保相似性, 因此对每个 n, $\Phi(V_n^{-1}TV_n) \in \mathcal{S}(\Phi(T))$. 故 $0 \in \overline{\mathcal{S}(\Phi(T))}$. 所以由引理 4.7.1 知, $\sigma(\Phi(T)) = \{0\}$.

由于 Φ 保相似性, 接下来, 我们只需证明存在一秩幂零算子 T 使得 $\Phi(T)$ 也是一秩的. 令 $x, y \in H$ 是单位向量并满足 $\langle x,y\rangle = 0$, 则 $x \otimes y$ 是一秩幂零算子. 注意到 Φ^{-1} 也保相似性, 故由引理 4.7.12, 存在紧拟幂零算子 Q 使得 $\Phi(Q) = x\otimes y$. 现在引理 4.7.4 及注 4.7.1 蕴涵存在一秩幂零算子 $T \in \overline{\mathcal{S}(Q)}$. 所以 $\Phi(T) \in \overline{\mathcal{S}(x\otimes y)}$. 故 $\Phi(T)$ 是一秩的. 证毕.

引理 4.7.14 设 H 是可分无限维 Hilbert 空间且 $\Phi:\mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ 是有界线性满射. 假定 Φ 双边保相似性, 则对每个一秩幂等元 $x\otimes y$, 有 $\Phi(x\otimes y)$ 是一秩算子.

证明 因为 Φ 双边保相似性, 故对任意的 T, 有 $\Phi(\mathcal{S}(T)) = \mathcal{S}(\Phi(T))$. 如果 $x\otimes y$ 是一秩幂等元, 则由引理 4.7.2 知, $\mathcal{S}(x\otimes y)$ 是闭的. 所以 $\mathcal{S}(\Phi(x\otimes y))$ 也是闭的. 利用引理 4.7.2, $\Phi(x\otimes y)$ 相似于正规算子 N. 用 Φ 的相似变换代替 Φ, 如果必要, 不失一般性, 可假定 $\Phi(x\otimes y) = N$. 我们将证明 $\sigma(N)$ 是由两个点组成的.

事实上, 由引理 4.7.12, N 是一个非零紧算子, 因此 $\sigma(N)$ 不可能是单点集. 如果 $\sigma(N)$ 至少包含三个点, 比如说, $\sigma(N) \supset \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, 那么我们有

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 \end{pmatrix}.$$

设 $\xi \in \ker(N-\lambda_1 I)$, $\eta \in \ker(N-\lambda_2 I)$, $\gamma \in \ker(N-\lambda_3 I)$ 是单位向量. 显然有 $\xi \perp \eta \perp \gamma$ 且 $N \simeq N+\xi\otimes\eta \simeq N+\eta\otimes\gamma \simeq N+\xi\otimes\eta+\eta\otimes\gamma$. 由于 Φ^{-1} 保相似性, 故有

$$\Phi^{-1}(N) \simeq \Phi^{-1}(N+\xi\otimes\eta) \simeq \Phi^{-1}(N+\eta\otimes\gamma) \simeq \Phi^{-1}(N+\xi\otimes\eta+\eta\otimes\gamma).$$

利用引理 4.7.13, 存在 f_i, g_i $(i=1,2)$ 满足 $\langle f_1,g_1\rangle=\langle f_2,g_2\rangle=0$ 使得 $\Phi^{-1}(\xi\otimes\eta)=f_1\otimes g_1$, $\Phi^{-1}(\eta\otimes\gamma)=f_2\otimes g_2$. 所以

$$x\otimes y\simeq x\otimes y+f_1\otimes g_1\simeq x\otimes y+f_2\otimes g_2\simeq x\otimes y+f_1\otimes g_1+f_2\otimes g_2.$$

我们有 $x\otimes y$, $x\otimes y+f_1\otimes g_1$, $x\otimes y+f_2\otimes g_2$, $x\otimes y+f_1\otimes g_1+f_2\otimes g_2$ 都是一秩算子. 从而 $f_1=\mu_1 x$ 或 $g_1=\theta_1 y$, 且 $f_2=\mu_2 x$ 或 $g_2=\theta_2 y$. 因为 $\xi\otimes\eta+\eta\otimes\gamma$ 是秩二幂零算子, 由引理 4.7.13 知, $f_1=\mu_1 x$ 和 $f_2=\mu_2 x$ (或 $g_1=\theta_1 y$ 和 $g_2=\theta_2 y$) 不可能同时成立. 如果 $f_1=\mu_1 x$, 那么 $g_2=\theta_2 y$, 因此 $x\otimes y+f_1\otimes g_1+f_2\otimes g_2=x\otimes(y_1+\overline{\mu_1}g_1)+f_2\otimes\theta_2 y$. 故对某个常数 $\delta\in\mathbb{C}$, $\theta_2 y=\delta(y+\mu_1 g_1)$. 从而 y 和 g_1 线性相关. 因为 y 和 g_1 都不为零, 因而 $g_1=\theta_1 y$. 这蕴涵 $g_1=\theta_1 y$ 和 $g_2=\theta_2 y$ 同时成立, 矛盾. 所以 $\sigma(N)$ 仅包含两个点. 进而, 由引理 4.7.12, N 是紧算子, 因此可假定 $\sigma(N)=\{0,\lambda\}$. 下证 N 是一秩的. 否则, 假定 $\dim\ker(N-\lambda I)\geq 2$. 显然 $\dim(\ker N)=\infty$. 取相互正交的单位向量 ξ_1, $\xi_2\in\ker(N-\lambda I)$ 及相互正交的单位向量 η_1, $\eta_2\in\ker N$. 类似地, 我们有

$$N\simeq N+\xi_1\otimes\eta_1\simeq N+\xi_2\otimes\eta_2\simeq N+\xi_1\otimes\eta_1+\xi_2\otimes\eta_2,$$

上式蕴涵

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(N)&\simeq\Phi^{-1}(N+\xi_1\otimes\eta_1)\simeq\Phi^{-1}(N+\xi_2\otimes\eta_2)\\&\simeq\Phi^{-1}(N+\xi_1\otimes\eta_1+\xi_2\otimes\eta_2).\end{aligned}$$

类似的方式又一次产生矛盾. 故 $\dim\ker(N-\lambda I)=1$, 即 $\Phi(x\otimes y)$ 是一秩算子. 证毕.

引理 4.7.15 设 H 是可分无限维 Hilbert 空间且 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)$ 是有界线性满射. 假定 Φ 双边保相似性. 如果 $\Phi(I)=I$ 且对每个 $K\in\mathcal{K}(H)$, 有 $\Phi(K)=K$, 则对每个 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T)=T$.

证明 首先证明对每个投影 P, 有 $\Phi(P)=P$. 如果 P 或 $I-P$ 是有限秩投影, 则由假设知 $\Phi(P)=P$. 因此下面假定 P 和 $I-P$ 都是无限秩投影. 显然 $P\simeq I-P$. 令 $A=\Phi(P)$, 由引理 4.7.2 知

$\mathcal{S}(A)$ 是闭的且 A 相似于具有有限谱点的正规算子. 下证 $\sigma(A)$ 仅包含两个点.

情形 1 $\sigma(A)$ 仅包含一个点，比如 $\sigma(A)=\{\lambda\}$.

我们有 $A-\lambda I$ 是拟幂零的. 利用引理 4.7.12 及假定，$P-\lambda I$ $(=\Phi^{-1}(A-\lambda I))$ 也是拟幂零的. 此蕴涵 $P=I$, 矛盾.

情形 2 $\sigma(A)$ 至少包含三个点，比如，$\sigma(A)\supset\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$.

存在分解 $H=H_1\oplus H_2\oplus H_3\oplus H_4$, 使我们有

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 I & A_{12} & A_{13} & A_{14}\\ 0 & \lambda_2 I & A_{23} & A_{24}\\ 0 & 0 & \lambda_3 I & A_{34}\\ 0 & 0 & 0 & A_{44}\end{pmatrix}.$$

对任意的单位向量 $x_i\in H_i$ $(i=1,2,3)$, 有

$$A\simeq A+x_1\otimes x_2\simeq A+x_2\otimes x_3\simeq A+x_3\otimes x_3.$$

因此

$$\Phi^{-1}(A)\simeq\Phi^{-1}(A+x_1\otimes x_2)\simeq\Phi^{-1}(A+x_2\otimes x_3)\simeq\Phi^{-1}(A+x_3\otimes x_3),$$

即

$$P\simeq P+x_1\otimes x_2\simeq P+x_2\otimes x_3\simeq P+x_3\otimes x_3.$$

从而，$(P+x_i\otimes x_j)^2=P+x_i\otimes x_j$ $(i\neq j,\ i,j=1,2,3)$. 这表明对于 $i\neq j,\ i,j=1,2,3$, $P(x_i\otimes x_j)+(x_i\otimes x_j)P=x_i\otimes x_j$. 因此对所有的 $x\in H$, 有

$$\langle x,x_j\rangle Px_i+\langle x,Px_j\rangle x_i=\langle x,x_j\rangle x_i,\qquad i\neq j,\qquad i,j=1,2,3.$$

令 $x=x_j$, 则 $Px_i=(1-\langle x_j,Px_j\rangle)x_i$. 由于 P 是投影，故 $Px_i=x_i$ 或 $Px_i=0$. 注意到 $Px_i=x_i$ 蕴涵 $\langle x_j,Px_j\rangle=\langle Px_j,Px_j\rangle=0$ 且 $Px_i=0$ 蕴涵 $Px_j=x_j$. 如果 $Px_1=x_1$, 则

$$Px_1=x_1\Rightarrow Px_2=0\Rightarrow Px_3=x_3\Rightarrow Px_1=0,$$

矛盾. 如果 $Px_1=0$, 类似地可得出矛盾.

因此 $\sigma(A)$ 仅包含两个点, 设 $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2\}$. 由于 A 相似于正规算子, 存在分解 $H=H_1\oplus H_2$, 使 A 有矩阵表示

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 I & X\\ 0 & \lambda_2 I\end{pmatrix}.$$

由上面的证明知, 对于单位向量 $x\in H_1$, 要么 $Px=x$ 要么 $Px=0$. 如果存在单位向量 $x\in H_1$ 使得 $Px=x$, 那么 $PH_2=0$ 且 $PH_1=H_1$. 否则, 我们有 $PH_1=0$ 且 $PH_2=H_2$. 不失一般性, 设 $\operatorname{rng}(P)=H_1$, 即 $P=P_{H_1}$. 由假定, 我们有 $P\simeq I-P$, 因此 $A\simeq I-A$, 此蕴涵 $\lambda_1+\lambda_2=1$.

下证 $\lambda_2=0$. 事实上, 对任意的非零向量 $x\in H_2$, 令 P_x 代表从 H 到 $\{x\}$ 上的投影, 则

$$\Phi^{-1}(A)=P,\quad \Phi^{-1}(A+P_x)=P+P_x.$$

由于 $PP_x=0$ 且 P 和 $P+P_x$ 是无限秩投影, 因此 $P\simeq P+P_x$. 故 $A\simeq A+P_x$. 但 $\lambda_2\neq 0$ 蕴涵 $\sigma(A+P_x)=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2+1\}$, 这是不可能的.

接下来, 我们只需证明 $X=0$. 如果 $X\neq 0$, 则存在向量 $x\in H_2$ 使得 $Xx=y$ 且 $\|y\|=1$. 令 $Y=2x\otimes y$. 则 $P\simeq P+Y$, 从而 $A\simeq A+Y$. 然而 $(A+Y)(y+x)=2(y+x)$ 蕴涵 $2\in\sigma(A+Y)$, 矛盾. 所以 $X=0$ 且 $A=P$. 由谱分解, 对任意的自伴算子 H, 我们有 $\Phi(H)=H$. 故而对每个 $T\in\mathcal{B}(H)$, 都有 $\Phi(T)=T$. 证毕.

定理 4.7.11的证明 由引理 4.7.13 和 4.7.14 知, Φ 保算子的一秩性. 现在由定理 2.1.1 的证明, 存在 $A, B\in\mathrm{GL}(\mathcal{B}(H))$ 使得下列之一成立:

(1) 对每个 $K\in\mathcal{K}(H)$, 有 $\Phi(K)=AKB$.

(2) 对每个 $K\in\mathcal{K}(H)$, 有 $\Phi(K)=AK^{tr}B$, 其中 K^{tr} 代表 K 关于 H 的任一给定基的转置.

注意到 (2) 与定理 2.1.1 证明中的 2 略有不同. 但因为 H 是 Hilbert 空间, 故可选择 A 和 B 使其满足所期望的性质.

如果 (1) 成立, 我们将证明存在 $\alpha\in\mathbb{C}$ 使得 $AB=\alpha I$. 对任意的单位向量 $x,y\in H$, 我们有 $x\otimes x\simeq y\otimes y$. 所以 $A(x\otimes x)B\simeq A(y\otimes y)B$, 即 $Ax\otimes B^*x\simeq Ay\otimes B^*y$. 从而, $\sigma(Ax\otimes B^*x)=\sigma(Ay\otimes B^*y)$ 蕴涵 $\langle BAx,x\rangle=\langle Ax,B^*y\rangle=\langle Ay,B^*y\rangle=\langle BAy,y\rangle$. 因为 A, B 可逆, 于是存在 $\alpha\in\mathbb{C}$ 使得 $AB=BA=\alpha I$. 因此存在 $V\in$GL$(\mathcal{B}(H))$ 使得对每个 $K\in\mathcal{K}(H)$, 有 $\Phi(K)=\alpha V^{-1}KV$.

对任意的 $X\in\mathcal{B}(H)$, 定义 $\Psi(X)=\alpha^{-1}V\Phi(X)V^{-1}$, 则 Ψ 双边保相似性, 满足 $\Psi(I)=I$ 且对任意的 $K\in\mathcal{K}(H)$, 有 $\Psi(K)=K$. 现在由引理 4.7.15 知, 对每个 $X\in\mathcal{B}(H)$, 都有 $\Psi(X)=X$, 这等价于对任意的 $X\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(X)=\alpha V^{-1}XV$.

如果 (2) 成立, 类似地可证明定理 4.7.12 中的 (2) 成立. 证毕.

§4.8 注 记

§4.1, §4.2 和 §4.3 取自 Cui 和 Hou [54], [61], 并与著名的 Kaplansky 问题有关. 在 1897 年, G. Frobenius [74] 证明了线性映射 $\Phi:M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$ 保谱当且仅当存在可逆算子 $T\in M_n(\mathbb{C})$ 使得 Φ 具有形式 $\Phi(\cdot)=T(\cdot)T^{-1}$ 或 $\Phi(\cdot)=T(\cdot)^{tr}T^{-1}$, 即 Φ 是自同构或反自同构, 其中 A^{tr} 代表 A 的转置矩阵. 1949 年, J. Dieudonné [67] 把这个结论推广到 $M_n(\mathbb{C})$ 上保可逆性的线性满射. 在 1959 年, M. Marcus 和 P. Purves [154] 证明了 $M_n(\mathbb{C})$ 上保奇异性的线性映射也具有相同的结构.

在 1967 和 1968 年, A. Gleason [80] 及 J. Kahane 和 W. Żelazko [134, 203] 证明了从 Banach 代数到半单交换 Banach 代数保单位元且保可逆性的线性映射是可乘的, 即是同态. 受 Gleason-Kahane-Żelazko 定理及 Dieudonné 和 Marcus, Purves 上述结论的启发, Kaplansky [135] 在 1970 年提出下面的问题:

是否两个环之间保单位元且保可逆性的可加映射必是 Jordan 同态？

设 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}_1$ 是任意两个含单位元的环满足对任意的非零元 $x \in \mathcal{R}_1$, 有 $2x \neq 0$, 则 Jordan 同态 $\phi: \mathcal{R} \to \mathcal{R}_1$ 保单位元且保可逆性 (例如，见文献 [193; 命题 1.3]), 因此 Kaplansky 问题是这个陈述的逆问题. 在过去的几十年里，泛函界的许多数学工作者先后投身于这一问题的研究，但正如人们所预料的，即使对于一些简单的环类，解决 Kaplansky 问题也是一项非常困难的任务，所以人们首先考虑代数上的线性映射而不是环上的可加映射，进而也把注意力限制到 Banach 代数的情形. 不失一般性，也可假定映射保单位元，否则考虑映射 $a \mapsto \Phi(I)^{-1}\Phi(a)$, 这儿 I 代表代数的单位元. 注意到，如果代数不是半单的，对 Kaplansky 问题的回答是否定的. 例如，设 $\mathcal{T}_n$ 代表矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$ 的上三角矩阵子代数，因为 $\mathcal{T}_n$ 中的元可逆当且仅当它的所有对角元都非零，因此使对角元固定不变的 $\mathcal{T}_n$ 上的每个线性映射都保可逆性，但一般来说这样的映射并不是 Jordan 同态. 如果映射不满，即使对于 C*- 代数，Kaplansky 问题的回答也是否定的. 例如，设 H 是无限维 Hilbert 空间，$\mathcal{A} = \mathcal{B}(H), \mathcal{B} = \mathcal{B}(H \oplus H)$. 假定 $\phi: \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ 是线性映射且满足 $\phi(I) = 0$. 对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 定义 $\Phi(A) = \begin{pmatrix} A & \phi(A) \\ 0 & A \end{pmatrix}$, 则 $\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 保单位元且是保可逆性的线性映射，但一般说来，Φ 不是 Jordan 同态. 因此如果代数没有半单性的假定以及映射没有满射性的假定，那么对 Kaplansky 问题不可能期望得到一般性的结论，从而导致了下面的猜测，也称为 Kaplansky 猜测.

半单 Banach 代数间保单位元且保可逆性的线性满射是否总是 Jordan 同态？

在过去的 30 年里，经过许多人的的努力工作，主要取得了下列研究成果： 1984 年， Choi 等 [44] 证明了 C*- 代数间保单位元且保可逆性的自伴线性映射是 Jordan 同态. 1986 年， Jafarian 和 Sourour [124] 证明了从 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y)$ 的保谱线性满射是同构

或反同构，其中 X, Y 是复 Banach 空间且 $\mathcal{B}(X)$ 代表 X 上的所有有界线性算子构成的 Banach 代数. 1994 年，Aupetit 和 Mouton [13] 把 Jafarian 和 Sourour 的上述结论推广到具有极小理想的本原 Banach 代数上. 1996 年，Sourour [193] 证明了从 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y)$ 保单位元且保可逆性的线性双射是同构或反同构，其中 X 和 Y 是复 Banach 空间. 1998 年，Brešar 和 Šemrl [31] 证明了从 von Neumann 代数到标准算子代数的每个保单位元且保可逆性的线性满射是 Jordan 同态. 1999 年，Harris 和 Kadison [89] 研究了 C*- 代数上仿射映射的相似性问题，并且猜想 Kaplansky 猜测对于 C*- 代数回答是肯定的. 然而，对于 C*- 代数情形，问题至今依然未被解决. 关于 Kaplansky 问题的一些历史性评述，读者可参见文献 [8], [10] 及 [117].

2000 年，Aupetit [11] 证明了半单复 Banach 代数间的保谱线性满射保幂等性，从而得到 von Neumann 代数间的保谱满射是 Jordan 同构.

注意到保单位元且保可逆性的线性映射是谱压缩的. 故更一般，更自然而且更加有趣的问题是如何刻画半单复 Banach 代数间压缩某些谱函数的线性映射. 定理 4.1.2 中的情形之一把保谱的情形推广到谱压缩的情形，并且用统一的方法证明了压缩包含谱边界的某些谱函数的线性满射也保幂等性. 在保可逆性的情形，定理 4.2.2 则对一类更广泛的代数 — 实秩零 C*- 代数，肯定地回答了 Kaplansky 猜测. 有关保持各种谱函数线性映射的其他相关工作，见文献 [32], [106], [171], [185], [191], [192] 和 [204].

由于保理想性与保可逆性密切相关以及人们对保可逆性研究的广泛兴趣 (如上讨论), 因此另一问题是如何刻画 C*- 代数上保理想的线性映射. 在 2000 年，S. Kim [137] 证明了作用在可分 Hilbert 空间上的有限简单 von Neumann 代数 (即 $M_n(\mathbb{C})$ 或 II_1 型因子 von Neumann 代数) 上保单位元的自伴线性双射双边保极大左理想当且仅当它是酉自同构. 注意到每个简单的 von Neumann 代数都是因子，而每个有限因子都是可数可分解的. 去掉 “简单

性”，“双边保持性”和“Hilbert 空间可分性”的假定，定理 4.3.3 大大地推广了这一结论．在文献 [137] 中，S. Kim 还证明了包含单位元的交换 C*- 代数到其自身保极大理想的线性双射是同构与可逆元的乘积．定理 4.3.6 推广了这一结论．

§4.4 和 §4.5 的内容属于 Cui, Hou [56]. 1993 年，Šemrl [186] 证明了从 $\mathcal{B}(X)$ 到其自身上保单位元的线性满射是自同构当且仅当双边保零积，其中 X 是 Banach 空间．作者的证明借助于映射的保秩一性．然而这种方法对于一般的 von Neumann 代数来说是无效的，因为在一般的 von Neumann 代数中有限秩的概念是没有意义的． §4.4 在有界性的假定下，把 Šemrl 的上述结论推广到 von Neumann 代数的情形，并且去掉了双边保持性及保单位性的假定．对于有限 von Neumann 代数上迹秩的性质以及迹秩不增线性映射的刻画问题，也有待于进一步深入研究．

§4.6 则参见 Cui 和 Hou [58]. 1996 年，Brešar 和 Šemrl [29] 证明了从 $\mathcal{B}(X)$ 到其自身保谱半径的线性满射把 k 阶幂零元映成 $2k-1$ 阶幂零元 $(k \geq 2)$．定理 4.6.1 刻画了从 Banach 代数到标准算子代数上谱有界的线性映射，并且在 $k=2$ 的情形改进了 Šemrl 的上述结论，也把保谱半径的线性映射减弱为谱有界的线性映射．注意，定理 4.6.1 证明中的第二步取自 [29].

在文献 [189] 中，Šemrl 证明了 $\mathcal{B}(H)$ 上保单位元的线性双射 Φ 保平方零元当且仅当 Φ 是自同构或是反自同构，并提出问题：是否保单位性的假定可去掉？定理 4.6.7 中断言 2 的证明肯定地回答了 Šemrl 的这一问题．通过去掉保单位性的假定，推论 4.6.8 推广了 [190; 定理 2].

§4.7 来源于 Ji 和 Du [126].

关于 von Neumann 代数上的线性保持问题研究，还有一些有趣的成果．例如，[169] 和 [24] 分别讨论了 $\mathcal{B}(H)$ 和 von Neumann 代数上双边保持交换性线性映射的刻画问题；[27] 给出 $\mathcal{B}(H)$ 上双边保算子正规性线性双射的刻画．

第五章　von Neumann 代数上的可加映射

本章介绍 von Neumann 代数上可加保持问题的一些结果. 第一节讨论保零积的可加映射; 第二节给出保正交性可加映射的刻画; 第三节考虑与 $|\cdot|^k$ 交换的可加映射. 而保某个给定多项式零化元的可加映射将在第六章中加以讨论.

§5.1　保零积的可加映射

§4.4 对 von Neumann 代数上的保零积线性映射进行了讨论, 本节进而考虑保零积可加映射的刻画问题.

回顾一下, 设 Ψ 是某个线性空间上的映射, 如果 Ψ 是可加的且对任何标量 λ 和向量 x 都有 $\Psi(\lambda x)=\overline{\lambda}\Psi x$, 称 Ψ 是共轭线性的. 设 Ψ 是某个代数上的映射, 如果 Ψ 是共轭线性的而且是可乘的, 则称 Ψ 是共轭代数同态. 一对一且满值域 (即, 既是单射又是满射) 的映射称为双射. 下面叙述本节的主要结果.

定理 5.1.1　设 H 为无限维复 Hilbert 空间, $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)$ 为可加双射, 则下列叙述等价:

(i) Φ 是保零积的, 且在 $\mathcal{B}(H)$ 的每个一秩幂等算子张成的一维子空间上的限制是实线性的.

(ii) Φ 是保零积的, 且在 $\mathcal{B}(H)$ 的每个一秩幂等算子张成的一维子空间上的限制是连续的.

(iii) Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的自同构或共轭自同构的常数倍, 即存在复数 λ 以及 H 上的有界可逆线性算子或有界可逆共轭线性算子 A, 使得对所有的算子 $T\in\mathcal{B}(H)$, 都有

$$\Phi(T)=\lambda ATA^{-1}.$$

证明　因为复数域 $\mathbb{C}$ 上的连续可加函数是实线性的, 显然有

(iii)⇒(ii)⇒(i). 下证 (i)⇒(iii). 分几步证之.

断言 1 存在复数 λ 使得 $\Phi(I)=\lambda I$.

令 $B=\Phi(I)$, 则 Φ 的单射性蕴涵 $B\neq 0$. 对任意幂等算子 E 有 $(I-E)E=E(I-E)=0$, 故由 Φ 的可加性及保零积性得

$$(B-\Phi(E))\Phi(E)=\Phi(E)(B-\Phi(E))=0,$$

因此 $B\Phi(E)=\Phi(E)B$, 即对每个幂等算子 E, B 与 $\Phi(E)$ 都交换. 利用定理 1.1.12, 每个无限维复 Hilbert 空间算子都可表为 5 个幂等算子的和. 现在由 Φ 的可加性和满射性立得 B 与每个算子都交换, 从而必是恒等算子的常数倍. 故存在复数 λ 使得 $\Phi(I)=\lambda I$.

令 $\Phi'=\lambda^{-1}\Phi$, 则 Φ' 是保零积双射且满足 $\Phi'(I)=I$. 因此, 不失一般性, 可假定 $\Phi(I)=I$, 从而证明 Φ 是自同构或共轭自同构即可.

断言 2 Φ 保持算子的幂等性, 一秩幂等性和一秩性不变.

设 E 为任一幂等算子, 则由 $E(I-E)=0\Rightarrow\Phi(E)(I-\Phi(E))=0$ 知 $\Phi(E)$ 是幂等算子.

如果 E 是一秩幂等算子, 往证 $G=\Phi(E)$ 也是一秩幂等的. 令

$$X_1=E\mathcal{B}(H)E,\qquad X_2=E\mathcal{B}(H)(I-E),$$
$$X_3=(I-E)\mathcal{B}(H)E,\qquad X_4=(I-E)\mathcal{B}(H)(I-E);$$
$$Y_1=G\mathcal{B}(H)G,\qquad Y_2=G\mathcal{B}(H)(I-G),$$
$$Y_3=(I-G)\mathcal{B}(H)G,\qquad Y_4=(I-G)\mathcal{B}(H)(I-G).$$

于是有

$$\mathcal{B}(H)=X_1\oplus X_2\oplus X_3\oplus X_4=Y_1\oplus Y_2\oplus Y_3\oplus Y_4.$$

容易看出, $\Phi(X_i)\subseteq Y_i$, $i=1,\cdots,4$. 例如, 对任意的 $T\in X_2$, 有 $T^2=0$, $TE=0$ 且 $E+T$ 是幂等的. 于是 $\Phi(T)G=\Phi(T)^2=0$ 且 $G+\Phi(T)$ 是幂等的. 所以

$$\Phi(T)=G\Phi(T)=G\Phi(T)(I-G)\in Y_2.$$

因为 Φ 是满射，因此 $\Phi(X_i)=Y_i$. 注意到 $X_1=\mathbb{C}E$ 是一维的，且 Y_1 与 $\mathcal{B}(\mathrm{rng}(G))$ 同构，又因为 Φ 是从 X_1 到 Y_1 的实线性双射，从而 Y_1 是 2 维的实线性空间，故 G 必为一秩幂等算子.

对任何给定的一秩算子 $x\otimes f$, 取向量 y, g 使得 $\langle x,g\rangle=\langle y,f\rangle=1$, 则 $x\otimes g$ 和 $y\otimes f$ 为一秩幂等算子，于是由上面所证，存在一秩幂等算子 $u\otimes h$ 和 $v\otimes l$ 使得 $\Phi(x\otimes g)=u\otimes h$, $\Phi(y\otimes f)=v\otimes l$. 因为 $(x\otimes f)(I-y\otimes f)=(I-x\otimes g)(x\otimes f)=0$, 故由 Φ 的保零积性得

$$\Phi(x\otimes f)=\Phi(x\otimes g)\Phi(x\otimes f)\Phi(y\otimes f)=\langle\Phi(x\otimes f)v,h\rangle u\otimes l,$$

即 Φ 把一秩算子映为一秩算子.

断言 3 存在环同态 $\tau:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, 使得对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 及一秩算子 $x\otimes f$, 都有

$$\Phi(\lambda x\otimes f)=\tau(\lambda)\Phi(x\otimes f).$$

给定一秩算子 $x\otimes f$. 记 $x_1=\frac{x}{\|x\|}$, $f_1=\frac{f}{\|f\|}$, 而 P,Q 分别是值域为 $[x]^\perp$, $[f]^\perp$ 的投影 (即自伴幂等算子). 由断言 2 知，存在一秩幂等算子 $u\otimes h$ 和 $v\otimes l$, 使得 $\Phi(x_1\otimes x_1)=u\otimes h$, $\Phi(f_1\otimes f_1)=v\otimes l$. 于是由 Φ 的可加保零积性得

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda x\otimes f)&=\Phi(x_1\otimes x_1+P)\Phi(\lambda x\otimes f)\Phi(f_1\otimes f_1+Q)\\&=\Phi(x_1\otimes x_1)\Phi(\lambda x\otimes f)\Phi(f_1\otimes f_1)=\tau'(\lambda)u\otimes l,\end{aligned}$$

其中 $\tau'(\lambda)=\langle\Phi(\lambda x\otimes f)v,h\rangle$. 注意到 $\Phi(x\otimes f)=\tau'(1)u\otimes l$, 令 $\tau(\lambda)=\tau'(\lambda)/\tau'(1)$, 使得

$$\Phi(\lambda x\otimes f)=\tau(\lambda)\Phi(x\otimes f).$$

τ 显然是可加的.

下证 τ 与 x,f 的选取无关. 设 y 为任一非零向量. 令 η,σ 为复数域上的环同态使得 $\Phi(\lambda y\otimes f)=\eta(\lambda)\Phi(y\otimes f)$, $\Phi(\lambda(x+y)\otimes f)=$

$\sigma(\lambda)\Phi((x+y)\otimes f)$ 对任何复数 λ 都成立. 如果 $\langle x,y\rangle=0$, 由 Φ 的可加性及保零积性易得

$$\tau(\lambda)\Phi(x_1\otimes x_1)\Phi(x\otimes f)=\sigma(\lambda)\Phi(x_1\otimes x_1)\Phi(x\otimes f),$$

$$\eta(\lambda)\Phi(y_1\otimes y_1)\Phi(y\otimes f)=\sigma(\lambda)\Phi(y_1\otimes y_1)\Phi(y\otimes f),$$

其中 $x_1=\frac{x}{\|x\|}, y_1=\frac{y}{\|y\|}$. 再注意到 $\Phi(x_1\otimes x_1)\Phi(x\otimes f)=\Phi(x\otimes f)\neq 0$, 故有 $\tau(\lambda)=\sigma(\lambda)$. 同理, 有 $\eta(\lambda)=\sigma(\lambda)$, 从而 $\eta(\lambda)=\tau(\lambda)$. 如果 $\langle x,y\rangle\neq 0$, 任取非零向量 z 使得 $\langle x,z\rangle=\langle y,z\rangle=0$, 则类似于上面论证仍可得 $\eta(\lambda)=\tau(\lambda)$. 这就证明了 τ 与 x 无关. 同样可证 τ 也与 f 的选取无关.

对任意的复数 λ,μ, 由

$$\tau(\lambda)\tau(\mu)\Phi(x\otimes f)=\tau(\lambda)\Phi(\mu x\otimes f)=\Phi(\lambda\mu x\otimes f)=\tau(\lambda\mu)\Phi(x\otimes f),$$

易知 τ 还是可乘的, 从而是环同态.

断言 4 $\tau:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 要么是恒等映射, 即 $\tau(\lambda)\equiv\lambda$; 要么是共轭映射, 即 $\tau(\lambda)\equiv\overline{\lambda}$.

由断言 3 及 Φ 在每个由一秩幂等算子张成的一维子空间上的限制是实线性的假设知 τ 是连续的. 由定理 1.2.8, 复数域上的非平凡连续自同态要么是恒等映射, 要么是共轭映射, 故断言为真.

断言 5 令 $\mathcal{F}(H)$ 为 H 上的有限秩算子组成的算子理想. 则 $\Psi=\Phi|_{\mathcal{F}(H)}:\mathcal{F}(H)\to\mathcal{F}(H)$ 是代数同态或共轭代数同态.

由断言 2~4 知, Ψ 是线性或共轭线性的, 特别地, 它是实线性的且把相互正交的一秩投影映为相互正交的一秩幂等算子. 设 S 为有限秩自伴算子, 则 S 可表示为 $S=\sum_{i=1}^{n}t_iP_i$, 其中 t_i 为实数, P_i 是一组相互正交的一秩投影. 易见, $\Phi(S^2)=\Phi(S)^2$. 于是对任意有限秩自伴算子 S,T, 有

$$\Phi(ST+TS)=\Phi(S)\Phi(T)+\Phi(T)\Phi(S).$$

现在利用 Ψ 的线性或共轭线性, 我们有

$$\Phi(S+iT)^2=\Phi((S+iT)^2),$$

即，Ψ 是 Jordan 同态. 因为 $\mathcal{F}(H)$ 是局部矩阵代数，定理 1.2.7 告诉我们，存在 $\mathcal{F}(H)$ 上的同态 φ 和反同态 ψ 使得 $\Psi=\varphi+\psi$. 任取一秩幂等算子 E. 因为 $\Psi(E)=\varphi(E)+\psi(E)$ 是一秩幂等的，因此幂等算子 $\varphi(E)$ 和 $\psi(E)$ 中至少有一个为零. 这说明 φ 和 ψ 的零空间至少有一个非平凡. 由于同态和反同态的零空间是理想，而 $\mathcal{F}(H)$ 的惟一非零理想就是其自身，所以必有 $\Psi=\varphi$ 或 $\Psi=\psi$. 假如有 $\Psi=\psi$ 成立，取非零向量 x, y, f, g 使得 $\langle x,g\rangle\neq 0$ 而 $\langle y,f\rangle=0$. 则

$$(x\otimes f)(y\otimes g)=0\Rightarrow \Psi(x\otimes f)\Psi(y\otimes g)=0\Rightarrow \Psi((y\otimes g)(x\otimes f))=0$$

$$\Rightarrow (y\otimes g)(x\otimes f)=0\Rightarrow \langle x,g\rangle=0$$

矛盾. 所以 Ψ 是环同态. 再由 Ψ 的线性或共轭线性知断言成立.

断言 6 存在有界可逆线性算子或共轭线性算子 A, 使得对每个 $T\in\mathcal{B}(H)$ 都有

$$\Phi(T)=ATA^{-1}.$$

取单位向量 $x\in H$, 则存在一秩幂等算子 $u\otimes h$ 使得 $\Phi(x\otimes x)=u\otimes h$. 定义映射 $A:H\to H$ 为 $Ay=\Phi(y\otimes x)u$. 显然 A 是线性或共轭线性单射算子. 对任何有限秩算子 F 及向量 z, 由断言 5 可得

$$AFz=\Phi(Fz\otimes x)u=\Phi(F(z\otimes x))u=\Phi(F)\Phi(z\otimes x)u=\Phi(F)Az,$$

故 $AF=\Phi(F)A$ 对每个有限秩算子 F 都成立.

设 E 为幂等算子，令 $S=AE-\Phi(E)A$. 假定 G 为满足 $EG=GE=0$ 的有限秩幂等算子，则有 $SG=AEG-\Phi(E)AG=-\Phi(E)\Phi(G)A=0$. 如果 G 是满足 $EG=GE=G$ 的有限秩幂等算子，则有 $\Phi(E)\Phi(G)=\Phi(G)$, 于是仍有 $SG=\Phi(G)A-\Phi(E)\Phi(G)A=0$. 因此必有 $S=0$, 即 $AE=\Phi(E)A$ 对所有幂等算子 E 都成立. 因为每个算子都是 5 个幂等算子的和，故

$$AT=\Phi(T)A$$

对所有算子 T 都成立. 由于 Φ 是满值域的, 上式说明 $\mathrm{rng}(A)$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的不变算子值域从而必为 H. 所以 A 是双射, $\Phi(T)=ATA^{-1}$ 对所有算子 T 都成立, 即 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的自同构或共轭自同构. 现在 A 的有界性是显然的. 证毕.

定理 5.1.2 设 H 为无限维复 Hilbert 空间, 则 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)$ 为双边保零积的可加满射当且仅当 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的自同构或共轭自同构的常数倍.

证明 设 Φ 是双边保零积的可加满射. 如果 $\Phi(T)=0$, 则对任何算子 S 有 $\Phi(T)\Phi(S)=0$. 因为 Φ 是双边保零积的, 故 $TS=0$, 所以必有 $T=0$, 即 Φ 是单射. 类似于定理 5.1.1 的证明, 可证 $\Phi(I)=\lambda I$, 故可假定 $\Phi(I)=I$. 于是 Φ 双边保幂等性. 设 E 是一秩幂等算子, 若 $\Phi(E)$ 的秩大于 1, 则存在幂等算子 G_1, G_2 使得 $\Phi(E)=G_1+G_2$. 由于 Φ 是双边保幂等性的双射, 故存在幂等算子 E_i 使得 $G_i=\Phi(E_i)$, $i=1,2$. 从而 $E=E_1+E_2$, 矛盾. 因此 Φ 是双边保一秩幂等, 双边保一秩, 且存在复数域上的环同态 τ, 使得对任意一秩算子 $x\otimes f$ 及复数 λ 都有 $\Phi(\lambda x\otimes f)=\tau(\lambda)\Phi(x\otimes f)$. 考查定理 5.1.1 的证明易知, 为完成本定理的证明, 只需说明 τ 是连续的即可. 假如 τ 不连续, 则由泛函方程理论的一个初等结果知, τ 在复数域的某个有界子集上是无界的. 任取有界数列 $\{\lambda_n\}$ 使得 $|\tau(\lambda_n)|\to\infty$, 取相互正交的一秩投影列 $\{P_n\}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_nP_n\in\mathcal{B}(H)$, 故 $T=\Phi\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_nP_n\right)$ 是有界算子. 另一方面, 对每个 n 及 $\mathrm{rng}(\Phi(P_n))$ 中的单位向量 x_n, 有

$$\|T\|\geq\|Tx_n\|=\left\|\Phi\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_iP_i\right)\Phi(P_n)x_n\right\|$$

$$=\|\tau(\lambda_n)\Phi(P_n)x_n\|=|\tau(\lambda_n)|,$$

与 T 的有界性矛盾. 证毕.

由上述定理立得下面推论.

推论 5.1.3 设 H 为无限维复 Hilbert 空间，则下列叙述相互等价：

(i) $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)$ 为保零积的线性双射.

(ii) $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)$ 为双边保零积的线性满射.

(iii) Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的自同构或共轭自同构的常数倍.

注 5.1.1 取可逆线性算子 $A:H\oplus H\to H$，令 $\Phi(T)=A(T\oplus T)A^{-1}$，则 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 到自身的双边保零积线性单射但不是自同构的常数倍. 这说明定理 5.1.1 和定理 5.1.2 中 Φ 的满射性条件不能简单地去掉.

注 5.1.2 定理 5.1.1 中条件"Φ 在 $\mathcal{B}(H)$ 的每个一秩幂等算子张成的一维子空间上是实线性的"用于证明 Φ 的保一秩幂等性，更确切地说，是用于证明 Y_1 是一维的 (见断言 2 的证明). 这个条件也不能被简单地去掉，因为容易证明，存在复数域到二阶矩阵代数 $M_2(\mathbb{C})$ 的一一到上的可加映射 φ，而且满足条件 $\varphi(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

§5.2 保正交性的可加映射

为介绍本节主要结论，先回顾一些概念. 如果 C*- 代数上的映射 π 是共轭线性的，可乘的，且保 $*$ 运算 (即 $\pi(a^*)=\pi(a)^*$ 对 C^*-代数中任意元 a 都成立)，则称 π 是共轭 $*$ 同态. 设 H 是 Hilbert 空间，对于 $A,B\in\mathcal{B}(H)$，若 $A^*B=AB^*=0$，则称 A,B 是正交的. 设 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)$ 是可加映射，如果 $A^*B=0\Leftrightarrow\Phi(A)^*\Phi(B)=0$ 且 $AB^*=0\Leftrightarrow\Phi(A)\Phi(B)^*=0$，则称 Φ 双边保算子正交性. 设 U 是 H 到 H 的映射，若 U 是共轭线性的且 $U^*U=UU^*=I$，称 U 是共轭酉算子.

定理 5.2.1 设 H 是维数大于 2 的复 Hilbert 空间，$\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)$ 是保单位元的可加双射. 如果 Φ 满足

(1) $A^*B=0\Rightarrow\Phi(A)^*\Phi(B)=0$;

(2) $AB^*=0\Rightarrow\Phi(A)\Phi(B)^*=0$;

(3) Φ 在任意由一秩投影生成的一维子空间上的限制是实线性的，

则 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的 *- 自同构或共轭 *- 自同构，即存在酉算子或共轭酉算子 U 使得 $\Phi(T)=UTU^*$ 对任意 $T\in\mathcal{B}(H)$ 都成立.

证明 我们分几步证之.

断言 1 Φ 保投影且保一秩投影.

若 P 是投影，则 $P^*(I-P)=0$. 由条件知 $\Phi(P)^*\Phi(I-P)=0$，从而 $\Phi(P)^*=\Phi(P)^*\Phi(P)$. 因此 $\Phi(P)$ 是自伴幂等元，故 Φ 保投影.

如果 P 是一秩投影，往证 $\Phi(P)$ 是一秩投影. 令 $X_1=P\mathcal{B}(H)P$，$X_2=P\mathcal{B}(H)(I-P)$，$X_3=(I-P)\mathcal{B}(H)P$，$X_4=(I-P)\mathcal{B}(H)(I-P)$，$Y_1=\Phi(P)\mathcal{B}(H)\Phi(P)$，$Y_2=\Phi(P)\mathcal{B}(H)(I-\Phi(P))$，$Y_3=(I-\Phi(P))\mathcal{B}(H)\Phi(P)$ 和 $Y_4=(I-\Phi(P))\mathcal{B}(H)(I-\Phi(P))$. 易证，$\Phi(X_i)\subset Y_i$ $(i=1,2,3,4)$. 事实上，对任意 $T\in X_1$，有 $(I-P)T=T(I-P)=0$，因而 $(I-\Phi(P))\Phi(T)=\Phi(T)(I-\Phi(P))=0$，这说明 $\Phi(T)\in Y_1$. 由 T 的任意性可得 $\Phi(X_1)\subset Y_1$. 同样可证 $\Phi(X_i)\subset Y_i$ $(i=1,2,3,4)$. 因为 Φ 是满射，事实上我们有 $\Phi(X_i)=Y_i$ $(i=1,2,3,4)$. 注意到 $X_1=\mathbb{C}P$ 是一维的，且 Y_1 与 $\mathcal{B}(\mathrm{rng}(\Phi(P)))$ 同构. 由条件 (3), $\Phi:X_1\to Y_1$ 是实线性双射，所以 Y_1 的实维数不大于 2, 而此蕴涵 $\Phi(P)$ 是一秩投影.

断言 2 对任意的 $x,y\in H$, $\lambda\in\mathbb{C}$ 都有 $\Phi(\lambda x\otimes y)=\lambda\Phi(x\otimes y)$，或对任意的 $x,y\in H$, $\lambda\in\mathbb{C}$ 都有 $\Phi(\lambda x\otimes y)=\overline{\lambda}\Phi(x\otimes y)$.

给定非零向量 $x,y\in H$，记 $x'=\frac{x}{\|x\|}$, $y'=\frac{y}{\|y\|}$. 由条件 (1), (2) 以及 $(\lambda x\otimes y)(I-y'\otimes y')=0$ 和 $(I-x'\otimes x')(\lambda x\otimes y)=0$，再由断言 1, 我们有

$$\Phi(\lambda x\otimes y)=\Phi(x'\otimes x')\Phi(\lambda x\otimes y)\Phi(y'\otimes y')=\tau'(\lambda)x''\otimes y'',$$

这里 x'',y'' 是满足条件 $x''\otimes x''=\Phi(x'\otimes x')$ 和 $y''\otimes y''=\Phi(y'\otimes y')$ 的单位向量. 对上式取 $\lambda=1$，得 $\Phi(\lambda x\otimes y)=\tau(\lambda)\Phi(x\otimes y)$，这里 $\tau:\lambda\mapsto\tau(\lambda)=\frac{\tau'(\lambda)}{\tau'(1)}$ 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的可加映射.

现证 τ 与 x,y 的选取无关. 设 x,x',y 都是非零向量满足 $\langle x,x'\rangle=0$. 令 $\tau,\tau',\mu:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是可加映射使

$$\Phi(\lambda x\otimes y)=\tau(\lambda)\Phi(x\otimes y),$$

$$\Phi(\lambda x'\otimes y)=\tau'(\lambda)\Phi(x\otimes y)$$

且

$$\Phi(\lambda(x+x')\otimes y)=\mu(\lambda)\Phi((x+x')\otimes y).$$

由 Φ 的可加性易得

$$\mu(\lambda)\Phi(x\otimes y)+\mu(\lambda)\Phi(x'\otimes y)=\tau(\lambda)\Phi(x\otimes y)+\tau'(\lambda)\Phi(x'\otimes y).$$

对上式两边同时左乘 $\Phi(x\otimes x)^*$ 得

$$\mu(\lambda)\Phi(x\otimes x)^*\Phi(x\otimes y)=\tau(\lambda)\Phi(x\otimes x)^*\Phi(x\otimes y).$$

同样, 两边左乘 $\Phi(x'\otimes x')^*$ 得

$$\mu(\lambda)\Phi(x'\otimes x')^*\Phi(x'\otimes y)=\tau'(\lambda)\Phi(x'\otimes x')^*\Phi(x'\otimes y).$$

记 $z=\frac{x}{\|x\|}$, 则

$$\begin{aligned}&\Phi(x\otimes x)^*\Phi(x\otimes y)\\&=\|x\|^2\Phi(z\otimes z)^*\Phi(x\otimes y)=\|x\|^2\Phi(z\otimes z)\Phi(x\otimes y)\\&=\|x\|^2\Phi(x\otimes y)\neq 0.\end{aligned}$$

同样, 有 $\Phi(x'\otimes x')^*\Phi(x'\otimes y)\neq 0$. 因而, $\tau=\tau'$. 如果 $\langle x,x'\rangle\neq 0$, 存在第三个非零向量 x'' 与 x,x' 都正交, 则由上面的论述仍可得 $\tau=\tau'$. 这就证明了 τ 与 x 无关. 类似可证 τ 与 y 无关.

易证 τ 还是可乘的, 记 τ 是 $\mathbb{C}$ 上的同态. 注意到 τ 在实数域上是恒等映射, 故必有 $\tau(\lambda)\equiv\lambda$ 或 $\tau(\lambda)\equiv\overline{\lambda}$.

断言 3 $\Psi=\Phi|_{\mathcal{F}(H)}$ 是保 $*$ 环同态.

易见, $\Psi:\mathcal{F}(H)\to\mathcal{F}(H)$ 是线性或共轭线性单射. 现我们证明 Ψ 是 $\mathcal{F}(H)$ 上的 Jordan 同态. 设 $S\in\mathcal{F}(H)$ 是任意自伴元, 则

存在 $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ 和相互正交的一秩投影集 $\{P_k\}$ 使得 $S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$.

进而

$$\Psi(S)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Psi(P_k)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \Psi(P_k)$$
$$= \Psi\left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^2 P_k)\right) = \Psi(S^2).$$

于是对于 $\mathcal{F}(H)$ 上任意自伴元 S, T, 都有 $\Psi(ST+TS) = \Psi(S)\Psi(T)+\Psi(T)\Psi(S)$. 由 Ψ 的线性或共轭线性可得

$$\begin{aligned}\Psi(S+iT)^2 &= (\Psi(S) + \tau(i)\Psi(T))^2 \\ &= \Psi(S^2) - \Psi(T^2) + \tau(i)(\Psi(S)\Psi(T) + \Psi(T)\Psi(S)) \\ &= \Psi(S^2 - T^2 + i(ST+TS)) = \Psi((S+iT)^2),\end{aligned}$$

即 $\Psi : \mathcal{F}(H) \to \mathcal{F}(H)$ 是 Jordan 同态. 现在由定理 5.1.1 断言 5 的证明知, 存在 $\mathcal{F}(H)$ 上的同态 φ 和反同态 ψ 使得 $\Psi = \varphi$ 或 $\Psi = \psi$.

下证 Ψ 保 $*$ 运算. 对于自伴算子 $T \in \mathcal{F}(H)$, T 可表示成 $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$, 这里 $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ 是 n 个相互正交的一秩投影. 显然 $\Psi(T) = \sum_{i=1}^{n} \tau(\lambda_i)\Psi(P_i) = \Psi(T)^*$.

其次证明 Ψ 是同态. 如果 Ψ 是反同态, 则对任意 $S, T \in \mathcal{F}(H)$, 我们有

$$S^*T = 0 \Rightarrow \Psi(S)^*\Psi(T) = 0 \Rightarrow \Psi(TS^*) = 0 \Rightarrow TS^* = 0,$$

显然这在一般情况下是不成立的, 所以 Ψ 是同态.

断言 4 存在等距或共轭等距算子 U 使得 $\Phi(T)U = UT$ 对任意 $T \in \mathcal{F}(H)$ 都成立.

取向量 $x_0, y, z \in H$ 使 $\Phi(x_0 \otimes y)z \neq 0$. 定义 $U : H \to H$, $Ux = \Phi(x \otimes y)z$. 则 Ψ 的线性或共轭线性分别蕴涵 U 的线性或共轭

线性. 进而我们有 $UTx = \Psi(Tx \otimes y)z = \Psi(T)\Psi(x \otimes y)z = \Psi(T)Ux$. 所以对任意 $T \in \mathcal{F}(H)$ 都有 $UT = \Psi(T)U$. 因为

$$\begin{aligned}\|Ux\|^2 &= \langle \Phi(x \otimes y)z, \Phi(x \otimes y)z\rangle = \langle \Phi(x \otimes y)^*\Phi(x \otimes y)z, z\rangle \\ &= \langle \|x\|^2\Phi(y \otimes y)z, z\rangle = \|x\|^2\langle \Phi(y \otimes y)z, z\rangle,\end{aligned}$$

选择适当的 z 使得 $\langle \Phi(y \otimes y)z, z\rangle = 1$, 我们可得到等距或共轭等距算子 U 使得 $\Phi(T)U = UT$ 对所有的 $T \in \mathcal{F}(H)$ 成立.

如果 H 是有限维的, 则 U 是满射, 从而 U 是酉算子或共轭酉算子. 于是该定理得证. 所以下面我们总假设 H 是无限维的.

断言 5 对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$ 及任意投影 P, 都有 $\Phi(\lambda P) = \tau(\lambda)\Phi(P)$.

显然, 存在相互正交的一秩投影族 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 使 $P = \sum_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha$ (强算子拓扑收敛), 这里 Λ 是指标集. 我们首先证明 $\Phi(P) = \sum_{\alpha\in\Lambda}\Phi(P_\alpha)$. 注意到

$$\Phi(P)\left(\sum_{\alpha\in\Lambda}\Phi(P_\alpha)\right) = \left(\sum_{\alpha\in\Lambda}\Phi(P_\alpha)\right)\Phi(P) = \sum_{\alpha\in\Lambda}\Phi(P_\alpha).$$

令 $G = \Phi(P) - \sum_{\alpha}\Phi(P_\alpha)$. 由断言 1, 存在 $R \in P\mathcal{B}(H)P$ 使 $\Phi(R) = G$. 因为对任意 $\alpha \in \Lambda$, 都有 $G\Phi(P_\alpha) = \Phi(P_\alpha)G = 0$, 并且 Φ 是单射, 所以 $R \in (I-P_\alpha)\mathcal{B}(H)(I-P_\alpha)$. 因此 $R = RP = R(\sum_{\alpha} P_\alpha) = 0$. 故 $G = 0$.

现对任意 $x \in \mathrm{rng}(\Phi(P_{\alpha_0}))$, 我们有

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P)x &= \left(\Phi(\lambda P_{\alpha_0}) + \sum_{\alpha\neq\alpha_0}\Phi(\lambda P_\alpha)\right)\Phi(P_{\alpha_0})x \\ &= \Phi(\lambda P_{\alpha_0})\Phi(P_{\alpha_0})x + \left(\sum_{\alpha\neq\alpha_0}\Phi(\lambda P_\alpha)\right)\Phi(P_{\alpha_0})x \\ &= \tau(\lambda)x.\end{aligned}$$

所以对任意 $x \in \text{rng}(\Phi(P))$, 都有 $\Phi(\lambda P)x = \tau(\lambda)\Phi(P)x$. 因为 $\lambda P \in P\mathcal{B}(H)P$, 由断言 1 可得, $\Phi(\lambda P) \in \Phi(P)\mathcal{B}(H)\Phi(P)$. 进而对任意 $x \in \text{rng}(I - \Phi(P))$, 有

$$\Phi(\lambda P)x = \Phi(\lambda P)(I - \Phi(P))x = 0,$$

$$\tau(\lambda)\Phi(P)x = \tau(\lambda)\Phi(P)(I - \Phi(P))x = 0.$$

所以 $\Phi(\lambda P) = \tau(\lambda)\Phi(P)$.

断言 6 U 是酉算子或共轭酉算子且 $\Phi(T) = UTU^*$ 对任意 $T \in \mathcal{B}(H)$ 成立.

我们先证明 $\Phi(\lambda P)U = U(\lambda P)$, 这里 P 是任意投影. 如断言 5 的证明, P 可表示为 $P = \sum\limits_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha$, 于是有

$$\Phi(\lambda P) = \tau(\lambda)\Phi(P) = \tau(\lambda)\sum_{\alpha\in\Lambda}\Phi(P_\alpha) = \sum_{\alpha\in\Lambda}\Phi(\lambda P_\alpha)$$

且

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P)U &= \left(\sum_{\alpha\in\Lambda}\Phi(\lambda P_\alpha)\right)U = \sum_{\alpha\in\Lambda}(\Phi(\lambda P_\alpha)U) \\ &= \sum_{\alpha\in\Lambda}U(\lambda P_\alpha) = U\sum_{\alpha\in\Lambda}\lambda P_\alpha = U(\lambda P)\end{aligned}$$

由定理 1.1.12 知, $\mathcal{B}(H)$ 中任意元可表示成有限个投影的线性组合, 故 $\Phi(T)U = UT$ 对所有 $T \in \mathcal{B}(H)$ 都成立. 由 Φ 的满射性可得 U 为酉算子或共轭酉算子. 于是对任意 T, 我们有 $\Phi(T) = UTU^*$. 证毕.

§5.3 与 $|\cdot|^k$ 交换的可加映射

记 $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$. 设 k 为正数, 如果对任意 A 都有 $\Phi(|A|^k) = |\Phi(A)|^k$, 则称 Φ 与运算 $|\cdot|^k$ 交换.

令 H 是复 Hilbert 空间, $\mathcal{A}$ 是作用在 H 上的 von Neumann 代数, 记 $\mathcal{A}^+ = \{A \in \mathcal{A} \mid A \geq 0\}$, $\mathcal{A}^{s.a.} = \{A \in \mathcal{A} \mid A^* = A\}$.

定理 5.3.1 设 k 是正数， $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}(H)$ 为可加映射且满足 $\Phi(|A|^k)=|\Phi(A)|^k$ 和 $\mathcal{F}(H)\subset\mathrm{rng}(\Phi)$. 如果 $k=1$, 则 $\Phi=c\Psi$, 这里 c 为正实数， Ψ 为 $*$- 同态或共轭 $*$- 同态；如果 $k\neq 1$, 则 Φ 是 $*$- 同态或共轭 $*$- 同态. 而且， $\mathcal{A}$ 不可能是 III 型的.

证明 分几步证之.

断言 1 Φ 把 $\mathcal{A}^+,\mathcal{A}^{s.a.}$ 分别映到 $\mathcal{B}(H)^+$ 和 $\mathcal{B}(H)^{s.a.}$ 中，而且 Φ 是保序的，实线性的，连续的.

设 $A\in\mathcal{A}^+$, 则存在 $B\in\mathcal{A}^+$ 使 $B=A^{\frac{1}{k}}$. 由于

$$\Phi(A)=\Phi(B^k)=\Phi(|B|^k)=|\Phi(B)|^k.$$

所以 $\Phi(A)\in B(H)^+$ 且 $\Phi(A^k)=\Phi(A)^k$ 对任意 $A\in\mathcal{A}^+$ 成立. 由此可知，对任意 $A\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(|A|)=|\Phi(A)|$. 因为自伴元可表示成两个正元的差，所以 Φ 是保自伴的，从而 Φ 是保序的. 现在我们固定 $A\in\mathcal{A}^+$ 及 $\lambda\in\mathbb{R}$, 考虑满足 $r<\lambda<s$ 的有理数 r,s. 因为 Φ 是可加的，从而是 $\mathbb{Q}$- 线性的，其中 $\mathbb{Q}$ 表示有理数域. 进而我们有

$$\begin{aligned}r\langle\Phi(A)x,x\rangle&=\langle\Phi(rA)x,x\rangle\leq\langle\Phi(\lambda A)x,x\rangle\\&\leq\langle\Phi(sA)x,x\rangle=s\langle\Phi(A)x,x\rangle.\end{aligned}$$

这就证明了，对任意的 $x\in H$, 都有 $\langle\Phi(\lambda A)x,x\rangle=\langle\lambda\Phi(A)x,x\rangle$. 由于 H 是复 Hilbert 空间，故必有 $\Phi(\lambda A)=\lambda\Phi(A)$, 即 Φ 是实线性的.

对任意 $A\in\mathcal{A}$. 由不等式 $|A|\leq\||A|\|I=\|A\|I$, 我们有 $|\Phi(A)|=\Phi(|A|)\leq\|A\|\Phi(I)$, 所以 $\|\Phi(A)\|\leq\|A\|\|\Phi(I)\|$, 此蕴涵 Φ 是连续的.

断言 2 对任意一秩投影 $P\in\mathcal{B}(H)$, 都存在正数 c 和投影 $E\in\mathcal{A}$ 使得 $\Phi(cE)=P$.

注意到 $\mathcal{F}(H)\subset\mathrm{rng}(\Phi)$ 且 P 是正的，故存在正元 $A\in\mathcal{A}$ 使 $\Phi(A)=P$. 令

$$A=\int_{[0,\|A\|]}\lambda dE_\lambda$$

是 A 的谱分解. 设

$$N_n=\int_{[\frac{1}{n},\|A\|]}\lambda dE_\lambda,\quad K_n=\int_{[0,\frac{1}{n})}\lambda dE_\lambda=A-N_n.$$

我们断言存在 $n\in\mathbb{N}$ 使 $\Phi(E(B_n))\neq 0$, 这里 $B_n=[\frac{1}{n},\|A\|]$. 事实上, 若不然, 利用 Φ 的连续性和实线性, 可得对任意 $n\in\mathbb{N}$, $\Phi(N_n)=0$. 因为当 $n\to\infty$ 时, 有 $K_n\to 0$, 故我们也有 $\Phi(K_n)\to 0$. 这蕴涵 $\Phi(A)=0$, 矛盾. 现设 $n\in\mathbb{N}$ 使 $\Phi(E(B_n))\neq 0$. 由于 $\frac{1}{n}E(B_n)\leq A$, 所以 $\Phi(\frac{1}{n}E(B_n))\leq\Phi(A)=P$. 由 P 的极小性及 $\Phi(\frac{1}{n}E(B_n))$ 的正性知, 存在正数 c 使 $\Phi(cE(B_n))=P$.

断言 3 对任意自伴元 $S\in\mathcal{A}$, 都有

$$\Phi(iS)^*\Phi(I)+\Phi(I)\Phi(iS)=0 \tag{5.3.1}$$

并且

$$\Phi(S)^2-\frac{1}{2}\Phi(S^2)\Phi(I)-\frac{1}{2}\Phi(I)\Phi(S^2)=0. \tag{5.3.2}$$

注意到对任意 $t\in\mathbb{R}$, e^{itS} 都是酉算子. 所以

$$\Phi(e^{itS})^*\Phi(e^{itS})=\left|\Phi(e^{itS})\right|^2=\Phi(\left|e^{itS}\right|)^2=\Phi(I)^2=\Phi(I)^*\Phi(I).$$

根据 Φ 的连续性, 实线性以及解析函数的幂级数展式

$$e^{itS}=I+itS+\frac{1}{2}(itS)^2+\ \cdots$$

的惟一性, 我们有

$$\Phi(iS)^*\Phi(I)+\Phi(I)\Phi(iS)=0$$

并且

$$\Phi(iS)^*\Phi(iS)+\frac{1}{2}(\Phi((iS)^2))^*\Phi(I)+\frac{1}{2}\Phi(I)\Phi((iS)^2)=0.$$

因为 $\Phi(I)$, $\Phi(S)$ 和 $\Phi(S^2)$ 都是自伴的, 又因为

$$\Phi(iS)^*\Phi(iS)=|\Phi(iS)|^2=\Phi(|iS|)^2=|\Phi(S)|^2=\Phi(S)^2,$$

故等式 (5.3.1) 和 (5.3.2) 成立.

断言 4 $\Phi(I)$ 是恒等映射的正数倍. 如果 $k\neq 1$, 则 $\Phi(I)=I$.

取单位向量 $x\in H$, 令 $P=x\otimes x$. 由断言 2, 可取正数 c 和投影 E 使 $P=\Phi(cE)$. 利用等式 (5.3.2), 我们有

$$\begin{aligned}P=P^2=\Phi(cE)^2&=\frac{1}{2}(\Phi(c^2E)\Phi(I)+\Phi(I)\Phi(c^2E))\\&=\frac{c}{2}(\Phi(cE)\Phi(I)+\Phi(I)\Phi(cE))=\frac{c}{2}(P\Phi(I)+\Phi(I)P).\end{aligned}$$

于是得

$$x=Px=\frac{c}{2}(\langle\Phi(I)x,x\rangle x+\Phi(I)x).$$

这证明了对任意 $x\in H$, 存在 $\lambda_x\in\mathbb{C}$ 使 $\Phi(I)x=\lambda_x x$. 因而存在复数 λ 使 $\Phi(I)=\lambda I$. 又因 $P=\frac{c}{2}(P\Phi(I)+\Phi(I)P)$, 故 $\Phi(I)$ 是正的, 所以 $\lambda\in\mathbb{R}^+$.

如果 $k\neq 1$, 则 $\Phi(I)$ 是投影. 事实上, 因为 $\Phi(I)^k=\Phi(I^k)=\Phi(I)\geq 0$, 我们有 $\lambda^k=\lambda$. 故 $\lambda=1$, 从而 $\Phi(I)=I$.

下面我们不妨设 $\Phi(I)=I$ (必要时用 $\lambda^{-1}\Phi$ 代替 Φ), 并证明 Φ 是 $*$- 同态或共轭 $*$- 同态.

断言 5 对任意自伴算子 S, 都有 $\Phi(iS)=\Phi(iI)\Phi(S)$ 且 $\Phi(iI)\in\{iI,-iI\}$. 因此, Φ 是线性或共轭线性的.

我们首先证明 $W=\Phi(iI)$ 是酉算子. 由断言 3 和断言 4 可知

$$\Phi(iS)^*=-\Phi(iS)\quad 且\quad \Phi(S)^2=\Phi(S^2),$$

这里 S 是 $\mathcal{A}$ 中任意自伴元. 所以

$$\Phi(iI)^*=-\Phi(iI).$$

因为

$$W^*W=|\Phi(iI)|^2=(\Phi(|iI|^2))=\Phi(I)=I,$$

也有 $WW^*=I$, 所以 W 是酉算子.

根据断言 3 的证明，我们有 $|\Phi(iS)| = |\Phi(S)|$. 设 P 是 $\mathcal{A}$ 中的投影，则 $\Phi(iP)$ 和 $\Phi(i(I+P))$ 都是正规元. 所以存在酉算子 U, V 使得

$$\Phi(iP) = U\,|\Phi(iP)| = U\Phi(P), \quad \Phi(i(I+P)) = V\Phi(I+P).$$

从而我们有下式成立：

$$V + V\Phi(P) = W + U\Phi(P).$$

利用断言 3, $\Phi(P)$ 是幂等元，故由条件知 $\Phi(P)$ 是投影. 如果 $x \in \mathrm{rng}(\Phi(P))$ 是单位向量，则 $2Vx = Vx + Vx = Wx + Ux$. 由于 Vx, Ux, Wx 都是单位向量，而两个单位向量和的范数为 2 的充分必要条件是这两个单位向量相等，所以 $Wx = Ux$. 于是我们有 $W\Phi(P) = U\Phi(P)$. 这就证明了 $\Phi(iP) = \Phi(iI)\Phi(P)$. 又,

$$-\Phi(iP) = \Phi(iP)^* = \Phi(P)^*\Phi(iI)^* = -\Phi(P)\Phi(iI).$$

由谱分解定理和 Φ 的连续性以及 P 的任意性，我们得到

$$\Phi(iS) = \Phi(iI)\Phi(S) = \Phi(S)\Phi(iI)$$

对任意自伴元 $S \in \mathcal{A}$ 都成立. 而此蕴涵

$$\Phi(iI)\Phi(iS) = \Phi(iI)\Phi(S)\Phi(iI) = \Phi(iS)\Phi(iI),$$

从而 $\Phi(iI)$ 与 Φ 值域中的所有元交换. 特别地， $\Phi(iI)$ 与任意有限秩算子交换. 所以存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使 $\Phi(iI) = \alpha I$. 易见 $\alpha \in \{i, -i\}$.

断言 6 Φ 保 $*$ 运算.

对任意 $A \in \mathcal{A}$, 存在 $B, C \in \mathcal{A}^{s.a.}$ 使 $A = B + iC$. 所以

$$\Phi(A) = \Phi(B) + \Phi(iI)\Phi(C),$$

$$\Phi(A^*) = \Phi(B) - \Phi(iI)\Phi(C)$$

且

$$\Phi(A)^* = \Phi(B) - \Phi(iI)\Phi(C) = \Phi(A^*).$$

断言 7　Φ 是同态或反同态.

由断言 3, 对任意自伴元 $S \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(S)^2 = \Phi(S^2)$, 故 Φ 必是 Jordan 同态. 根据文献 [92], 如果 Φ 是从环 $\mathcal{R}$ 到 $\mathcal{B}(H)$ 的可加映射且满足 $\mathcal{F}(H) \subset \text{rng}(\Phi)$ 和 $\Phi(a)^2 = \Phi(a^2)$ $(a \in \mathcal{R})$, 则 Φ 是环同态或环反同态, 利用此结论, 断言 7 得证.

断言 8　Φ 是 $*$- 同态或共轭 $*$- 同态.

由断言 5~7, 我们只须验证 Φ 不是环反同态. 设其不然, 则对任意 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$\Phi(A)^*\Phi(A) = |\Phi(A)|^2 = \Phi(|A|^2) = \Phi(A^*A) = \Phi(A)\Phi(A)^*,$$

但上式显然不能对所有 $A \in \mathcal{A}$ 都成立.

断言 9　$\mathcal{A}$ 不是 III 型的.

设 P 是 $\mathcal{B}(H)$ 中的一秩投影, 则有 $\mathcal{A}$ 中的投影 E 使 $\Phi(E) = P$. 我们证明 E 可选为有限投影. 设 E 是无限的, 则存在相互正交的投影 E_1 和 E_2 使 $E_1 + E_2 = E$, 且 E_1 是有限投影, E_2 是纯无限投影. 进而 $\Phi(E_1) + \Phi(E_2) = P$. 由 P 的极小性, $\Phi(E_1) = 0$ 或 $\Phi(E_2) = 0$. 如果 $\Phi(E_1) = 0$, 则 $\Phi(E_2) = P$. 又 E_2 是纯无限投影, 故存在相互正交的投影 F_1, F_2 使 $F_1 \sim F_2 \sim E_2$, $F_1 + F_2 = E_2$. 令 U, V 是始投影分别为 F_1 和 F_2, 终投影为 E_2 的部分等距. 类似地我们有 $\Phi(F_1) = 0$ 或者 $\Phi(F_2) = 0$. 如果 $\Phi(F_1) = 0$, 则

$$\Phi(U^*U) = \Phi(U)^*\Phi(U) = 0.$$

于是 $\Phi(U) = 0$, 从而 $\Phi(E_2) = \Phi(U)\Phi(U)^* = 0$. 同样, $\Phi(F_2) = 0$ 蕴涵 $\Phi(E_2) = 0$, 矛盾. 所以 $\Phi(E_1) = P$, 且 E_1 是有限投影. 证毕.

推论 5.3.2　设 k 是正数, $\mathcal{A}$ 是 H 上的 von Neumann 代数. 假定 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ 是线性映射满足 $\mathcal{F}(H) \subset \text{rng}(\Phi)$. 则 Φ 是 $*$-

同态的充分必要条件是存在正数 $k\neq 1$ 使得 $|\Phi(A)|^k=\Phi(|A|^k)$ 对任意 $A\in\mathcal{A}$ 都成立.

§5.4 注　记

§5.1 主要取材于 Hou,Gao [114] 关于可加保零积映射的刻画. Šemrl [186] 证明了如下结果：设 X 为维数大于 1 的 Banach 空间, Φ 为 $\mathcal{B}(X)$ 上的线性满射. 如果 Φ 是双边保零积的且 $\Phi(I)=I$, 则 Φ 是自同构. §5.1 的结果说明, 在无限维复 Hilbert 空间的情形, 可以去掉"双边"或" $\Phi(I)=I$ "的条件, 也可把线性情形推广到可加情形.

§5.2 和 §5.3 的内容属于 Bai, Hou [16]. 定理 5.2.1 的特殊情形, 即对于复无限维可分 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(H)$ 上双边保算子正交性的可加双射的刻画是 Molnàr [162] 给出的. Molnàr [162] 还在 $\mathcal{A}=\mathcal{B}(H)$ 并且 k 为正整数的情形获得与定理 5.3.1 类似的结果. 另外一些相关工作见 Jing [128] 等.

因为 von Neumann 代数上可加映射的研究要比线性映射的研究更为困难, 可加保持方面的问题很多但成果很少. 有兴趣的读者可以作进一步探讨.

第六章　保多项式零化元的线性和可加映射

本章讨论算子代数上保某个给定多项式零化元的线性和可加映射的刻画问题. 第一节首先在纯代数的情形考虑保持阶大于 1 且无重根的多项式之零化元的线性映射. 我们证明了如果这样的线性映射是保单位的, 则它必保幂等性. 这使得我们能够用保多项式零化元的线性映射给出代数同态的刻画. 在第二节, 我们把第一节的结果应用于算子代数上的线性映射. 令 $\mathcal{P}_0$ 为所有阶大于 1、没有重根且常数项为零的多项式集合. 令 $f \in \mathcal{P}_0$ 且 $\phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是保 f 零化元的线性映射. 我们证明, 在许多情形, ϕ 具有良好的代数结构. 例如, 我们证明了只要满足下面条件: (1)$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是标准算子代数而 ϕ 是弱连续的满射; 或 (2)$\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Y)$, 其中 X 是具有无限重复度的 Banach 空间, ϕ 是满射且存在有限秩算子 F 使得 $\phi(F) \neq 0$, 则存在可逆算子 A 以及满足 $\lambda^k = 1$ 的复数 λ 使得要么 $\phi(T) = \lambda ATA^{-1}$ 对所有 $T \in \mathcal{A}$ 都成立, 要么 $\phi(T) = \lambda AT^*A^{-1}$ 对所有 $T \in \mathcal{A}$ 都成立. 如果 $\mathcal{A}$ 是 von Neumann 代数, $\mathcal{B}$ 是含单位元的 Banach 代数, 且如果 ϕ 还是有界的, 则 ϕ 事实上与 Jordan 同态只相差一个 k- 幂等元因子. 注意到, 在第一、二节中没有假设 ϕ 是保单位的, 也没有假设 ϕ 的双边保持性. 而且, 在许多情形, 甚至没有假设 ϕ 的值域满性和任何连续性. 第三节讨论 $\mathcal{B}(H)$ 上双边保平方幂零性的可加映射, 其中 H 为 Hilbert 空间. 主要结果是定理 6.3.4. 第四节则在 Banach 空间情形考虑双边保幂零性可加映射的表示问题, 在幂零算子张成的子空间上给出此类可加映射的具体刻画. 在三、四节讨论的基础上, 第五节进一步考虑了 $\mathcal{B}(H)$ 上双边保 k- 幂零性的可加映射, 从而获得保任意给定多项式零化元的可加满射的完全刻画. 作为第四节的应用, 第六节给出标准算子代数上保谱半径可加满射的

完全刻画.

§6.1 代数上保多项式零化元的线性映射

令 $f(x)$ 为阶大于 1 的复系数多项式. 设 a 是某代数中的一个元, 如果 $f(a)=0$, 则称 a 零化 $f(x)$ 或 a 是 f 的零化元. 我们说从一代数到另一代数的线性映射 ϕ 保多项式 $f(x)$ 的零化元如果 $f(a)=0$ 蕴涵 $f(\phi(a))=0$; 如果 $f(\phi(a))=0 \Leftrightarrow f(a)=0$, 则称 ϕ 双边保多项式 $f(x)$ 的零化元.

本节给出有关刻画代数之间保某个给定阶大于 1, 无重根多项式之零化元的线性映射的几个结果. 设 $f(x)$ 是一多项式, 记 f 之零点的集合为 $\mathcal{Z}(f)$, 把所有满足 $\lambda\mathcal{Z}(f)=\mathcal{Z}(f)$ 的非零复数 λ 的集合记为 $G(f)$. 本节中记代数的单位元为 1.

定理 6.1.1 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为两个有单位元的复代数, $\phi: \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是保单位的线性映射. 则下列陈述等价:

(1) 存在某个阶大于 1 、无重根的多项式 $f(x)$ 使得当 $a\in\mathcal{A}$ 且 $f(a)=0$ 时, 有 $f(\phi(a))=0$.

(2) ϕ 是保幂等性的.

(3) 对每个阶大于 1, 无重根的多项式 $g(x)$, 以及 $a\in\mathcal{A}$, 有 $g(a)=0$ 蕴涵 $g(\phi(a))=0$.

证明 (3)⇒(1) 是显然的.

(2)⇒(3). 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 g 的根. 由标准的线性代数方法可证, $g(a)=0$ 当且仅当存在 $\mathcal{A}$ 中相互正交的幂等元族 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 使得 $1=\sum\limits_{j=1}^{n}e_j$ 且 $a=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j e_j$. 然而, 如果 ϕ 是保幂等性的, 则 ϕ 也保幂等元的正交性, 这是因为幂等元 e 和 u 是正交的当且仅当 $e+u$ 是幂等元.

(1)⇒(2). 假设 (1) 为真. 如必要的话, 用 $f(\alpha+(\beta-\alpha)x)$ 代替 $f(x)$, 可设 $f(0)=f(1)=0$. 满足 $\lambda\mathcal{Z}(f)\subset\mathcal{Z}(f)$ 的非零复数 λ 必是数 1 的根 (因为 $\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\cdots$ 都在集合 $\mathcal{Z}(f)$ 中). 令

$G=\{\lambda\in\mathbb{C},\ \lambda\neq 0\mid\lambda\mathcal{Z}(f)\subset\mathcal{Z}(f)\}$. 由 $\mathcal{Z}(f)$ 的有限性知, G 是单位圆周的有限乘法子群, 从而存在某个正整数 k 使得 $G=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\lambda^k=1\}=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\lambda\mathcal{Z}(f)=\mathcal{Z}(f)\}=G(f)$. 于是 $g(x)=x^{k+1}-x$ 是 $f(x)$ 的因式且 G 是 $g(x)$ 的所有非零零点的集合. 如果 $e\in\mathcal{A}$ 是幂等元而 $\alpha\in\mathcal{Z}(f)$, 则 $f(\alpha e)=f(\alpha(1-e))=0$. 此蕴涵 $f(\alpha\phi(e))=f(\alpha(1-\phi(e)))=0$. 假设 λ 是 $\phi(e)$ 的最小多项式的一个根. 由于 $\lambda\mathcal{Z}(f)\subset\mathcal{Z}(f)$ 及 $(1-\lambda)\mathcal{Z}(f)\subset\mathcal{Z}(f)$, 故 λ 和 $1-\lambda$ 都是 G 中的元. 由此可知, $\phi(e)$ 和 $1-\phi(e)$ 的最小多项式都是 $g(x)$ 的因式. 于是我们有 $g(\phi(e))=g(1-\phi(e))=0$. 如果假设 $\phi(e)$ 的最小多项式有一个根 λ 满足 $0\neq\lambda\neq 1$, 那么 $\lambda^k=1$ 和 $(1-\lambda)^k=1$ 同时成立. 因而要么 $\lambda=e^{\frac{\pi}{3}i}$ 要么 $\lambda=e^{-\frac{\pi}{3}i}$. 再注意到, 对 G 中任意的 λ_1 和 λ_2 以及 $\mathcal{Z}(f)$ 中的任意 α, 我们有 $f(\alpha(\lambda_1(1-e)+\lambda_2 e))=f(\alpha\lambda_1)(1-e)+f(\alpha\lambda_2)e=0$. 因而 $\lambda_1(1-\phi(e))+\lambda_2\phi(e)$ 的最小多项式的非零根都落在 G 中. 特别地, 取 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda^{-1}$, 我们得到 $2-\lambda\in G$, 矛盾. 证毕.

注 6.1.1 定理 6.1.1 不能被推广到有重根多项式的情形. 例如, 令 $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}\mid\alpha,\beta\in\mathbb{C}\right\}$, $\phi:\mathcal{A}\to M_2(\mathbb{C})$ 是定义为 $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\alpha+\beta&0\\0&\alpha\end{pmatrix}$ 的线性映射. 显然, ϕ 保单位元且保幂等性, 但是 ϕ 并不保多项式 $f(x)=x^2$ 的零化元. 若令 $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}\right\}$, 而令 $\phi:\mathcal{A}\to M_3(\mathbb{C})$ 是定义为 $\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\alpha+\beta-\gamma&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$ 的线性映射, 则 ϕ 保单位并保 $f(x)=x^2$ 的零化元, 但显然 ϕ 并不保幂等性.

为证本节的主要定理, 我们还需要下面的引理.

引理 6.1.2 设 $k\geq 2$ 是正整数, $\mathcal{B}$ 是有单位元的复代数,

$u,v\in\mathcal{B}$ 使得 $v^{k+1}=v$, $(u-v)^{k+1}=u-v$ 且对所有 s,t $(1\le s,t\le k)$ 都有

$$\left(e^{\frac{2\pi is}{k}}u+(e^{\frac{2\pi it}{k}}-e^{\frac{2\pi is}{k}})v\right)^{k+1}=e^{\frac{2\pi is}{k}}u+(e^{\frac{2\pi it}{k}}-e^{\frac{2\pi is}{k}})v$$

成立，则 $uv=vu$, 且 $u=0$ 蕴涵 $v=0$.

证明 令 $s=t=k$, 我们有 $u^{k+1}=u$. 注意到，当 $m\in\mathbb{N}$ 时我们有 $\sum_{t=1}^{k}\left(e^{\frac{2\pi it}{k}}\right)^m=\sum_{t=1}^{k}\left(e^{\frac{2\pi im}{k}}\right)^t$ 等于 0 如果 k 不整除 m, 等于 k 如果 k 整除 m. 显然，当 $u=0$ 时，对于 $1\le s,t\le k$, 我们有

$$(e^{\frac{2\pi it}{k}}-e^{\frac{2\pi is}{k}})^{k+1}v=(e^{\frac{2\pi it}{k}}-e^{\frac{2\pi is}{k}})v.$$

因为 $k\ge 2$, 故必有 $v=0$.

令 $w=u-v$. 由于 $e^{\frac{2\pi is}{k}}u+(e^{\frac{2\pi it}{k}}-e^{\frac{2\pi is}{k}})v=e^{\frac{2\pi is}{k}}w+e^{\frac{2\pi it}{k}}v$, 若取 $s=k$, 则对所有 $1\le t\le k$, 都有

$$\left(w+e^{\frac{2\pi it}{k}}v\right)^{k+1}=w+e^{\frac{2\pi it}{k}}v.$$

上式的左边展开后等于 w^{k+1} 与一些形如 $\left(e^{\frac{2\pi it}{k}}\right)^m q_m$ 的项之和，其中 q_m 是所有含 m 个因子 v 和 $k+1-m$ 个因子 w 的乘积之和. 通过计算和式 $\sum_{t=1}^{k}\left(w+e^{\frac{2\pi it}{k}}v\right)^{k+1}$ 可知，除了 $m=k$ 的情形，所有形如 $\left(e^{\frac{2\pi it}{k}}\right)^m q_m$ 的项都抵消了，从而我们有

$$\sum_{t=1}^{k}\left(w+e^{\frac{2\pi it}{k}}v\right)^{k+1}=kw^{k+1}+kq_k=kw+kq_k.$$

另一方面，由计算知 $\sum_{t=1}^{k}\left(w+e^{\frac{2\pi it}{k}}v\right)=kw$. 故 $q_k=0$. 现在利用 $v^{k+1}=v$ 及简单的计算可得

$$0=vq_k-q_kv=vw-wv.$$

所以 $vw = wv$. 由此易知 $uv = vu$. 证毕.

令 $\mathcal{P}_0$ 表示所有阶大于 1 、没有重根且满足 $f(0) = 0$ 的多项式 f 的集合.

定理 6.1.3 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是有单位元的复代数， $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是线性映射. 又设 $f(x)$ 是 $\mathcal{P}_0$ 中的一个多项式使得只要 $a \in \mathcal{A}$ 且 $f(a) = 0$ 就有 $f(\phi(a)) = 0$ 成立. 那么, 存在正整数 k, 多项式 $h(x)$ 以及 $\mathcal{B}$ 中正交的幂等元族 $p_1, \cdots, p_k$ 使得下列条件成立:

(1) $f(x) = xh(x^k)$;

(2) 如果 λ 是 $x^k - 1$ 的根， 则 $\lambda \mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$;

(3) 对每个幂等元 $a \in \mathcal{A}$ 都有 $g(\phi(a)) = 0$, 其中 $g(x) = x^{k+1} - x$;

(4) $\phi(1) = \sum_{s=1}^{k} e^{\frac{2\pi s i}{k}} p_s$;

(5) 对每个 s $(1 \le s \le k)$ 及每个幂等元 $a \in \mathcal{A}$, 都有 p_s 与 $\phi(a)$ 交换;

(6) 对每个幂等元 $a \in \mathcal{A}$ 都有 $\phi(a) = \sum_{s=1}^{k} \phi(a) p_s$.

证明 令 $G = G(f) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0 \mid \lambda \mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)\}$. 则 G 是单位圆周上的有限乘法子群，从而，存在正整数 k 使得 $G = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda^k = 1\}$. 由此立得条件 (1) 和 (2) 成立. 类似于定理 6.1.1 的证明，如果 a 是代数 $\mathcal{A}$ 中的幂等元而 $\lambda \neq 0$ 是 $\phi(a)$ 的最小多项式的根，则 $\lambda \in G$. 因此 (3) 也成立. 又因为 $g(\phi(1)) = 0$, 条件 (4) 必为真，且对某些 s 的取值，有可能 $p_s = 0$.

如果 $k = 1$, 由 (3) 可得 ϕ 保幂等性, 故而对每个幂等元 $a \in \mathcal{A}$, $\phi(a)$ 和 $\phi(1-a)$ 是相互正交的幂等元，其和为 $\phi(1)$. 此蕴涵，对每个幂等元 $a \in \mathcal{A}$, 都有 $\phi(a)\phi(1) = \phi(1)\phi(a) = \phi(a)$. 所以 (5) 和 (6) 为真.

如果 $k \ge 2$, 则对每个幂等元 $a \in \mathcal{A}$, 每个 $\alpha \in \mathcal{Z}(f)$ 以及所有整数 s 和 t 满足 $1 \le s, t \le k$, 我们有 $f\left(\alpha\left(e^{\frac{2\pi i s}{k}} 1 + (e^{\frac{2\pi i t}{k}} - e^{\frac{2\pi i s}{k}})a\right)\right) = 0$. 所以， $e^{\frac{2\pi i s}{k}}\phi(1) + (e^{\frac{2\pi i t}{k}} - e^{\frac{2\pi i s}{k}})\phi(a)$ 的最小多项式的每个非

零根都在 G 中. 令 $u=\phi(1)$, $v=\phi(a)$, 则引理 6.1.2 的条件被满足. 现在由引理 6.1.2 易知 (5) 和 (6) 成立. 证毕.

对于 $\mathbb{C}$ 上的代数 $\mathcal{A}$, 用 $\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$ 表示 $\mathcal{A}$ 中元构成的 $n\times n$ 矩阵全体的集合. 这个集合仍是一个复代数. 如果 $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是线性映射, 用 ϕ_n 表示从 $\mathcal{A}\otimes M_n(\mathbb{C})$ 到 $\mathcal{B}\otimes M_n(\mathbb{C})$ 的线性映射, 它把每个矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 映为 $(\phi(a_{ij}))_{n\times n}$. 应用定理 6.1.1 和定理 6.1.3, 我们可获得代数之间同态的一种刻画. L_b 和 R_b 分别表示左乘和右乘 b 的映射, 即对任意的 x, $L_bx=bx$, $R_bx=xb$.

推论 6.1.4 设 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 为有单位的复代数. 令 $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 为线性映射, $f(x)\in\mathcal{P}_0$. 如果 ϕ_2 保 f 的零化元, 则存在 Jordan 同态 $\psi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, 使得对 $\mathcal{A}$ 中任意元 a 及任意可逆元 c 都有 $\psi(c)\psi(c^{-1}ac)=\psi(a)\psi(c)$ 成立, 并且 $\phi=L_{\phi(1)}\circ\psi=R_{\phi(1)}\circ\psi$.

证明 显然, ϕ 也保 f 的零化元. 如同定理 6.1.3, 取 $\mathcal{B}$ 中的正交幂等元族 $p_1,\cdots,p_k$. 那么, $\phi(1)=\sum\limits_{s=1}^{k}e^{\frac{2\pi si}{k}}p_s$, $p=\sum\limits_{s=1}^{k}p_s=\phi(1)^k$ 且对 $\mathcal{A}$ 中任意幂等元 e, 有 $\phi(1)\phi(e)=\phi(e)\phi(1)$, $\phi(e)=p\phi(e)=\phi(e)p$. 我们断定这两个关系式对 $\mathcal{A}$ 中的所有元都成立. 事实上, 对任意 $a\in\mathcal{A}$, 如果取 $\mathcal{A}\otimes M_2(\mathbb{C})$ 中幂等元 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 且记 $\phi_2(1)=\begin{pmatrix}\phi(1) & 0\\ 0 & \phi(1)\end{pmatrix}$, 则有

$$\begin{pmatrix}\phi(1)^2 & \phi(1)\phi(a)\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\phi_2(1)\phi_2(A)=\phi_2(A)\phi_2(1)=\begin{pmatrix}\phi(1)^2 & \phi(a)\phi(1)\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\phi(1) & p\phi(a)\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\phi_2(A)^{k+1}=\phi_2(A)=\begin{pmatrix}\phi(1) & \phi(a)\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

由此易得 $\phi(1)\phi(a)=\phi(a)\phi(1)$ 且 $\phi(a)=p\phi(a)$. 如果取 $A=$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, 则得 $\phi(a) = \phi(a)p$. 因此 ϕ 的值域包含在 $\mathcal{B}_1 = p\mathcal{B}p$ 中, 显然 $\mathcal{B}_1$ 是以 p 为单位元的 $\mathcal{B}$ 的子代数. 进而, 对所有的 $a \in \mathcal{A}$, 我们有每个 p_s 都与 $\phi(a)$ 交换. 令 $b_0 = \sum_{s=1}^{k} e^{-\frac{2\pi si}{k}} p_s$, $\psi = b_0\phi$. 则 $\phi = \phi(1)\psi$. 把 ϕ 看作是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}_1$ 中的线性映射, 则由定理 6.1.3 (2) 得 $e^{-\frac{2\pi si}{k}}\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$, 从而 ψ 和 ψ_2 都保单位且保 f 的零化元. 所以, 再由定理 6.1.1 知, ψ 和 ψ_2 都是保幂等性的. 下面我们证明 ψ 实际上是 Jordan 同态.

对 $\mathcal{A}$ 中任意元 a 及可逆元 c, $\begin{pmatrix} a & c \\ c^{-1}(a-a^2) & 1-c^{-1}ac \end{pmatrix}$ 是 $\mathcal{A} \otimes M_2(\mathbb{C})$ 中的幂等元. 于是 $\begin{pmatrix} \psi(a) & \psi(c) \\ \psi(c^{-1}(a-a^2)) & 1-\psi(c^{-1}ac) \end{pmatrix}$ 也是幂等的. 因而我们有

$$\psi(a)^2 + \psi(c)\psi(c^{-1}(a-a^2)) = \psi(a) \tag{6.1.1}$$

$$\psi(a)\psi(c) + \psi(c)(1-\psi(c^{-1}ac)) = \psi(c). \tag{6.1.2}$$

在恒等式 (6.1.1) 中, 令 $c = 1$, 则可得 $\psi(a^2) = \psi(a)^2$, 即 ψ 是 Jordan 同态. 由 (6.1.2) 式, 我们有

$$\psi(c)\psi(c^{-1}ac) = \psi(a)\psi(c). \tag{6.1.3}$$

证毕.

推论 6.1.5 令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为有单位的复代数. 令 $\phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为线性映射而 $f(x)$ 是 $\mathcal{P}_0$ 中的多项式. 则下列陈述是等价的:

(1) ϕ_3 保零化 $f(x)$ 的元.

(2) 存在代数同态 $\psi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 正整数 n (≥ 2) 及 n- 幂等元 b 使得 b 的最小多项式的非零根都落在 $G(f)$ 中且 $\phi = L_b \circ \psi = R_b \circ \psi$.

证明 (2)⇒(1). 记 $\phi = b\psi$, 其中 ψ 是同态而 b 是 n- 幂等元, 即 $b^n = b$. 令 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$ 为 b 的最小多项式的非零根集合,

则存在一族相互正交的幂等元 $\{e_1, \cdots, e_l\}$ 使得 $b = \sum_{s=1}^{l} \lambda_s e_s$ 且 $e_s\psi(a) = \psi(a)e_s$ 对所有 $a \in \mathcal{A}$ 成立. 设 $a \in \mathcal{A}$ 且 $f(a) = 0$. 则由假设 $\lambda_s \mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$ $(1 \leq s \leq l)$, 有 $f(\lambda_s a) = 0$. 又由于 ψ 是同态, 故 $f(\phi(a)) = f(\sum_{s=1}^{l} \lambda_s e_s \psi(a)) = \sum_{s=1}^{l} \psi(f(\lambda_s a))e_s = 0$. 因为 ψ_3 仍然是同态, 易证 ϕ_3 也保持 f 的零化元.

(1)⇒(2). 因为 ϕ_2 保持 f 的零化元, 应用推论 6.1.4, 存在满足方程 (6.1.3) 的 $(k+1)$- 幂等元 b 及 Jordan 同态 ψ 使得 $\phi = b\psi = \psi b$, 其中 k 是 $G(f)$ 的阶数. 我们证明 ψ 事实上是同态.

不失一般性, 可以假设 ψ 是保单位的 (否则, 如同推论 6.1.4 的证明, 用 $\mathcal{B}_1 = p\mathcal{B}p$ 代替 $\mathcal{B}$). 于是 ψ_3 保幂等性. 对 $\mathcal{A}$ 中的任意元 a, w 以及任意的可逆元 c, 由于

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c^{-1}(a-a^2) & 1-c^{-1}ac & 0 \\ wa-w & wc & 1 \end{pmatrix}$$

是幂等元, 故

$$\begin{pmatrix} \psi(a) & \psi(c) & 0 \\ \psi(c^{-1}(a-a^2)) & 1-\psi(c^{-1}ac) & 0 \\ \psi(wa-w) & \psi(wc) & 1 \end{pmatrix}$$

也是幂等的. 因而我们有

$$\psi(wa-w)\psi(c) + \psi(\omega c)(1-\psi(c^{-1}ac)) + \psi(wc) = \psi(wc),$$

即

$$\psi(wa)\psi(c) - \psi(w)\psi(c) + \psi(wc) - \psi(wc)\psi(c^{-1}ac) = 0. \quad (6.1.4)$$

众所周知, 保单位的 Jordan 同态 ψ 是保可逆性的, 并且 $\psi(c^{-1}) = \psi(c)^{-1}$. 故由 (6.1.3) 式可得, $\psi(c^{-1}ac) = \psi(c)^{-1}\psi(a)\psi(c)$, 而

(6.1.4) 式则变为

$$\psi(wa)\psi(c)-\psi(w)\psi(c)+\psi(wc)-\psi(wc)\psi(c)^{-1}\psi(a)\psi(c)=0. \quad (6.1.5)$$

在 (6.1.5) 式中取 $w=c^{-1}$, 不难看出

$$\psi(c^{-1}a)=\psi(c)^{-1}\psi(a)$$

对所有元 a 及所有可逆元 c 都成立. 再利用 (6.1.5) 式, 可得 $\psi(wa)=\psi(w)\psi(a)$, 即 ψ 是同态. 证毕.

§6.2 算子代数上保多项式零化元的线性映射

应用 §6.1 的结果, 本节讨论有单位的算子代数之间保 $\mathcal{P}_0$ 中某个给定多项式之零化元的线性映射, 即保阶大于 1 、无重根且满足 $f(0)=0$ 的多项式 f 的零化元的线性映射. 我们这里所考虑的问题主要是确定在什么条件下这样的线性映射可以用同态、反同态或至少用 Jordan 同态来描述.

下面定理给出标准算子代数上保 $\mathcal{P}_0$ 中某个给定多项式之零化元的弱连续线性满射的刻画. 回顾一下, $\mathcal{B}(X)$ 中一个范闭子代数 $\mathcal{A}$ 称为是标准算子代数, 如果 $\mathcal{A}$ 包含恒等元 I 以及 $\mathcal{B}(X)$ 中所有的有限秩算子. 当然, $\mathcal{B}(X)$ 本身就是一个标准算子代数. 我们说线性映射 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 与多项式 $f(x)$ 交换, 如果 $f(\Phi(a))=\Phi(f(a))$ 对所有 $a\in\mathcal{A}$ 都成立.

定理 6.2.1 令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别为 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数. 设 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是按弱算子拓扑连续的线性满射, $f(x)$ 是阶大于 1 、无重根且满足 $f(0)=0$ 的多项式. 则下列叙述等价:

(1) ϕ 与 $f(x)$ 交换.

(2) ϕ 保零化 $f(x)$ 的元.

(3) 存在满足 $\lambda\mathcal{Z}(f)=\mathcal{Z}(f)$ 的复数 1 的根 λ, 并且存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{A}$ 都有 $\Phi(T)=\lambda ATA^{-1}$ 成立; 或存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X^*,Y)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{A}$ 都有 $\Phi(T)=\lambda AT^*A^{-1}$ 成立. 在后一情形, X 和 Y 必都是自反的.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(3)⇒(1). 假设 (3) 成立. 令 k 为群 $G(f)$ 的阶, 记 $f(x)$ 的阶为 $\deg f = n$. 因为 $f(0) = 0$, 条件 $\lambda\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$ 蕴涵 k 整除 $n-1$. 所以 $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. 如果 $\Phi(T) = \lambda ATA^{-1}$, 则 $f(\Phi(T)) = Af(\lambda T)A^{-1} = \Phi(f(T))$, 即 (1) 成立.

(2)⇒(3). 假设 $\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是弱连续的线性满射且保 $f(x)$ 的零化元. 我们断定, 存在满足条件 $\lambda\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$ 和 $\lambda^k = 1$ 的复数 λ, 使得 $\Phi(I) = \lambda I$. 取正如定理 6.1.3 中的 k (≥ 1), 那么, 对任意幂等元 $P \in \mathcal{A}$, 我们有 $\Phi(P)^{k+1} = \Phi(P)$, $\Phi(I)\Phi(P) = \Phi(P)\Phi(I)$. 注意到, 每个秩为 1 的算子都能表示为至多两个秩为 1 的幂等元的线性组合. 于是 Φ 的弱连续性和所有有限秩算子集合在 $\mathcal{B}(X)$ 中的弱稠密性一起蕴涵

$$\Phi(I)\Phi(S) = \Phi(S)\Phi(I)$$

对每个 $S \in \mathcal{A}$ 都成立. 又由于 $\mathcal{F}(Y) \subset \mathcal{B}$, 因此 $\Phi(I)$ 等于恒等算子的常数倍. 显然, $\Phi(I) \neq 0$, 否则的话, 定理 6.1.3 (6) 将蕴涵 $\Phi(P) = \Phi(P)\Phi(I) = 0$ 对所有幂等元 P 都成立, 从而必有 $\Phi = 0$. 所以, $\Phi(I) = \lambda I$, 其中 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda^k = 1$. 利用定理 6.1.3 的 (2) 和 (4), 得 $\lambda\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$.

令 $\Psi = \lambda^{-1}\Phi$. 由于 $\lambda^{-1}\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$, 易见 $\Psi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是保单位的弱连续线性满射且仍保 $f(x)$ 的零化元. 根据定理 6.1.1, Ψ 是保幂等性的. 于是由 [26; 定理 3.3] 知, Ψ 是同构或反同构. 因此, 存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ 使得

$$\Phi(T) = \lambda ATA^{-1} \qquad \forall T \in \mathcal{A};$$

或者存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X^*, Y)$ 使得

$$\Phi(T) = \lambda AT^*A^{-1} \qquad \forall T \in \mathcal{A},$$

其中 $\lambda^k = 1$. 显然, 在后一情形, X 和 Y 都是自反的 (其证明参考定理 2.1.13). 证毕.

注 6.2.1 如果关于 Φ 的弱连续性假设代之为在强算子拓扑下连续或在 σ- 弱算子拓扑下连续，定理 6.2.1 仍然成立.

下面我们考虑 von Neumann 代数上的线性映射.

定理 6.2.2 设 $\mathcal{A}$ 为 von Neumann 代数，$\mathcal{B}$ 为有单位的 Banach 代数. 令 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是有界线性映射，$f(x)$ 为一阶大于 1、无重根且满足 $f(0)=0$ 的多项式. 则下列叙述等价:

(1) Φ 与 $f(x)$ 交换.

(2) Φ 保持 $f(x)$ 的零化元.

(3) 存在谱包含在 $\{\lambda \mid \lambda\mathcal{Z}(f)=\mathcal{Z}(f)\}$ 中的 r- 幂等元 $B\in\mathcal{B}$, 以及 Jordan 同态 $\Psi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, 使得 $\Phi=L_B\circ\Psi=R_B\circ\Psi$, 其中 L_B 和 R_B 分别代表左乘 B 和右乘 B 的映射.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(3)⇒(1). 记 B 的谱为 $\sigma(B)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_l\}$. 则存在 $\mathcal{B}$ 中的正交幂等元族 $P_1,\cdots,P_l$ 使得 $B=\sum\limits_{s=1}^{l}\lambda_sP_s$. 由于每个 λ_s 都满足 $\lambda_s\mathcal{Z}(f)=\mathcal{Z}(f)$, 我们有 $B^{k+1}=B$, 其中 $k\ (\geq 1)$ 正如定理 6.1.3 中所取. 显然 $P_s\Psi(T)=\Psi(T)P_s$. 现在，如果 T 是 $\mathcal{A}$ 中的任意元, 则由于 Ψ 为 Jordan 同态，故有 $f(\Phi(T))=\sum\limits_{s=1}^{l}f(\lambda_s\Psi(T)P_s)=$
$\sum\limits_{s=1}^{l}\lambda_sf(\Psi(T))P_s=\sum\limits_{s=1}^{l}\lambda_sP_s\Psi(f(T))=\Phi(f(T))$.

(2)⇒(3). 把 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 中的单位元都记为 I. 由定理 6.1.3, 存在 $\mathcal{B}$ 中的正交幂等元族 $P_1,\cdots,P_{k-1}$, 使得只要 $\mathcal{A}$ 中的元 A 满足 $A^2=A$, 就有 P_s 与 $\Phi(A)$ 交换，且 $\Phi(A)=\Phi(A)\sum\limits_{s=1}^{k-1}P_s$, 同时有 $\Phi(I)=\sum\limits_{s=1}^{k-1}e^{\frac{2\pi si}{k-1}}P_s$. 令 $P=\sum\limits_{s=1}^{k-1}P_s$, $B_0=\Phi(I)+(I-P)$. 则有 $P^2=P$, $B_0^{k-1}=I$ 且当 $A^2=A$ 时，$B_0\Phi(A)=\Phi(A)B_0=\Phi(I)\Phi(A)=\Phi(A)\Phi(I)$. 因为 von Neumann 代数中所有投影 (即自伴幂等元) 的线性组合之集合按范数拓扑是稠密子集，且因为 Φ

是连续的，故对所有元 $S\in\mathcal{A}$，我们有 $\Phi(S)=\Phi(S)P=P\Phi(S)$，$B_0\Phi(S)=\Phi(S)B_0=\Phi(I)\Phi(S)$. 令 $\mathcal{B}_1=P\mathcal{B}P, \Psi=L_{B_0^{-1}}\circ\Phi$. 因为 $\mathcal{B}_1$ 是以 P 为单位元的 Banach 代数，且 $\Psi(I)=P$，易知 $\Psi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 有界，值域包含于 $\mathcal{B}_1$，且保 f 的零化元. 根据定理 6.1.1, Ψ 保幂等性，从而把 $\mathcal{A}$ 中的正交幂等元集映为 $\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}$ 中的正交幂等元集.

现在，若 $T=T^*$ 是 von Neumann 代数 $\mathcal{A}$ 中的自伴元，则 T 是相互正交的投影之实线性组合的极限. 从而，由 Ψ 的连续性，$\Psi(T)$ 是相互正交的幂等元之线性组合的极限. 因此，对 $\mathcal{A}$ 中的每个自伴元 T，都有 $\Psi(T^2)=\Psi(T)^2$ 成立. 从而 Ψ 是 Jordan 同态且 $\Phi=L_{B_0}\circ\Psi=L_B\circ\Psi=R_B\circ\Psi$，其中 $B=\Phi(I)$. 证毕.

推论 6.2.3 设 $\mathcal{A},\mathcal{B},\Phi$ 及 f 如定理 6.2.2 中所设. 如果 Φ 是满射，则下列叙述等价:

(1) Φ 与 $f(x)$ 交换.

(2) Φ 保持零化 $f(x)$ 的元.

(3) 在 $\mathcal{B}$ 中心中存在可逆 r- 幂等元 B，满足条件 $\sigma(B)\subset\{\lambda\mid\lambda\mathcal{Z}(f)=\mathcal{Z}(f)\}$，且存在从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 上的 Jordan 同态 Ψ，使得 $\Phi=L_B\circ\Psi=R_B\circ\Psi$.

证明 仍把 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 中的单位元记为 I. 如同定理 6.2.2 中的证明，令 $B=\Phi(I)$, $P=\sum\limits_{s=1}^{k-1}P_s$. 因为 Φ 是满射，B 和 P 必与 $\mathcal{B}$ 中的每个元都交换，从而 B 和 P 都属于 $\mathcal{B}$ 的中心. 进而，$\Phi(S)=\Phi(S)P$ 对 $\mathcal{A}$ 中每个元 S 都成立. 由此可知 $P=I$，从而 $\Phi(I)$ 可逆. 现在，令 $\Psi=L_{B^{-1}}\circ\Phi$ 并应用定理 6.2.2, 推论得证. 证毕.

注意，在上述推论中，如果 $\mathcal{B}$ 是因子，那么存在某个复数 λ 使得 $\lambda^{k-1}=1, B=\lambda I$. 如果 $\mathcal{B}$ 是素代数，则到 $\mathcal{B}$ 上的 Jordan 同态要么是同态，要么是反同态. 所以，当 $\mathcal{B}$ 既是因子又是素代数时，Φ 必是同态或反同态与数 1 的某个根的乘积. 特别是，我们有

推论 6.2.4 设 H 和 K 为 Hilbert 空间, $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 为有界线性满射. 令 $f(x) \in \mathcal{P}_0$. 则下列叙述等价:

(1) Φ 保持零化 $f(x)$ 的元.

(2) 存在满足 $\lambda \mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$ 的数 1 的根 λ 以及可逆算子 $A \in \mathcal{B}(H,K)$ 使得对所有 $T \in \mathcal{B}(H)$, 都有 $\Phi(T) = \lambda ATA^{-1}$ 成立, 或对所有 $T \in \mathcal{B}(H)$, 都有 $\Phi(T) = \lambda AT^{tr}A^{-1}$ 成立, 其中 T^{tr} 表示 T 关于 H 的任意给定的标准正交基的转置.

比较定理 6.2.1 和推论 6.2.4, 对于 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ 和 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(K)$ 的情形, 其中 H 和 K 为 Hilbert 空间, 我们把 Φ 为弱连续的假设条件减弱为 Φ 有界. 在证明了下面引理之后, 我们还可以去掉连续性假设而得到更强的结果.

我们说 Banach 空间 X 具有无限重复度, 如果 X 以下述方式同构于 $X \oplus X$ 以及 X 的无限直接和 $X^{(\infty)}$: 坐标的任意置换及形如 $T^{(\infty)}$ $(T \in \mathcal{B}(X))$ 的变换都是有界线性算子, 且对任意的 T, $S \in \mathcal{B}(X)$, 作用在 $X^{(\infty)} \oplus X^{(\infty)}$ 上的算子 $T^{(\infty)} \oplus S^{(\infty)}$ 相似于作用在 $(X \oplus X)^{(\infty)}$ 上的算子 $(T \oplus S)^{(\infty)}$. 无限维的 c_0- 空间, 无限维的 l^p- 空间, $L^p[0,1], 1 \le p \le \infty$, 以及无限维的 Hilbert 空间都是具有无限重复度的 Banach 空间的例子 [86].

引理 6.2.5 设 X 和 Y 为复 Banach 空间, $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 是线性映射. 令 $f(x)$ 为阶大于 1 、无重根且满足 $f(0) = 0$ 的多项式. 如果 Φ 保持零化 f 的元且如果 X 具有无限重复度, 则 $\Phi(T)\Phi(I) = \Phi(I)\Phi(T)$ 对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$ 都成立, 且存在保幂等性的线性映射 $\Psi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 使得 $\Phi = L_{\Phi(I)} \circ \Psi$.

证明 由定理 6.1.3 可知, 存在 $\mathcal{B}(Y)$ 中的正交幂等元族 $P_1, \cdots, P_{k-1}$ 使得只要 $T^2 = T$, P_s $(s = 1, \cdots, k-1)$ 就与 $\Phi(T)$ 交换, 且 $\Phi(T) = \Phi(T)\sum_{s=1}^{k-1} P_s$, $\Phi(I) = \sum_{s=1}^{k-1} e^{\frac{2\pi si}{k-1}} P_s$. 令 $B = \Phi(I)$, $P = \sum_{s=1}^{k-1} P_s$. 则 $B^k = B$, $P^2 = P$. 因为 X 具有无限重复度, 由 [86] 可知, 每个 $S \in \mathcal{B}(X)$ 都可表示为 $\mathcal{B}(X)$ 中幂等元的和的差. 从而对所有的 $S \in \mathcal{B}(X)$, 都有 $\Phi(S)B = B\Phi(S)$, $\Phi(S) = \Phi(S)P = P\Phi(S)$.

令 $B_0 = B + (I - P)$, $\Psi = B_0^{-1}\Phi$. 则 Ψ 保多项式 f 的零化元且 $\Psi(I) = P$. 若令 $Y_0 = \mathrm{rng}(P)$, 定义 $\theta : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y_0)$ 为 $\theta(S) = \Psi(S)|_{Y_0}$, 那么 θ 是保单位的，故由定理 6.1.1, θ, 从而还有 Ψ, 是保幂等性的. 证毕.

定理 6.2.6 令 X, Y , Φ 以及 f 如同引理 6.2.5 所设. 如果 Φ 是满射，且 $\Phi|_{\mathcal{F}(X)} \neq 0$, 则 Φ 保零化 $f(x)$ 的元当且仅当存在满足 $\lambda\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$ 的数 1 的某个根 λ, 且存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, 使得对所有 $T \in \mathcal{B}(X)$, 都有 $\Phi(T) = \lambda ATA^{-1}$ 成立，或者存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X^*,Y)$, 使得对所有 $T \in \mathcal{B}(X)$, 都有 $\Phi(T) = \lambda AT^*A^{-1}$ 成立. 在后一情形， X 和 Y 都是自反的.

证明 由引理 6.2.5, 显然存在满足 $\lambda\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$ 和 $\lambda^k = 1$ 的数 λ, 使得 $\Phi(I) = \lambda I$. 于是有 $\Phi = \lambda\Psi$, 其中 Ψ 是保幂等性的满射. 我们往证 Ψ 是同构或者是反同构.

如果 $R \in \mathcal{B}(X)$ 是秩一幂等元，我们首先证明 $\Psi(R)$ 最多也是秩一的. 记 $\mathcal{M}_1 = R\mathcal{B}(X)R$, $\mathcal{M}_2 = R\mathcal{B}(X)(I - R)$, $\mathcal{M}_3 = (I - R)\mathcal{B}(X)R$, $\mathcal{M}_4 = (I - R)\mathcal{B}(X)(I - R)$. 于是 $\mathcal{B}(X) = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{M}_3 \oplus \mathcal{M}_4$. 类似地， $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{N}_3 \oplus \mathcal{N}_4$, 其中 $\mathcal{N}_1 = \Psi(R)\mathcal{B}(Y)\Psi(R)$, $\mathcal{N}_2 = \Psi(R)\mathcal{B}(Y)(I - \Psi(R))$, $\mathcal{N}_3 = (I - \Psi(R))\mathcal{B}(Y)\Psi(R)$, $\mathcal{N}_4 = (I-\Psi(R))\mathcal{B}(Y)(I-\Psi(R))$. 由于 $\mathcal{M}_1 = \mathbb{C}R$, 我们有 $\Psi(\mathcal{M}_1) = \mathbb{C}\Psi(R) \subseteq \mathcal{N}_1$. 取 $S \in \mathcal{M}_2$, 则 $R + \alpha S$ 以及 $\Psi(R) + \alpha\Psi(S)$ 对任意 $\alpha \in \mathbb{C}$ 都是幂等的. 因而我们有

$$\Psi(R)\Psi(S) + \Psi(S)\Psi(R) + \alpha\Psi(S)^2 = \Psi(S),$$

而此蕴涵 $\Psi(S)^2 = 0$, $\Psi(S) = (I-\Psi(R))\Psi(S)\Psi(R)+\Psi(R)\Psi(S)(I-\Psi(R)) \in \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{N}_3$. 所以， $\Psi(\mathcal{M}_2) \subseteq \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{N}_3$. 类似地， $\Psi(\mathcal{M}_3) \subseteq \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{N}_3$. 令 $S \in \mathcal{M}_4$ 为任意的幂等算子，那么 $RS = SR = 0$, 从而 $\Psi(R)\Psi(S) = \Psi(S)\Psi(R) = 0$. 于是 $\Psi(S) \in \mathcal{N}_4$. 注意到，关于空间分解 $X = \mathrm{rng}(R) \oplus \ker R$, $\mathcal{M}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \mid C \in \mathcal{B}(\ker R) \right\}$. 如果 $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 中的幂等算子，则 $P_{22} - P_{22}^2 = P_{21}P_{12}$

是秩一算子，从而 P_{22} 是幂等算子与秩一算子的和．这显然蕴涵每个 $C\in\mathcal{B}(\ker R)$ 都是 $\mathcal{B}(\ker R)$ 中幂等元的线性组合．因而我们有 $\Psi(\mathcal{M}_4)\subseteq\mathcal{N}_4$．由此可得 $\Psi(\mathcal{B}(X))\subseteq\mathbb{C}\Psi(R)\oplus\mathcal{N}_2\oplus\mathcal{N}_3\oplus\mathcal{N}_4$．但是 Ψ 是到上的，故必有 $\mathbb{C}\Psi(R)=\mathcal{N}_1=\Psi(R)\mathcal{B}(Y)\Psi(R)$，而此蕴涵 $\Psi(R)$ 或为秩一算子或为 0.

现在由 [26; 定理 3.2] 知，$\Psi|_{\mathcal{F}(X)}$ 是 Jordan 同态．因为 $\mathcal{F}(X)$ 是局部矩阵代数，故 $\Psi|_{\mathcal{F}(X)}=\xi+\eta$，其中 $\xi:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{B}(Y)$ 是同态，而 $\eta:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{B}(Y)$ 是反同态．又因为 $\Psi|_{\mathcal{F}(X)}\neq 0$，所以存在秩一幂等算子 R 使得 $\Psi(R)\neq 0$. 如上所证，$\Psi(R)=\xi(R)+\eta(R)$ 是秩一幂等的从而是幂等算子的和．于是要么 $\xi(R)=0$ 要么 $\eta(R)=0$. 而这说明，ξ 和 η 至少有一个具有非平凡的零空间．由于同态和反同态的零空间都是理想，而 $\mathcal{F}(X)$ 的非零理想只有 $\mathcal{F}(X)$ 本身，所以，要么 $\Psi|_{\mathcal{F}(X)}=\xi$ 要么 $\Psi|_{\mathcal{F}(X)}=\eta$.

假设 $\Psi|_{\mathcal{F}(X)}=\xi$. 显然 ξ 是单射从而保秩一性．由定理 2.1.6 知存在单射算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$, $C\in\mathcal{B}(X^*,Y^*)$ 使得 $\Psi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$ 对每个 $x\in X$ 及每个 $f\in X^*$ 都成立．由于 Ψ 是 $\mathcal{F}(X)$ 上的同态，故对任意 $F\in\mathcal{F}(X)$, 我们都有

$$\Psi(F)Ax\otimes Cf=\Psi(Fx\otimes f)=AFx\otimes Cf.$$

因此，

$$\Psi(F)A=AF\qquad\forall F\in\mathcal{F}(X).$$

任取 $\mathcal{B}(X)$ 的幂等算子 P, 下证 $S=AP-\Psi(P)A=0$. 事实上，这只要对满足 $PQ=QP=0$ 或 $PQ=QP=Q$ 的一秩算子 Q 证明 $SQ=0$ 即可．如果 $PQ=QP=0$, 则有 $\Psi(P)\Psi(Q)=0$, 从而 $SQ=-\Psi(P)AQ=-\Psi(P)\Psi(Q)A=0$. 如果 $PQ=QP=Q$, 则 $\Psi(P)\Psi(Q)=\Psi(Q)$, 又一次我们得到 $SQ=AQ-\Psi(P)AQ=AQ-\Psi(Q)A=0$. 所以对所有的幂等算子 T, 都有

$$\Psi(T)A=AT.$$

由于 X 具有无限重复度，从而，对所有算子 $T \in \mathcal{B}(X)$, 上式都成立. 因为 A 的值域是 $\Psi(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{B}(Y)$ 的不变算子值域，而此事实蕴涵 A 的满射性，故 A 可逆. 于是我们有

$$\Psi(T) = ATA^{-1} \qquad \forall T \in \mathcal{B}(X).$$

如果 $\Psi|_{\mathcal{F}(X)} = \eta$ 是反同态，则存在单射算子 $A \in \mathcal{B}(X^*, Y)$, $C \in \mathcal{B}(X, Y^*)$, 使得 $\Psi(x \otimes f) = Af \otimes Cx$, 且对每个 $F \in \mathcal{F}(X)$ 都有 $\Psi(F)^*C = CF$. 类似可证 $\Psi(T)^*C = CT$ 对所有 $T \in \mathcal{B}(X)$ 都成立，从而 C 是可逆的. 由此易知 Ψ 是从 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y)$ 的反同构. 证毕.

推论 6.2.7 令 H, K 为复 Hilbert 空间， f 是 $\mathcal{P}_0$ 中的多项式. 设 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是线性满射且在 $\mathcal{F}(H)$ 上的限制不为零. 则 Φ 保零化 $f(x)$ 的元当且仅当存在满足 $\lambda\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$ 的数 1 的某个根 λ, 且存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(H, K)$, 使得要么 $\Phi(T) = \lambda ATA^{-1}$ 对所有 T 都成立，要么 $\Phi(T) = \lambda AT^{tr}A^{-1}$ 对所有 T 都成立. 这里， T^{tr} 表示算子 T 关于 H 的某个任意给定基的转置.

下面给出 Banach 代数间同态的刻画.

定理 6.2.8 令 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为有单位元的复代数， $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是线性映射. 设 $f \in \mathcal{P}_0$. 如果 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数，则下列叙述等价.

(1) Φ_2 保零化 f 的元.

(2) Φ 是同态与某个谱包含在 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)\}$ 中的 r- 幂等元的乘积.

证明 (2)⇒(1) 显然.

(1)⇒(2). 令 $B = \Phi(I)$. 由推论 6.1.4, 存在 Jordan 同态 Ψ 使得 $\Phi = L_B \circ \Psi$, 且 $\Psi(C)\Psi(C^{-1}AC) = \Psi(A)\Psi(C)$ 对 $\mathcal{A}$ 中任意元 A 及任意可逆元 C 都成立. 正如推论 6.1.5 的证明，不失一般性，可以假设 Ψ 是保单位的. 于是 Ψ 保可逆性且 $\Psi(C^{-1}) = \Psi(C)^{-1}$. 因为 Ψ 是 Jordan 同态，因此 $\Psi(EAE) = \Psi(E)\Psi(A)\Psi(E)$ 对 $\mathcal{A}$ 中的任意 A 和 E 成立. 从而，当 C 可逆时，我们有

$$\Psi(C^2A) = \Psi(C(CAC)C^{-1}) = \Psi(C)^2\Psi(A). \tag{6.2.1}$$

因为 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数，$\mathcal{A}$ 中每个元的谱都是 $\mathbb{C}$ 的紧子集. 取非零数 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_{\mathcal{A}}(C) \cup \sigma_{\mathcal{A}}(C^2))$. 在 (6.2.1) 式中用 $\lambda - C$ 代替 C, 得

$$\Psi(CA) = \Psi(C)\Psi(A) \tag{6.2.2}$$

对所有元 A 及可逆元 C 都成立. 现在对任意 $A, W \in \mathcal{A}$, 取 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\lambda - W$ 可逆. 则由 (6.2.2) 式，$\Psi((\lambda - W)A) = (\lambda - \Psi(W))\Psi(A)$, 而由此仍可得到 $\Psi(WA) = \Psi(W)\Psi(A)$. 所以 Ψ 是同态.

注 6.2.2 由上面定理的证明易见，如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 $\mathbb{C}$ 上有单位的代数，而 $\mathcal{A}$ 具有性质：对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 有 $\sigma_{\mathcal{A}}(A) \neq \mathbb{C}$ 且当 C 可逆时，$\sigma_{\mathcal{A}}(C) \cup \sigma_{\mathcal{A}}(C^2) \neq \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则定理 6.2.8 的结论仍成立.

§6.3 $\mathcal{B}(H)$ 上保平方幂零性的可加映射

设 H 和 K 是具有内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的无限维复 Hilbert 空间. 令 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是线性或可加映射，如果对任意 $T \in \mathcal{B}(H)$, $T^2 = 0 \Rightarrow \Phi(T)^2 = 0$ (或 $T^2 = 0 \Leftrightarrow \Phi(T)^2 = 0$), 则称 Φ 保平方幂零性 (或双边保平方幂零性). 本节考虑保平方幂零性线性映射和可加映射的刻画问题，也是下节讨论的基础.

引理 6.3.1 设 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是保平方幂零元的可加满射. 令 $P_1, P_2 \in \mathcal{B}(H)$ 是相互正交的幂等元. 则

$$\Phi(P_1 + P_2)^2 = \Phi(P_1)^2 + \Phi(P_2)^2. \tag{6.3.1}$$

证明 考虑下列五种情形：

(i) $\dim \operatorname{rng}(P_i) = \dim \operatorname{rng}(I - P_i) = \infty$, 其中 $i = 1$ 或 2;

(ii) $\dim \operatorname{rng}(P_1) < \infty$, $\dim \operatorname{rng}(P_2) < \infty$;

(iii) $\dim \operatorname{rng}(P_1) < \infty$, $\dim \operatorname{rng}(I - P_2) < \infty$;

(iv) $\dim \operatorname{rng}(I - P_1) < \infty$, $\dim \operatorname{rng}(P_2) < \infty$;

(v) $\dim \operatorname{rng}(I - P_1) < \infty$, $\dim \operatorname{rng}(I - P_2) < \infty$.

对于情形 (i), 不失一般性, 我们假定 $\dim \operatorname{rng}(P_1) = \dim \operatorname{rng}(I - P_1) = \infty$. 令 $A, B \in \mathcal{B}(H)$ 满足 $P_1AP_1 = A$ 且 $(I - P_1)B(I - P_1) =$

B. 则由定理 1.1.12 知 A 和 B 可表示为五个平方零算子的和. 记 $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ 且 $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$, 其中 $P_1 A_i P_1 = A_i$ 且 $(I - P_1) B_i (I - P_1) = B_i$ $(i = 1, \cdots, 5)$. 显然 $(A_i + B_j)^2 = 0$. 因此 $\Phi(A_i)\Phi(B_j) + \Phi(B_j)\Phi(A_i) = 0$, 进而我们得到

$$\Phi(A)\Phi(B) + \Phi(B)\Phi(A) = 0.$$

令 $A = P_1$, $B = P_2$, 则

$$\Phi(P_1 + P_2)^2 = \Phi(P_1)^2 + \Phi(P_2)^2.$$

对于情形 (ii), 存在 P_3 使得与 P_1+P_2 正交且 $\dim \operatorname{rng}(P_3) = \dim \operatorname{rng}(I - P_3) = \infty$. 这样

$$\begin{aligned}\Phi(P_1 + P_2)^2 + \Phi(P_3)^2 &= \Phi(P_1 + P_2 + P_3)^2 \\ &= \Phi(P_1)^2 + \Phi(P_2 + P_3)^2 \\ &= \Phi(P_1)^2 + \Phi(P_2)^2 + \Phi(P_3)^2,\end{aligned}$$

因此 $\Phi(P_1 + P_2)^2 = \Phi(P_1)^2 + \Phi(P_2)^2$. 类似地, 对于其余的三种情形, 可证明 (6.3.1) 式也成立. 证毕.

引理 6.3.2 设 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是保平方幂零元的可加满射. 则对所有的幂等元 $R \in \mathcal{B}(H)$, 有

$$\Phi(R)\Phi(I) + \Phi(I)\Phi(R) = 2\Phi(R)^2 \tag{6.3.2}$$

且

$$\Phi(I)^2\Phi(R) = \Phi(R)\Phi(I)^2, \qquad \Phi(R)^2\Phi(I) = \Phi(I)\Phi(R)^2. \tag{6.3.3}$$

证明 由引理 6.3.1, 对任意幂等元 $R \in \mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(R)\Phi(I - R) + \Phi(I - R)\Phi(R) = 0$, 而此蕴涵 (6.3.2) 式成立. 故 $\Phi(R)^2\Phi(I) + \Phi(R)\Phi(I)\Phi(R) = 2\Phi(R)^3$ 且 $\Phi(I)\Phi(R)^2 + \Phi(R)\Phi(I)\Phi(R) = 2\Phi(R)^3$, 从而, 对任意的幂等元 R, 有 $\Phi(R)^2\Phi(I) = \Phi(I)\Phi(R)^2$. 再由 $\Phi(I)^2\Phi(R) + \Phi(I)\Phi(R)\Phi(I) = 2\Phi(I)\Phi(R)^2$ 和 $\Phi(R)\Phi(I)^2 + \Phi(I)\Phi(R)\Phi(I) = 2\Phi(R)^2\Phi(I)$ 知, 对任意的幂等元 R, $\Phi(R)\Phi(I)^2 = \Phi(I)^2\Phi(R)$. 因此 (6.3.3) 式成立. 证毕.

引理 6.3.3 设 $\Phi: \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是双边保平方幂零元的可加满射，则 Φ 是单射，且存在非零复数 c 使得 $\Phi(I) = cI$.

证明 假定 Φ 双边保平方零元. 首先证明 Φ 是单射. 否则，假定存在非零算子 $A \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $\Phi(A) = 0$, 则 A 的平方等于零. 取平方幂零算子 B 使得 $A+B$ 不是平方幂零元. 则 $\Phi(B) = \Phi(A+B)$ 不是平方幂零元，矛盾. 故 Φ 一定是单射.

由定理 1.1.12 知 $\mathcal{B}(H)$ 中的每个元都可写为至多五个幂等元的和，现在由引理 6.3.2, 我们有 $\Phi(I)^2\Phi(A) = \Phi(A)\Phi(I)^2$ 对任意的 $A \in \mathcal{B}(H)$ 成立. Φ 的双射性蕴涵对某个非零数 μ, $\Phi(I)^2 = \mu I$. 不失一般性，假定 $\Phi(I)^2 = I$. 于是存在幂等元 P_1 使得 $\Phi(I) = 2P_1 - I$. 把上面的讨论应用于 Φ^{-1}. 对某个非零数 $\delta \in \mathbb{C}$, 也有 $\Phi^{-1}(I)^2 = \delta I$, 且对所有的幂等元 $E \in \mathcal{B}(K)$, $\Phi^{-1}(I)\Phi^{-1}(E) + \Phi^{-1}(E)\Phi^{-1}(I) = 2\Phi^{-1}(E)^2$, $\Phi^{-1}(E)^2\Phi^{-1}(I) = \Phi^{-1}(I)\Phi^{-1}(E)^2$. 因为 $\Phi(I) = 2P_1 - I$, 所以 $\Phi^{-1}(I) = 2\Phi^{-1}(P_1) - I$, 且对所有的幂等元 E,

$$(2\Phi^{-1}(P_1) - I)\Phi^{-1}(E) + \Phi^{-1}(E)(2\Phi^{-1}(P_1) - I) = 2\Phi^{-1}(E)^2.$$

取 $E = P_1$, 则

$$2\Phi^{-1}(P_1)^2 - \Phi^{-1}(P_1) + 2\Phi^{-1}(P_1)^2 - \Phi^{-1}(P_1) = 2\Phi^{-1}(P_1)^2.$$

因此 $\Phi^{-1}(P_1) = \Phi^{-1}(P_1)^2$, 即， $P_2 = \Phi^{-1}(P_1)$ 是幂等元. 现在显然有 $\Phi^{-1}(I)^2 = I$.

另一方面，由恒等式 $\Phi(R)\Phi(I)+\Phi(I)\Phi(R) = 2\Phi(R)^2$ 和 $\Phi(I) = 2P_1 - I$, 我们有

$$(2P_1 - 1)\Phi(R) + \Phi(R)(2P_1 - 1) = 2\Phi(R)^2,$$

$$P_1\Phi(R) + \Phi(R)P_1 = \Phi(R)^2 + \Phi(R).$$

所以

$$(P_1 - \Phi(R))^2 = P_1 - \Phi(R),$$

从而对所有的幂等元 R,

$$\Phi(P_2-R)^2=\Phi(P_2-R).$$

对任意 $T\in P_2\mathcal{B}(H)(I-P_2)$, 有 $(P_2+T)^2=P_2+T$ 且 $T^2=0$. 于是

$$0=\Phi(T)^2=\Phi(P_2-(P_2+T))^2=\Phi(P_2-(P_2+T))=-\Phi(T).$$

因此 $T=0$, 而此蕴涵 $P_2\mathcal{B}(H)(I-P_2)=\{0\}$. 所以 $P_2=0$ 或 $P_2=I$. 故 $\Phi^{-1}(I)=\pm I$, $\Phi(I)=\pm I$. 所以对某个非零数 c, 我们有 $\Phi(I)=cI$. 证毕.

下面结果给出双边保平方幂零性可加映射的刻画.

定理 6.3.4 设 H 和 K 是无限维的复 Hilbert 空间. 令 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$ 是可加满射. 假定对每个一秩幂等元 P 都有 $\Phi(\mathbb{C}P)\subset\mathbb{C}\Phi(P)$. 则 Φ 双边保平方幂零性当且仅当存在非零数 c 和从 H 到 K 的有界可逆线性或共轭线性算子 A 使得 $\Phi(T)=cATA^{-1}$ 对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立; 或 $\Phi(T)=cAT^*A^{-1}$ 对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立.

证明 我们分下列几步证之.

第一步 Φ 是单射且对某个非零数 c, $\Phi(I)=cI$. 故不失一般性, 我们可假定 $\Phi(I)=I$, 从而 Φ 保幂等性.

由引理 6.3.3 及引理 6.3.2 的 (6.3.2) 式立得.

第二步 我们断言, 对任意幂等元 $P\in\mathcal{B}(H)$, $\Phi(P\mathcal{B}(H)P)=\Phi(P)\mathcal{B}(K)\Phi(P)$ 且

$$\Phi((I-P)\mathcal{B}(H)(I-P))=(I-\Phi(P))\mathcal{B}(K)(I-\Phi(P)).$$

令 $X_1=P\mathcal{B}(H)P$, $X_2=P\mathcal{B}(H)(I-P)$, $X_3=(I-P)\mathcal{B}(H)P$ 且 $X_4=(I-P)\mathcal{B}(H)(I-P)$; 且令 $Y_1=\Phi(P)\mathcal{B}(K)\Phi(P)$, $Y_2=\Phi(P)\mathcal{B}(K)(I-\Phi(P))$, $Y_3=(I-\Phi(P))\mathcal{B}(K)\Phi(P)$, $Y_4=(I-\Phi(P))\mathcal{B}(K)(I-\Phi(P))$. 对任意的 $T\in X_2$, 我们有 $(P+T)^2=P+T$

且 $T^2=0$. 于是 $\Phi(T)^2=0$ 且 $\Phi(P+T)^2=\Phi(P+T)$. 因为 $\Phi(P)\Phi(T)\Phi(P)+\Phi(P)\Phi(T)=\Phi(P)\Phi(T)$, 所以 $\Phi(T)\Phi(P)+\Phi(P)\Phi(T)=\Phi(T)$, 且

$$(I-\Phi(P))\Phi(T)\Phi(P)+\Phi(P)\Phi(T)(I-\Phi(P))=\Phi(T).$$

故 $\Phi(T)\in Y_2+Y_3$ 且 $\Phi(X_2)\subset Y_2+Y_3$. 类似地, 我们有 $\Phi(X_3)\subset Y_2+Y_3$. 下证 $\Phi(X_1)\subset Y_1$. 如果 P 具有有限秩, 则对任意的 $T\in X_1$, 存在 X_1 中一秩幂等元的有限集 $\{P_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 使得 $T=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iP_i$; 如果 P 的秩无限, 则按照空间分解 $H=\text{rng}(P)\dot{+}\text{rng}(I-P)$, $X_1=\left\{\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \mid A\in\mathcal{B}(\text{rng}(P))\right\}$, 此蕴涵 X_1 中的每个元都是 X_1 中至多 5 个幂等元的和. 由假定, 因为 $\Phi(\mathbb{C}P_i)\subset\mathbb{C}\Phi(P_i)$ 对每个一秩幂等元 P_i 成立, 故在任何情形, 我们只需验证对于幂等元 $Q\in X_1$, 有 $\Phi(Q)\in Y_1$. 显然 $Q(I-P)=(I-P)Q=0$, 由于 Φ 保幂等元的正交性, 因此 $\Phi(Q)\in Y_1$, 所以 $\Phi(X_1)\subset Y_1$. 类似地, 我们有 $\Phi(X_4)\subset Y_4$. 现在结论由 Φ 的满射性可得.

注意到, 由第一步和第二步易知 Φ 保秩一幂等性, 故可应用 §2.4 中推论 2.4.3 直接得到第七步的结论. 但下面我们再给出一种稍有不同的证明.

第三步 存在可加函数 $\tau:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 使得 $\Phi(\lambda P)=\tau(\lambda)\Phi(P)$ 对每个一秩幂等元 P 成立.

令 $x\otimes y$ 是幂等元, 则由假定知, $\Phi(\lambda x\otimes y)\in\mathbb{C}\Phi(x\otimes y)$. 记 $\Phi(\lambda x\otimes y)=\tau(\lambda)\Phi(x\otimes y)$. 我们断言 τ 与 x 和 y 的选择无关. 事实上我们只需证明 τ 不依赖于 x 即可, 余下的部分可类似证明. 令 x,x',y 是非零向量, 假定 $\langle x,y\rangle=\langle x',y\rangle=1$, $\langle x,x'\rangle=0$. 令 $\tau,\tau',\tau'':\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是可加函数使得

$$\Phi(\lambda x\otimes y)=\tau(\lambda)\Phi(x\otimes y),$$

$$\Phi(\lambda x'\otimes y)=\tau'(\lambda)\Phi(x\otimes y),$$

且

$$\Phi\left(\lambda(x+x')\otimes\frac{y}{2}\right)=\tau''(\lambda)\Phi\left((x+x')\otimes\frac{y}{2}\right).$$

则

$$\frac{1}{2}\tau''(\lambda)\Phi(x\otimes y)+\frac{1}{2}\tau''(\lambda)\Phi(x'\otimes y)=\frac{1}{2}\tau(\lambda)\Phi(x\otimes y)+\frac{1}{2}\tau'(\lambda)\Phi(x'\otimes y),$$

$$(\tau''(\lambda)-\tau(\lambda))\Phi(x\otimes y)=(\tau'(\lambda)-\tau''(\lambda))\Phi(x'\otimes y),$$

从而

$$(\tau'(\lambda)-\tau''(\lambda))\Phi(x'\otimes y)\in\Phi(x\otimes y)\mathcal{B}(K)\Phi(x\otimes y).$$

所以由第二步和 Φ 的单射性知 $\tau'(\lambda)-\tau''(\lambda)\neq 0$ 将蕴涵 $x'\otimes y\in(x\otimes y)\mathcal{B}(H)(x\otimes y)$, 与 $\langle x,x'\rangle=0$ 矛盾. 故 $\tau'(\lambda)=\tau''(\lambda)$. 类似地, 有 $\tau'(\lambda)=\tau(\lambda)$, 从而 $\tau(\lambda)=\tau''(\lambda)$. 如果 $\langle x,x'\rangle\neq 0$, 取与 x 和 x' 均正交的非零向量 x'', 则类似的讨论表明第三步的断言成立.

第四步 对任意的 $x,y\in H$, 有 $\Phi(\lambda x\otimes y)=\tau(\lambda)\Phi(x\otimes y)$.

考虑下面的两种情形.

情形 1 $\langle x,y\rangle=0$. 取 $x'\in H$ 使得 $\langle x',y\rangle=1$. 则

$$\begin{aligned}&\Phi(\lambda(x-x')\otimes y+\lambda x'\otimes y)\\=&\tau(\lambda)\Phi((x-x')\otimes y)+\tau(\lambda)\Phi(x'\otimes y)\\=&\tau(\lambda)\Phi(x\otimes y).\end{aligned}$$

情形 2 $\langle x,y\rangle\neq 0$. 则我们有 $\Phi(x\otimes y)=\Phi(\langle x,y\rangle\frac{x}{\langle x,y\rangle}\otimes y)=\tau(\langle x,y\rangle)\Phi(\frac{x}{\langle x,y\rangle}\otimes y)$. 因此

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda x\otimes y)&=\Phi\left(\lambda\langle x,y\rangle\frac{x}{\langle x,y\rangle}\otimes y\right)\\&=\tau(\lambda\langle x,y\rangle)\Phi\left(\frac{x}{\langle x,y\rangle}\otimes y\right)=\frac{\tau(\lambda\langle x,y\rangle)}{\tau(\langle x,y\rangle)}\Phi(x\otimes y).\end{aligned}$$

令 $\mu(\lambda)=\dfrac{\tau(\lambda\langle x,y\rangle)}{\tau(\langle x,y\rangle)}$. 我们只需证明 $\tau(\lambda)=\mu(\lambda)$. 取 $x'\in H$ 使得 $\langle x,x'\rangle=\langle x',y\rangle=0$ 且假设 $\Phi(\lambda(x+x')\otimes y)=\mu'(\lambda)\Phi((x'+x)\otimes y)$.

则由情形 1, 我们有 $\Phi(\lambda x'\otimes y)=\tau(\lambda)\Phi(x'\otimes y)$. 简单计算可知,

$$\begin{aligned}&\mu'(\lambda)\Phi((x+x')\otimes y)\\&=\Phi(\lambda(x+x')\otimes y)=\Phi(\lambda x\otimes y)+\Phi(\lambda x'\otimes y)\\&=\mu(\lambda)\Phi(x\otimes y)+\tau(\lambda)\Phi(x'\otimes y),\end{aligned}$$

$$(\mu'(\lambda)-\mu(\lambda))\Phi(x\otimes y)=(\tau(\lambda)-\mu'(\lambda))\Phi(x'\otimes y)$$

且

$$(\mu'(\lambda)-\mu(\lambda))\tau(\langle x,y\rangle)\Phi\left(\frac{x}{\langle x,y\rangle}\otimes y\right)=(\tau(\lambda)-\mu'(\lambda))\Phi(x'\otimes y).$$

由第二步的结论及 Φ 的单射性知, 如果 $\tau(\lambda)\neq\mu'(\lambda)$, 则 $x'\otimes y\in(\frac{x}{\langle x,y\rangle}\otimes y)\mathcal{B}(H)(\frac{x}{\langle x,y\rangle}\otimes y)$. 此与 $\langle x,x'\rangle=0$ 矛盾. 所以 $\tau(\lambda)=\mu(\lambda)$.

第五步 我们断言对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\tau(\lambda)\equiv\lambda$ 或对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\tau(\lambda)\equiv\overline{\lambda}$.

只需验证 τ 是 $\mathbb{C}$ 上的连续可乘映射. 首先,

$$\begin{aligned}\tau(\lambda)\tau(\mu)\Phi(x\otimes y)&=\tau(\lambda)\Phi(\mu x\otimes y)\\&=\Phi(\lambda\mu x\otimes y)=\tau(\lambda\mu)\Phi(x\otimes y),\end{aligned}$$

因此 τ 是可乘的. 下证 τ 是连续的. 如若不然, 则存在有界数列 $\{\lambda_n\}\subset\mathbb{C}$ 使得 $|\tau(\lambda_n)|\to\infty$. 设 $\{P_n\}$ 是相互正交的一秩投影序列, 则 $A=\sum\limits_n\lambda_nP_n\in\mathcal{B}(H)$. 对任意的 $n_0\in\mathbb{N}$, 取单位向量 $x\in\mathrm{rng}(\Phi(P_{n_0}))$, 那么

$$\begin{aligned}&\|\Phi(A)\|\geq\|\Phi(A)x\|\\&=\left\|\Phi\left(\sum_n\lambda_nP_n\right)\Phi(P_{n_0})x\right\|\\&=\left\|\Phi(\lambda_{n_0}P_{n_0})\Phi(P_{n_0})x+\Phi\left(\sum_{n\neq n_0}\lambda_nP_n\right)\Phi(P_{n_0})x\right\|\\&=|\tau(\lambda_{n_0})|.\end{aligned}$$

上式与 $\Phi(A)$ 有界矛盾. 因而 τ 是连续的.

第六步 Φ 和 Φ^{-1} 保秩.

由于 Φ^{-1} 与 Φ 有相同的性质, 因此我们只需对 Φ 证明断言成立即可. 现在由第一步和第二步知 Φ 保一秩幂等性. 类似于定理 2.1.13 证明中的讨论知, Φ 保秩一性. 因为 Φ 是 $\mathcal{F}(H)$ 上的线性或共轭线性满射, 因此容易验证 Φ 保秩.

第七步 存在从 H 到 K 的线性或共轭线性双射 A 使得 $\Phi(T)A = AT$ 对所有的 $T \in \mathcal{F}(H)$ 成立; 或 $\Phi(T)A = AT^*$ 对所有的 $T \in \mathcal{F}(H)$ 成立.

令 $\Psi = \Phi|_{\mathcal{F}(H)}$, 则 $\Psi : \mathcal{F}(H) \to \mathcal{F}(K)$ 是线性或共轭线性双射.

我们将证明 Ψ 是 $\mathcal{F}(H)$ 上的 Jordan 同态. 令 $S \in \mathcal{F}(H)$ 自伴, 则 $S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$, 其中 $\{\lambda_k\}_k \subset \mathbb{R}$ 且 $\{P_k\}_k$ 是两两正交的一秩投影族. 我们有

$$\Psi(S)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Psi(P_k)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \Psi(P_k)$$
$$= \Psi\left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^2 P_k)\right) = \Psi(S^2).$$

用 $S+T$ 代替 S, 则

$$\Psi(ST+TS) = \Psi(S)\Psi(T) + \Psi(T)\Psi(S)$$

对每对自伴算子 $S, T \in \mathcal{F}(H)$ 成立. 由于 $\mathcal{F}(H)$ 中的每个算子都可表示为形如 $S+iT$ 的算子, 其中 S 和 T 自伴, 且因为

$$\begin{aligned}\Psi(S+iT)^2 &= (\Psi(S) + \tau(i)\Psi(T))^2 \\ &= \Psi(S^2) + \tau(i)^2\Psi(T)^2 + \tau(i)(\Psi(S)\Psi(T) + \Psi(T)\Psi(S)) \\ &= \Psi(S^2) - \Psi(T^2) + \tau(i)(\Psi(S)\Psi(T) + \Psi(T)\Psi(S)) \\ &= \Psi(S^2 - T^2 + i(ST+TS)) = \Psi((S+iT)^2),\end{aligned}$$

因此 $\Psi:\mathcal{F}(H)\to\mathcal{F}(K)$ 是 Jordan 同构. 由于 $\mathcal{F}(K)$ 是素的, 故 $\Psi=\varphi$ 是同构或 $\Psi=\psi$ 是反同构.

取 $x_0,y_0\in H$ 且 $z\in K$ 使得 $\Psi(x_0\otimes y_0)z\neq 0$.

如果 $\Psi=\varphi$, 对任意的 $x\in H$, 定义 $Ax=\Psi(x\otimes y_0)z$, 则 Ψ 的线性或共轭线性蕴涵 A 也有相同的性质. 显然 $ATx=\Psi(Tx\otimes y_0)z=\Psi(T)\Psi(x\otimes y_0)z=\Psi(T)Ax$ 对任意 $T\in\mathcal{F}(H)$ 成立. 因此 $AT=\Psi(T)A$ 对任意 $T\in\mathcal{F}(H)$ 成立. 为证明 A 是单射, 假定存在非零向量 x 使得 $Ax=0$. 则对任意的 $T\in\mathcal{F}(H)$, $ATx=0$ 蕴涵 $A=0$. Ψ 的满射性则蕴涵 A 也是满的.

如果 $\Psi=\psi$, 定义 $A:H\to K$ 为 $Ay=\Phi(x_0\otimes y)z$. 类似于同构情形, 可证明 $\Psi(T)A=AT^*$ 对任意 $T\in\mathcal{F}(H)$ 成立, 其中 Ψ 的线性或共轭线性双射性决定 A 的相应性质.

第八步 对每个投影 P, $\Phi(\lambda P)=\tau(\lambda)\Phi(P)$ 对所有的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 成立.

对任意投影 P, 存在相互正交的一族投影族 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 使 $P=\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}P_\alpha$ (强算子拓扑收敛), 这里 Λ 是指标集. 现在由定理 5.2.1 证明中的断言 5 立知结论成立.

第九步 A 有界且 $\Phi(T)=ATA^{-1}$ 对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立; 或 $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$ 对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立.

首先证明 $\Phi(\lambda P)A=A(\lambda P)$ 对每个投影 P 成立, 或 $\Phi(\lambda P)A=A(\bar{\lambda}P)$ 对每个投影 P 成立. 把 P 表示为第八步中的形式, 则

$$\Phi(\lambda P)=\tau(\lambda)\Phi(P)=\tau(\lambda)\sum_\alpha\Phi(P_\alpha)=\sum_\alpha\Phi(\lambda P_\alpha),$$

且

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P)A &=\left(\sum_\alpha\Phi(\lambda P_\alpha)\right)A=\sum_\alpha(\Phi(\lambda P_\alpha)A)\\ &=\sum_\alpha A(\lambda P_\alpha)=A\sum_\alpha\lambda P_\alpha=A(\lambda P)\end{aligned}$$

或

$$\Phi(\lambda P)A=\sum_{\alpha}A(\lambda P_{\alpha})^{*}=A(\bar{\lambda}P).$$

由定理 1.1.12 知，$\mathcal{B}(H)$ 中的每个元都可表示为有限个投影的线性组合，故 $\Phi(T)A=AT$ 对每个 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立，或 $\Phi(T)A=AT^{*}$ 对每个 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立. 由 A 的双射性，我们得到 $\Phi(T)=ATA^{-1}$ 对每个 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立，或 $\Phi(T)=AT^{*}A^{-1}$ 对每个 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立. 现在从闭图定理知 A 有界，完成证明. 证毕.

注意到 Φ 取形式 $\Phi(T)=cAT^{*}A^{-1}$ $(\forall T\in\mathcal{B}(H))$ 当且仅当存在可逆有界线性或共轭线性算子 B 使得 $\Phi(T)=cBT^{tr}B^{-1}$ $(\forall T\in\mathcal{B}(H))$, 其中 T^{tr} 代表 T 相对于 H 的任意给定标准正交基的转置.

对于线性映射的情形，我们有

定理 6.3.5 设 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$ 是线性满射. 则 Φ 双边保平方幂零元当且仅当存在非零复数 c 和可逆算子 $A\in\mathcal{B}(H,K)$ 使得要么 $\Phi(T)=cATA^{-1}$ 对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立；要么 $\Phi(T)=cAT^{tr}A^{-1}$ 对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立，其中 T^{tr} 代表 T 相对于 H 的任意但预先固定基的转置.

证明 直接应用定理 6.3.4 即可. 证毕.

当 Φ 有界时，可以去掉“双边性”的假定.

定理 6.3.6 设 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$ 是有界线性满射. 则 Φ 保平方幂零元当且仅当存在非零复数 c 和可逆算子 $A\in\mathcal{B}(H,K)$ 使得要么 $\Phi(T)=cATA^{-1}$ 对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立；要么 $\Phi(T)=cAT^{tr}A^{-1}$ 对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立，其中 T^{tr} 代表 T 相对于 H 的任意但预先固定基的转置.

证明 由引理 6.3.2 易知，对任意算子 $T\in\mathcal{B}(H)$ 都有

$$\Phi(T)^{2}\Phi(I)=\Phi(I)\Phi(T)^{2}$$

成立. 因为 Φ 是满射，故对每个秩一幂等算子 P, 存在某个 T 使得 $\Phi(T)=P$. 于是有 $P=\Phi(T)^{2}$ 与 $\Phi(I)$ 交换. 因此 $\Phi(I)$ 必为恒等算子的常数倍，即存在复数 c 使得 $\Phi(I)=cI$. 如果 $c=0$, 则

$\Phi(I)=0$. 引理 6.3.2 中 (6.3.2) 式蕴涵 $\Phi(R)^2=0$ 对所有幂等算子 R 都成立. 再利用引理 6.3.1 知, 如果 C 是相互正交投影的线性组合, 则必有 $\Phi(C)^2=0$. 因 $\mathcal{B}(H)$ 是实秩零的且 Φ 连续, 故对所有 $T\in\mathcal{B}(H)$ 都有 $\Phi(T)^2=0$, 与 Φ 的满射性矛盾. 所以 $c\neq 0$, 从而我们可假设 $\Phi(I)=I$. 于是, 由 (6.3.2) 式, Φ 是保幂等性的. 现在应用 §4.2 中定理 4.2.1 和推论 4.2.4 完成本定理的证明. 证毕.

§6.4 保算子幂零性的可加映射

设 X 是数域 $\mathbb{F}\,(=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C})$ 上的 Banach 空间, X^* 代表 X 的对偶空间. $\mathcal{B}(X)$ 表示 X 上的所有有界线性算子组成的 Banach 空间且 $\mathcal{B}_0(X), \mathcal{F}(X), \mathcal{N}(X)$ 和 $\mathcal{N}_1(X)$ 分别代表 $\mathcal{B}(X)$ 中所有幂零算子的线性张, 所有有限秩线性算子的集合, 所有幂零算子的集合和所有一秩幂零算子的集合. 假定 S 是 X 的子集, 则正如通常一样, $S^\perp$ 代表 S 在 X^* 中的零化子, 即 $S^\perp=\{f\in X^*\mid f(x)=0$ 对任意的 $x\in S\}$.

映射 $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(X)$ 称为双边保算子的幂零性如果 $T\in\mathcal{N}(X)$ 当且仅当 $\Phi(T)\in\mathcal{N}(X)$.

本节我们将讨论 $\mathcal{B}_0(X)$ 上保算子幂零性的可加映射. 为证明我们的主要结论, 我们需要两个引理.

引理 6.4.1 设 N 是 X 上的非零幂零算子. 下列条件等价:

(1) $N\in\mathcal{N}_1(X)$;

(2) 对任意的 $A\in\mathcal{N}(X)$, $A+N\notin\mathcal{N}(X)$ 蕴涵 $A+2N\notin\mathcal{N}(X)$.

证明 (1)⇒(2). 设 N 为非零一秩幂零算子而 A 是幂零算子使得 $A+N\notin\mathcal{N}(X)$. 记 $N=x\otimes f$, 其中 $\langle x,f\rangle=0$. 设 A 的幂零指标为 n. 易见, 对每个 $y\in X$, $\mathrm{span}\{y,Ay,\cdots,A^{n-1}y,x,Ax,\cdots,A^{n-1}x\}$ 都是 $A+N$ 的不变子空间, 因此, $A+N$ 是代数算子. 由于它不是幂零的, 故其谱 $\sigma(A+N)$ 至少包含一个非零复数 μ. 显然, $\langle(\mu-A)^{-1}x,f\rangle=1$. 定义复多项式 p 如下:

$$p(\tau)=\sum_{k=1}^{n-1}\langle A^kx,f\rangle\tau^{k+1}.$$

对于非零复数 ν, 我们有 $(\nu - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{-(k+1)} A^k$. 再注意到 $\langle x, f \rangle = 0$, 我们得到

$$p(\tau) = \langle (\tau^{-1} - A)^{-1} x, f \rangle$$

对所有非零复数 τ 都成立. 因 $p(\mu^{-1}) = \langle (\mu - A)^{-1} x, f \rangle = 1$, 故 $p \neq 0$. 于是对每个非零复数 λ, 存在 $\tau \neq 0$ 使得 $p(\tau) = \lambda^{-1}$. 所以我们有 $\lambda \langle (\tau^{-1} - A)^{-1} x, f \rangle = 1$, 从而 $\tau^{-1} \in \sigma(A + \lambda N)$. 此表明, 对任何 $\lambda \neq 0$ 都有 $A + \lambda N \notin \mathcal{N}(X)$.

(2)⇒(1). 令 N 是秩大于 1 的幂零算子, 于是 N 有矩阵表示

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ 0 & N_3 \end{pmatrix},$$

其中, N_3 是幂零算子而 N_1 是作用在有限维空间上具有下面两种矩阵表示之一的算子:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是幂零算子, 其中 A_1 相应地取

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易看出，$A+N\notin\mathcal{N}(X)$, 但 $A+2N\in\mathcal{N}(X)$. 证毕.

引理 6.4.2 设 A, B 是 X 上的幂零算子且 $\operatorname{rank}A>1$. 假定对每个幂零有限秩算子 N, $A+N$ 是幂零的当且仅当 $B+N$ 是幂零的，则 $A=B$.

证明 我们先来证明两个断言.

断言 1 设 A 为 n 阶方阵，$n\neq 2$, J 是 n- 阶 $n\times n$ 幂零矩阵. 如果对任意 $n\times n$ 幂零矩阵 N, 矩阵 $A+N$ 是幂零的当且仅当 $J+N$ 是幂零的，则 $A=J$.

$n=1$ 的情形显然. 假设 $n\geq 3$. 我们也可假定 J 具有 Jordan 标准型，即

$$J=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

则对任意严格上三角矩阵 N, $J+N$ 都是幂零的，从而 $A+N$ 也是幂零的. 由此可知，A 必为严格上三角矩阵. 下面对 n 用归纳法.

当 $n=3$ 时，我们有

$$J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

令

$$N_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},\qquad N_2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

则 $J+N_i\ (i=1,2)$ 是幂零矩阵，从而 $A+N_i\ (i=1,2)$ 也是幂零的. 注意到 $A\neq 0$, 直接计算可知 $A=J$. 故断言 1 在 $n=3$ 时成立.

现在假设断言 1 对某个给定的 n 是正确的，我们往证断言 1 对 $n+1$ 也成立. 把 A 和 J 写成块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a^{tr} \\ 0_{n,1} & A_1 \end{pmatrix} \quad 和 \quad J=\begin{pmatrix} 0 & e_1^{tr} \\ 0_{n,1} & J_n \end{pmatrix}$$

的形式，其中， $e_1^{tr}=(1,0,\cdots,0)$, $a^{tr}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, A_1 是 $n\times n$ 矩阵， $0_{n,1}$ 是 $n\times 1$ 零矩阵， J_n 是具有 Jordan 标准型的 n 阶幂零 $n\times n$ 矩阵. 令 N 为任意 $n\times n$ 幂零矩阵，则显然

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & N \end{pmatrix}$$

是幂零的. 进而， J_n+N 是幂零的当且仅当 $J+M$ 是幂零的，因而，此成立当且仅当 $A+M$ 是幂零的. 不难看出， $A+M$ 是幂零的当且仅当 A_1+N 是幂零的，从而由归纳假设得 $A_1=J_n$.

定义幂零矩阵

$$L=\begin{pmatrix} 0 & -e_1^{tr} \\ e_n & 0_{n,n} \end{pmatrix},$$

其中 $e_n^{tr}=(0,\cdots,0,1)$. 那么 $J+L$, 从而 $A+L$ 是幂零的，而此导出 $a_1=1$. 下证 $a_2=a_3=\cdots=a_n=0$. 为此，用反证法，假设 $i\,(2\le i\le n)$ 是使得 $a_i\neq 0$ 的最小的整数，定义幂零矩阵

$$K=\begin{pmatrix} 0 & -e_1^{tr} \\ e_i & 0_{n,n} \end{pmatrix},$$

其中 e_i 是第 i 个坐标为 1 而其他坐标为 0 的列向量. 容易验证， $J+K$ 是幂零的，但 $A+K$ 不是幂零矩阵，矛盾. 所以我们仍有 $A=J$. 断言 1 得证.

类似地可证下面的断言 2 成立.

断言 2 令 J_i 是幂零阶为 n_i 的 $n_i\times n_i$ 幂零矩阵， $i=1,2$. 假设 $n_1+n_2\ge 4$. 又令 A 和 J 为 $(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)$ 矩阵，其中

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & 0_{n_1,n_2} \\ 0_{n_2,n_1} & J_2 \end{pmatrix}.$$

如果对每个 $(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)$ 幂零矩阵 N, $A+N$ 是幂零的当且仅当 $J+N$ 是幂零的，则必有 $A=J$.

现在我们来完成引理的证明.

令 x 是 X 中的任一非零向量. 如果 $Ax=0$ 或者 $A^2x\neq 0$, 则存在包含 x 的 A 的有限维不变子空间 X_1 使得 A 在其上的限制 $A|_{X_1}$ 具有矩阵表示 J, 其中 J 同断言 1 中所述. 如果 $Ax\neq 0$ 而 $A^2x=0$, 则可找到 $y\in X$ 使得 Ax 与 Ay 线性无关. 令 X_1 为子集 $\{x,Ax\}\cup\{A^ny\mid n=0,1,2,\cdots\}$ 张成的有限维子空间. 显然, X_1 在 A 的作用下不变. 容易验证， $A|_{X_1}$ 的零空间最多二维，因而 $A|_{X_1}$ 具有断言 1 或者断言 2 中矩阵 J 的形式. 令 X_2 为 X_1 在 X 中的闭补子空间，则关于空间分解 $X=X_1\oplus X_2$, A 和 B 有矩阵表示

$$A=\begin{pmatrix} J & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

任取幂零算子 $N_1:X_1\to X_1$ 使得 $J+N_1$ 是幂零的. 因为

$$\begin{pmatrix} J & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} N_1 & -B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是幂零的，故

$$\begin{pmatrix} B_1+N_1 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

也是幂零的，此蕴涵 B_4 是幂零算子. 进而，由断言 1 和断言 2 知， $B_1=J$.

下证 $B_3=0$. 假设不然，则存在非零向量 $y\in X_2$ 使得 $y\in\mathrm{rng}(B_3)$. 于是我们可以找到有界的有限秩幂零算子 $N_2:X_2\to X_2$ 使得 B_4-N_2 是满足 $(B_4-N_2)y=0$ 的幂零算子. 令

$$L=\begin{pmatrix} 0 & -B_2 \\ 0 & -N_2 \end{pmatrix},$$

则 L 是有限秩幂零的. 容易验证 $B+L$ 是幂零元, 从而 $A+L$ 也是幂零元, 进而此蕴涵 A_2-N_2 是幂零的. 对每个有界线性算子 $C:X_2\to X_1$,

$$K=\begin{pmatrix}0 & C\\ 0 & -N_2\end{pmatrix}$$

都是有限秩幂零算子, 且 $A+K$ 是幂零的. 所以, 对任意 $D:X_2\to X_1$, 算子

$$\begin{pmatrix}J & D\\ B_3 & B_4-N_2\end{pmatrix}$$

也必是幂零的. 取 $z\in X_1$ 使得 $B_3z=y$, 并令 $D_0:X_2\to X_1$ 是任一满足 $D_0y=z-Jz$ 的算子, 则我们有

$$\begin{pmatrix}J & D_0\\ B_3 & B_4-N_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\ y\end{pmatrix}\neq 0,$$

此与

$$\begin{pmatrix}J & D_0\\ B_3 & B_4-N_2\end{pmatrix}$$

为幂零算子的事实矛盾. 因此我们有 $B_3=0$, 故必有 $Ax=Bx$. 由 x 的任意性得 $A=B$. 证毕.

注 6.4.1 引理 6.4.2 的证明中断言 1 的结论对 $n=2$ 不成立. 事实上, 令

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

而 N 是任意 2×2 幂零矩阵. 那么, $J+N$ 是幂零的当且仅当 N 与 J 线性相关. 令 $A=aJ$, $a\neq 0,1$, 则 $A\neq J$ 但 A 满足断言 1 的假设条件.

下面我们刻画双边保算子幂零性的可加满射 $\Phi:\mathcal{B}_0(X)\to\mathcal{B}_0(X)$.

定理 6.4.3 设 X 是数域 $\mathbb{F}$ $(=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C})$ 上的 Banach 空间且 $\dim X\geq 3$. 如果可加满射 $\Phi:\mathcal{B}_0(X)\to\mathcal{B}_0(X)$ 双边保算子的幂零性，则存在非零数 $c\in\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{F}$ 的环自同构 τ 使得下列断言之一成立：

(1) 存在 τ- 拟线性双射 $A:X\to X$ 使得对每个 $T\in\mathcal{B}_0(X)$ 都有 $\Phi(T)=cATA^{-1}$;

(2) 存在 τ- 拟线性双射 $A:X^*\to X$ 使得对每个 $T\in\mathcal{B}_0(X)$ 都有 $\Phi(T)=cAT^*A^{-1}$. 在此情形下， X 一定自反.

特别地，如果 X 是无限维的，那么 A 事实上是有界线性或共轭线性算子，从而 Φ 连续.

证明 我们首先证明 Φ 是单射. 反之，假定存在非零元 $T\in\mathcal{B}_0(X)$ 使得 $\Phi(T)=0$. 则 T 幂零且容易找到幂零算子 S 使得 $T+S\notin\mathcal{N}(X)$. 所以 $\Phi(S)=\Phi(T+S)$ 不是幂零算子，矛盾.

下证 Φ 双边保一秩幂零性. 显然只需证明 Φ 保一秩幂零性. 设 $N\in\mathcal{N}_1(X)$. 对任意的 $T\in\mathcal{N}(X)$, 因为 Φ 是满射，因此存在 $S\in\mathcal{N}(X)$ 使得 $\Phi(S)=T$. 现在 $\Phi(N)+T\notin\mathcal{N}(X)$ 蕴涵 $N+S\notin\mathcal{N}(X)$. 由引理 6.4.1 和 $N\in\mathcal{N}_1(X)$, 我们有 $2N+S\notin\mathcal{N}(X)$. 于是 $\Phi(S)+2\Phi(N)\notin\mathcal{N}(X)$. 再次应用引理 6.4.1, 得 $\Phi(N)\in\mathcal{N}_1(X)$. 现在 Φ 满足定理 2.5.1 的条件，因此存在非零数 $c\in\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{F}$ 的环自同构 τ 使得要么

(i) 存在 τ- 拟线性双射 $A:X\to X$ 使得对满足 $\langle x,f\rangle=0$ 的任意 $x\in X$, $f\in X^*$, 有 $\Phi(x\otimes f)=cA(x\otimes f)A^{-1}$; 要么

(ii) 存在 τ- 拟线性双射 $A:X^*\to X$ 使得对满足 $\langle x,f\rangle=0$ 的任意 $x\in X$, $f\in X^*$, 有 $\Phi(x\otimes f)=cA(x\otimes f)^*A^{-1}$, 而且 X 自反.

特别地，当 X 为无限维时， A 是有界线性或共轭线性算子.

容易验证每个有限秩幂零算子都是某些一秩幂零算子的线性组合. 设 $T\in\mathcal{F}(X)\cap\mathcal{N}(X)$ 任意. 假定对满足 $f_i(x_i)=0$ 的某些 $x_i\in X$ 及 $f_i\in X^*$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 有 $T=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\otimes f_i$. 则在情形

(i) 中,

$$\Phi(T)=\sum_{i=1}^{n}\tau(\lambda_i)\Phi(x_i\otimes f_i)=\sum_{i=1}^{n}c\tau(\lambda_i)A(x_i\otimes f_i)A^{-1}$$
$$=c\sum_{i=1}^{n}A(\lambda_i x_i\otimes f_i)A^{-1}=cATA^{-1}.$$

定义 $\Psi:\mathcal{B}_0(X)\to\mathcal{B}_0(X)$ 为 $\Psi(T)=c^{-1}A^{-1}\Phi(T)A$. 显然 Ψ 是双边保幂零性的可加双射. 进而对每个有限秩幂零算子 N, 有 $\Psi(N)=N$. 令 T 是任意一个无限秩幂零算子. 如果 $T+N\in\mathcal{N}(X)$, 则 $\Psi(T+N)=\Psi(T)+\Psi(N)=\Psi(T)+N\in\mathcal{N}(X)$. 由引理 6.4.2, $T=\Psi(T)$. 接下来, 我们证明 $\Phi(T)=cATA^{-1}$ 对每个 $T\in\mathcal{B}_0(X)$ 成立. 如果 $T\in\mathcal{B}_0(X)$, 则 T 具有形式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iT_i$, 其中 $T_i\in\mathcal{N}(X)$. 因此

$$\Phi(T)=\Phi\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_iT_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\Phi(\alpha_iT_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}c\tau(\alpha_i)AT_iA^{-1}=cA(\sum_{i=1}^{n}\alpha_iT_i)A^{-1}=cATA^{-1}.$$

情形 (2) 类似可证. 证毕.

如果 X 是具有无限重复度的 Banach 空间 (定义参见 §6.2), 我们将给出 $\mathcal{B}(X)$ 上保算子幂零性可加满射的完全刻画. 先证明下面的引理.

引理 6.4.4 如果 X 是具有无限重复度的实或复 Banach 空间, 则 $\mathcal{B}(X)$ 中的每个元都可表示为至多 8 个平方幂零算子之和.

证明 因为 X 同构于 $X\oplus X$, 因此 $\mathcal{B}(X)$ 中的每个元都可表示为 2×2 算子矩阵. 显然形如 $\begin{pmatrix}0 & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0 & 0\\ C & 0\end{pmatrix}$ 的算子都为平方幂零算子, 现在我们证明形为 $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 的算子是 4 个平

方幂零算子的和. 因为 X 同构于无限个 X 的直和, 因此只需证明形式为 $A\oplus 0^{(\infty)}=A\oplus 0\oplus 0\oplus\cdots$ 的无限矩阵是 4 个平方零算子的和. 由于我们可以把 $A\oplus 0^{(\infty)}$ 表示为具有无限多 A 和无限多 $-A$ 的两个对角矩阵的和, 即把 $A\oplus 0^{(\infty)}$ 写成形式为 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$ 的算子的和, 其中 $B=A^{(\infty)}$, 因此我们只需证明 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}$ 是两个平方幂零算子的和即可. 注意到 $\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$ 可逆且其逆是 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$, 于是直接计算可知,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{B}(X)$ 中的每个元都可写成如下形式

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A+D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此它至多是 8 个平方幂零算子的和. 证毕.

定理 6.4.5 设 X 是具有无限重复度的实或复 Banach 空间且 $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(X)$ 是可加满射. 则 Φ 双边保算子的幂零性当且仅当存在非零数 c, 且要么存在 X 上的有界可逆线性或共轭线性算子 A 使得 $\Phi(T)=cATA^{-1}$ 对所有的 $T\in\mathcal{B}(X)$ 成立; 要么存在从 X^* 到 X 上的有界可逆线性或共轭线性算子 A 使得 $\Phi(T)=cAT^*A^{-1}$ 对所有的 $T\in\mathcal{B}(X)$ 成立. 若后一情形出现, 则 X 一定自反.

证明 由引理 6.4.4, $\mathcal{B}(X)$ 中的每个算子都可表示为至多 8 个平方零算子的和，故 $\mathcal{B}_0(X)=\mathcal{B}(X)$. 由于具有无限重复度的 Banach 空间是无限维的，现在由定理 6.4.3 知，本定理成立. 证毕.

注 6.4.2 如果 $\mathcal{B}_0(X)=\mathcal{B}(X)$, 则 τ 的连续性有较简单的证明 (参见 §2.5, 定理 2.5.2 的证明). 事实上，如果 τ 不连续，那么存在序列 $\{\lambda_n\}\subset\mathbb{C}$ 使得 $|\lambda_n|\le 2^{-n}$ 且 $|\tau(\lambda_n)|\to\infty$. 令 $\{P_n\}$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 中的正交一秩幂等序列. 于是 $T=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_nP_n\in\mathcal{B}(X)$. 对任意的 $n_0\in\mathbb{N}$, 令 $x\in\mathrm{rng}(\Phi(P_{n_0}))$ 是单位向量. 则由定理 2.5.2 证明中的第四步， $\Phi(P_{n_0})x=cx$. 注意到定理 6.4.3 的证明与 τ 及 A 的连续性无关，故我们有

$$\begin{aligned}\|\Phi(T)\|\ge\|\Phi(T)x\|&=\left\|\Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nP_n\right)\frac{1}{c}\Phi(P_{n_0})x\right\|\\&=\left\|cA\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nP_n\right)A^{-1}AP_{n_0}A^{-1}x\right\|\\&=\|cA\lambda_{n_0}P_{n_0}A^{-1}x\|=|c\tau(\lambda_{n_0})|,\end{aligned}$$

而此与 $\Phi(T)$ 的有界性矛盾. 也注意到定理 6.4.3 中 Φ 的连续性依赖于 τ 的连续性，但困难仅出现在有限维的情形.

如果 $\dim X=n<\infty$, 固定 X 的基，我们可以把 X 与 $\mathbb{F}^n$ 等同起来，于是 $\mathcal{B}(X)=M_n(\mathbb{F})$ 且 $\mathcal{B}_0(X)=\mathrm{sl}_n(\mathbb{F})$ ($\mathbb{F}$ 上所有迹为零的 $n\times n$ 矩阵的集合).

推论 6.4.6 设 $n\ge 3$ 且 $\Phi:\mathrm{sl}_n(\mathbb{F})\to\mathrm{sl}_n(\mathbb{F})$ 是双边保幂零矩阵的可加满射. 则存在 $\mathbb{F}$ 的环自同构 τ, 非奇异矩阵 $A\in M_n(\mathbb{F})$ 以及非零数 $c\in\mathbb{F}$ 使得下列之一成立:

(1) 对所有的 $(t_{ij})\in\mathrm{sl}_n(\mathbb{F})$, $\Phi((t_{ij}))=cA(\tau(t_{ij}))A^{-1}$;

(2) 对所有的 $(t_{ij})\in\mathrm{sl}_n(\mathbb{F})$, $\Phi((t_{ij}))=cA(\tau(t_{ij}))^{tr}A^{-1}$.

记 I_n 为 $M_n(\mathbb{F})$ 中的单位矩阵.

推论 6.4.7 设 $\Phi: M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ 是可加满射. 则 Φ 双边保幂零性当且仅当存在非零数 c, $\mathbb{F}$ 的环自同构 τ, 非奇异矩阵 $A \in M_n(\mathbb{F})$ 以及可加映射 $\varphi: \mathbb{F}I_n \to M_n(\mathbb{F})$ 使得

$$\Phi((t_{ij})) = cA(\tau(t_{ij}))A^{-1} - \frac{c}{n}\tau(\mathrm{tr}(T))I_n + \frac{1}{n}\varphi(\mathrm{tr}(T)I_n)$$

对所有的 $(t_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ 成立; 或者

$$\Phi((t_{ij})) = cA(\tau(t_{ij}))^{\mathrm{tr}}A^{-1} - \frac{c}{n}\tau(\mathrm{tr}(t_{ij}))I_n + \frac{1}{n}\varphi(\mathrm{tr}(t_{ij})I_n)$$

对所有的 $(t_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ 成立.

证明 显然, 由 $M_n(\mathbb{F}) = \mathbb{F}I_n \oplus \mathrm{sl}_n(\mathbb{F})$ 及推论 6.4.6, 结论立得. 证毕.

当 Φ 为线性映射时, 利用上述结果, 不难得到双边保幂零性线性映射的刻画.

§6.5 $\mathcal{B}(H)$ 上保多项式零化元的可加映射

本节总假定 H 和 K 是复 Hilbert 空间. 应用 §6.3 及 §6.4 的讨论, 我们将给出 $\mathcal{B}(H)$ 上保任意给定多项式零化元可加映射的刻画. 设 k 为大于 1 的正整数. 一个映射 Φ 称为保 (或双边保) k 阶幂零性如果 $T^k = 0$ 蕴涵 (或当且仅当) $\Phi(T)^k = 0$. 集合 $\mathcal{N}(H)$, $\mathcal{N}_1(H)$ 和 $\mathcal{N}_k(H)$ 分别代表 H 上所有有界幂零线性算子的集合、所有有界一秩幂零算子的集合、所有阶不大于 k 的有界幂零算子的集合.

我们先来刻画双边保 k 阶幂零性的可加映射. 对于 $k = 2$ 的情形, 我们已在 §6.3 中讨论, 故以下总假定 $k > 2$. 首先证明下列两个引理.

引理 6.5.1 设 $k > 2$ 是一正整数, H 是一有限维或无限维复 Hilbert 空间, 且令 $N \in \mathcal{N}_k(H)$ 是一非零算子. 则下列条件等价:

(1) $N \in \mathcal{N}_1(H)$.

(2) 对任意 $A \in \mathcal{N}_k(H)$, $A+N \notin \mathcal{N}_k(H)$ 蕴涵 $A+2N \notin \mathcal{N}_k(H)$.

证明 (1)⇒(2). 设 $0 \neq N = x \otimes z \in \mathcal{N}_1(H)$, $A^k = 0$ 但 $(A+N)^k \neq 0$. 如果 $A + N \notin \mathcal{N}(H)$, 则由引理 6.4.1, 我们有 $A + 2N \notin \mathcal{N}(H)$, 故 (2) 成立. 因此, 下面可要求 $A+N \in \mathcal{N}(H)$. 取 $y \in H$ 使得 $(A+N)^k y \neq 0$. 容易看出, $V = \text{span}\{x, Ax, \cdots, A^{k-1}x, y, Ay, \cdots, A^{k-1}y\}$ 是 A 和 N 的公共不变子空间. 令 r 为使得 $A^r x = 0$ 的最小正整数. 在 V 中取一组基 $\{x, Ax, \cdots, A^{r-1}x, e_1, \cdots, e_m\}$, 则关于空间分解 $V = \text{span}\{x, Ax, \cdots, A^{r-1}x\} \oplus \text{span}\{e_1, \cdots, e_m\}$, $A|_V$ 和 $N|_V$ 有矩阵表示

$$A|_V = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \qquad N|_V = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_{r-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

由 $A+N \in \mathcal{N}(H)$ 可知 $a_1 = \cdots = a_{r-1} = 0$, 从而对每个整数 $i \geq 0$ 都有 $N|_V(A|_V)^i N|_V = 0$. 进而, 对任意非零数 α, 我们有

$$\begin{aligned} &(A|_V + \alpha N|_V)^k \\ &= \alpha[N|_V(A|_V)^{k-1} + A|_V N|_V(A|_V)^{k-2} + \cdots + (A|_V)^{k-1}N|_V] \\ &= \alpha(A|_V + N|_V)^k. \end{aligned}$$

所以 $(A|_V + \alpha N|_V)^k y = \alpha(A|_V + N|_V)^k y \neq 0$, 即 (2) 成立.

(2)⇒(1). 用反证法. 假设 (2) 成立但 $N \in \mathcal{N}_k(H)$ 不是一秩的.

首先考虑 $N^2 \neq 0$ 且 $k \geq 4$ 的情形. 此时可以找到 H 的直和分解使得 N 有矩阵表示

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ 0 & N_3 \end{pmatrix}, \tag{6.5.1}$$

其中， $N_3^k = 0$ 而 N_1 作用在 3 维空间上且具有矩阵表示

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -2N_3 \end{pmatrix},$$

其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然， $A \in \mathcal{N}_k(H)$, $A + N \notin \mathcal{N}_k(H)$, 但是 $(A + 2N)^4 = 0$, 矛盾.

其次考虑 $N^2 \neq 0$ 且 $k = 3$ 的情形. 令 $H_1 = \ker N$, 对于 $j = 2,3$, 定义 H_j 为 $\ker N^{j-1}$ 在 $\ker N^j$ 中的正交补. 关于分解 $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$, 我们有

$$N = \begin{pmatrix} 0 & N_1 & N_3 \\ 0 & 0 & N_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中， $N_j : H_{j+1} \to H_j$ 是单射， $j = 1,2$. 如果 $\dim H_1 = 1$, 则 $\dim H = 3$. 关于一组适当的基， N 具有前面 N_1 的矩阵表示形式. 取前面的 A_1, 则不难看出 $A_1 + N$ 不是幂零的而 $(A_1 + 2N)^3 = 0$. 所以必有 $\dim H_1 > 1$. 因为 $N_1N_2 \neq 0$, 故存在平方幂零算子 $T : H_1 \to H_1$ 使得 $TN_1N_2 \neq 0$. 令

$$A = \begin{pmatrix} T & -2N_1 & -2N_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证， $A, A+2N \in \mathcal{N}_3(H)$ 但 $(A+N)^3 \neq 0$.

最后考虑 $N^2=0$ 的情形. 由于 N 的秩大于 1, 存在空间分解 $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ 使得

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & N_1 & N_2 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 N_1 和 N_3 不为 0. 取 $z \in H_3$ 使得 $N_1 z \neq 0$. 注意到，对任意 $M \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, N 都相似于算子

$$\begin{pmatrix} I & M & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} I & -M & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & N_1 & N_2 + MN_3 \\ 0 & 0 & 0 & N_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以, 不失一般性, 可以假设存在 $x \in H_4$ 使得 $N_2 x = 0$ 但 $N_3 x \neq 0$. 对于 $k \geq 4$ 的情形，分别定义 $T: H_1 \to H_4$ 和 $S: H_2 \to H_3$ 为 $T = x \otimes N_1 z$ 和 $S = z \otimes N_3 x$. 于是， $N_2 T = 0$. 易知

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2N_1 & -2N_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

和 $A+2N$ 都属于 $\mathcal{N}_4(H)$, 然而， $(A+N)^4 x = -\|N_1 z\|^2 \|N_3 x\|^2 x$, 因此 $A+N \notin \mathcal{N}(H)$. 当 $k=3$ 时，能够找到 $S \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$ 使得

$N_1SN_3 \neq 0$. 显然，算子

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2N_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

满足 $(A+N)^3 \neq 0$, 而 $(A+2N)^3 = 0$. 证毕.

引理 6.5.2 设 H 是无限维的复 Hilbert 空间，且 k 是一不小于 3 的正整数. 令 $A, B \in \mathcal{B}(H)$, 其中 A 是平方幂零算子且 $\operatorname{rank}(A) > 1$. 假定对任意有限秩幂零算子 $T \in \mathcal{B}(H)$, $A+T \in \mathcal{N}_k(H)$ 当且仅当 $B+T \in \mathcal{N}_k(H)$, 则 $A = B$.

证明 引理的假设条件蕴涵 $\dim\ker A = \infty$ 且 $\dim(\overline{\operatorname{rng}}(A^*)) \geq 2$. 令 $H_1 = \ker A$, $H_2 = \overline{\operatorname{rng}}(A^*)$. 关于空间分解 $H = H_1 \oplus H_2$, 有

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

首先证明 $B_4 = 0$. 假设不然，则有 $x \in H_2$ 使得 $B_4x = y \neq 0$. 取一满足 $Cx = -B_2x$ 的一秩算子 $C \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$. 如果 $y = \lambda x$, 则定义有限秩幂零算子 $T = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 显然，$(A+T)^2 = 0$ 而 $(B+T)x = \lambda x$, 与假设矛盾. 所以可设 x 与 y 线性无关. 取一秩幂零算子 $D \in \mathcal{B}(H_2)$ 使得 $Dx = x - y$, 而令 $T = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, 则 $(A+T)^3 = 0$ 但 $(B+T)x = x$, 矛盾. 这就证明了 $B_4 = 0$.

下证 B_1 是恒等算子的常数倍. 如若不然，则存在 $x \in H_1$ 使得 x 与 $B_1x = y$ 线性无关. 于是可取到满足条件 $Dx = x - y$ 的一秩幂零算子 $D \in \mathcal{B}(H_1)$. 再取满足 $CB_3x = -B_2B_3x$ 的一秩算子 $C \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, 那么，算子 $T = \begin{pmatrix} D & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 满足 $(A+T)^3 = 0$ 而 $(B+T)(x + B_3x) = x + B_3x$, 矛盾. 于是存在数 λ 使得 $B_1 = \lambda I$.

假设 $B_3 \neq 0$, 则存在 $x \in H_1$ 使得 $B_3 x = z \neq 0$. 取与 z 线性无关的 $y \in H_2$, 于是可取到秩一幂零算子 $C \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ 使得 $Cy = x - \lambda x - B_2 y$. 取一秩幂零算子 $D \in \mathcal{B}(H_2)$ 使得 $Dy = y - z$ 且令 $T = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, 则有 $(A+T)^3 = 0$ 但 $(B+T)(x+y) = x+y$, 这不可能. 因此我们必有 $B_3 = 0$. 又由于 $B^k = 0$, 于是也有 $\lambda = 0$, 即 $B_1 = 0$.

对任意 $y \in H_1$, 取与 y 线性无关的向量 $x \in H_1$, 再取有限秩算子 $C \in \mathcal{N}_k(H_1)$ 使得 $C^{k-1} = x \otimes y$. 令 $D \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ 是满足 $D^* y = -A_2^* y$ 的任意算子. 如果令 $T = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则有 $(A+T)^k = 0$, 从而也有 $(B+T)^k = 0$. 于是 $(B_2 + D)^* y = 0$. 因为 y 是任意的, 故有 $A_2 = B_2$, 即 $A = B$. 证毕.

定理 6.5.3 设 H 和 K 是无限维复 Hilbert 空间, k 是不小于 3 的整数. 令 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是可加满射. 则 Φ 双边保算子的 k 阶幂零性当且仅当存在非零复数 c 和从 H 到 K 的有界可逆线性或共轭线性算子 A 使得要么 $\Phi(T) = cATA^{-1}$ 对所有的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 都成立; 要么 $\Phi(T) = cAT^*A^{-1}$ 对所有的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 都成立.

证明 首先证明 Φ 是单射. 如果对某个非零算子 $T \in \mathcal{B}(H)$, $\Phi(T) = 0$, 则 $T^k = 0$. 现在我们可找到算 $S \in \mathcal{N}_k(H)$ 使得 $T + S \notin \mathcal{N}_k(H)$. 所以 $\Phi(S) = \Phi(T+S) \notin \mathcal{N}_k(K)$, 矛盾.

下证 Φ 双边保一秩幂零性. 事实上, 我们只需证明 Φ 保一秩幂零性即可. 令 $T \in \mathcal{N}_1(H)$ 任意, 我们将证明 $\Phi(T) \in \mathcal{N}_1(K)$. 对任意的 $S \in \mathcal{N}_k(K)$, 取 $R \in \mathcal{N}_k(H)$ 满足 $\Phi(R) = S$. 如果 $S + \Phi(T) \notin \mathcal{N}_k(K)$, 那么 $T + R \notin \mathcal{N}_k(H)$. 由引理 6.5.1, $2T + R \notin \mathcal{N}_k(H)$. 从而 $2\Phi(T) + S \notin \mathcal{N}_k(K)$. 再次利用引理 6.5.1, 我们得到 $\Phi(T) \in \mathcal{N}_1(K)$. 由定理 2.5.1, 存在非零数 $c \in \mathbb{C}$ 和可逆有界线性或共轭线性算子 $A : H \to K$ 使得下列性质之一成立:

(i) 对任意的 $x, f \in H$ 且 $\langle x, f \rangle = 0$, $\Phi(x \otimes f) = cA(x \otimes f)A^{-1}$;

(ii) 对任意的 $x, f \in H$ 且 $\langle x, f\rangle = 0$, $\Phi(x\otimes f) = cA(x\otimes f)^*A^{-1}$.

注意到每个有限秩幂零算子都是某些一秩幂零算子的和. 令 $T \in \mathcal{F}(H)\cap\mathcal{N}(H)$ 任意. 则 $T = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes f_i$, 其中 $x_i, f_i \in H$ 满足 $\langle x_i, f_i\rangle = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 如果情形 (i) 成立, 则

$$\begin{aligned}\Phi(T) &= \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i \otimes f_i) = \sum_{i=1}^{n} cA(x_i \otimes f_i)A^{-1}\\ &= c\sum_{i=1}^{n} A(x_i \otimes f_i)A^{-1} = cATA^{-1}.\end{aligned}$$

定义 $\Psi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ 为 $\Psi(T) = c^{-1}A^{-1}\Phi(T)A$. 显然 Ψ 是双边保算子 k- 阶幂零性的可加双射. 进而, 对每个有限秩幂零算子 N, 有 $\Psi(N) = N$. 令 T 是任意无限秩平方零算子. 对任意的 $N \in \mathcal{F}(H)\cap\mathcal{N}(H)$, 如果 $T + N \in \mathcal{N}_k(H)$, 则 $\Psi(T) + N = \Psi(T) + \Psi(N) = \Psi(T+N) \in \mathcal{N}_k(H)$. 由引理 6.5.2, 我们有 $T = \Psi(T)$. 由于 $\mathcal{B}(H)$ 中的每个算子都可表示为至多 5 个平方幂零算子的和, 故对所有的 T, 我们都有 $\Psi(T) = T$, 从而 $\Phi(T) = cATA^{-1}$ 对所有的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 成立. 如果情形 (ii) 成立, 则类似地有 $\Phi(T) = cAT^*A^{-1}$ 对每个 $T \in \mathcal{F}(H)\cap\mathcal{N}(H)$ 成立. 定义 Ψ 如下: 对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$, $\Psi(T) = (c^{-1}A^{-1}\Phi(T)A)^*$, 则 Ψ 是可加双射且双边保具有幂零指标不大于 k 的幂零算子, 所以 $\Psi(T) = T$ 对所有的 T 成立. 故 $\Phi(T) = cAT^*A^{-1}$ 对每个 $T \in \mathcal{B}(H)$ 成立. 证毕.

由定理 6.5.3 和定理 6.4.5 立得下面推论.

推论 6.5.4 设 H 和 K 是无限维复 Hilbert 空间, k 是不小于 3 的整数. 令 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是可加满射. 则下列条件等价:

(1) Φ 双边保算子的 k 阶幂零性.

(2) Φ 双边保算子的幂零性.

设 $f(t) = (t - t_1)\cdots(t - t_k)$ 是一复多项式且 $\deg(f) = k \geq 2$, 其中 $t_1, \cdots, t_k$ 可以是重复复数. 令 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是双边保

零化 $f(t)$ 的算子的可加满射. 我们验证 Φ 双边保 k 阶幂零性. 令 $N \in \mathcal{B}(H)$ 是具有幂零指标为 r $(\leq k)$ 的幂零算子, 则存在 H 的直和分解 $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_r$, 使得

$$N = \begin{pmatrix} 0 & N_{12} & N_{13} & \cdots & N_{1r} \\ 0 & 0 & N_{23} & \cdots & N_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N_{(r-1)r} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

如果

$$A = \begin{pmatrix} t_1 I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_r I \end{pmatrix},$$

则对任意的有理数 α, $f(A + \alpha N) = 0$. 所以对每个有理数 α, 都有 $f(\Phi(A) + \alpha\Phi(N)) = 0$. 而此蕴涵所有的有理数都是多项式 $q(t) = f(\Phi(A) + t\Phi(N))$ 的根. 于是算子多项式 $q(t)$ 的每个系数都等于 0. 特别地, t^k 的系数为 0, 从而 $\Phi(N)^k = 0$. 假定对某个 $M \in \mathcal{B}(H)$, $\Phi(M)^k = 0$. 如上我们可找到 $C \in \mathcal{B}(K)$ 使得 $f(C + \alpha\Phi(M)) = 0$ 对所有的 $\alpha \in \mathbb{C}$ 成立. Φ 的满射性蕴涵存在 $D \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $\Phi(D) = C$. 于是 $f(D + \alpha M) = 0$ 对每个有理数 α 成立, 故 $M^k = 0$.

下面是本节的主要结果. 回顾一下, 对于复多项式 $f(t)$, $\mathcal{Z}(f)$ 代表 f 的所有零点的集合且 $G(f) = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \mid \lambda\mathcal{Z}(f) \subseteq \mathcal{Z}(f)\}$. 显见如果 $\mathcal{Z}(f) \neq \{0\}$, 那么 $G(f)$ 是单位圆周的有限乘法子群, 这样对某个正整数 k, $G(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda^k = 1\}$. 如果 $\mathcal{Z}(f) = \{0\}$, 即如果 $f(t) = t^n$, 则 $G(f) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

定理 6.5.5 设 H 和 K 是无限维复 Hilbert 空间且 $f(t)$ 是一复多项式, $\deg(f) \geq 2$. 令 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是可加满射, 且对

每个一秩幂等元 P 都有 $\Phi(\mathbb{C}P) \subset \mathbb{C}\Phi(P)$ 成立. 则 Φ 双边保零化 $f(t)$ 的元当且仅当存在非零复数 $c \in G(f)$ 和有界可逆线性或共轭线性算子 $A: H \to K$ 使得要么 $\Phi(T) = cATA^{-1}$ 对所有的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 都成立; 要么 $\Phi(T) = cAT^*A^{-1}$ 对所有的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 都成立. 进而如果 $\deg(f) > 2$, 条件 $\Phi(\mathbb{C}P) \subset \mathbb{C}\Phi(P)$ 可去掉.

证明 由定理前的分析及定理 6.5.3 和定理 6.3.4 立得. 证毕.

对于线性的情形, 我们有

定理 6.5.6 设 H 和 K 是无限维复 Hilbert 空间, $f(t)$ 是复多项式满足 $\deg(f) \geq 2$. 则线性满射 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 双边保零化 $f(t)$ 的元当且仅当存在非零复数 $c \in G(f)$ 和可逆算子 $A \in \mathcal{B}(H, K)$ 使得要么 $\Phi(T) = cATA^{-1}$ 对所有的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 成立; 要么 $\Phi(T) = cAT^{tr}A^{-1}$ 对所有的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 成立, 其中 T^{tr} 代表 T 相对于 H 的任意给定基的转置.

§6.6 保谱半径的可加映射

设 X 是复 Banach 空间且 $T \in \mathcal{B}(X)$. 用 $r(T)$ 表示 T 的谱半径. 本节利用第四节的结果给出 $\mathcal{B}(X)$ 上保谱半径可加映射的刻画. 容易验证, 对于 $T \in \mathcal{B}(X), x \in X, f \in X^*$ 及 $\lambda \notin \sigma(T)$, 我们有 $\lambda \in \sigma(T + x \otimes f)$ 当且仅当 $\langle (\lambda - T)^{-1}x, f \rangle = 1$. 本节我们将不加说明地应用这一事实.

定理 6.6.1 令 X 是复 Banach 空间且 $\dim X \geq 3$. 假定可加满射 $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ 保谱半径, 即对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$, 有 $r(\Phi(T)) = r(T)$, 则存在满足 $|c| = 1$ 的复数 c 并且要么

(1) 存在线性或共轭线性有界可逆算子 $A : X \to X$ 使得 $\Phi(T) = cATA^{-1}$ 对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$ 成立; 要么

(2) 存在线性或共轭线性有界可逆算子 $A : X^* \to X$ 使得 $\Phi(T) = cAT^*A^{-1}$ 对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$ 成立. 在此情形下, X 自反.

证明 我们分几步证明.

第一步 Φ 是单射.

假定对某个 $T \neq 0$, $\Phi(T)=0$. 取 $x\in X$ 使得 $y=Tx\neq 0$. 因为 $r(T)=0$, 因此 $\{y,x\}$ 线性无关. 令 V 是 $\operatorname{span}\{x,y\}$ 在 X 中的闭补子空间. 设 $N\in\mathcal{B}(X)$ 满足 $Nx=Ny=x-y$ 且对于 $v\in V$, $Nv=0$, 则 $N^2=0$, 因此 $r(\Phi(N))=0$. 另一方面, $(T+N)x=x$ 蕴涵 $r(\Phi(N))=r(\Phi(T+N))=r(T+N)\geq 1$, 矛盾.

第二步 存在满足 $|c|=1$ 的复数 c 和可加双射 $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 使得 h 到 $\mathbb{R}$ 的限制是恒等映射, 且对每个 $\lambda\in\mathbb{C}$, $|h(\lambda)|=|\lambda|$ 且 $\Phi(\lambda I)=ch(\lambda)I$.

首先证明 $\Phi(\mathbb{C}I)\subseteq\mathbb{C}I$. 显然, 我们只需证明对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 及对每个 $x\in X$, $\Phi(\lambda I)x$ 和 x 线性相关. 假定对某个 $x\in X$, $\Phi(\lambda I)x$ 和 x 线性无关. 令 W 是 $\operatorname{span}\{x,\Phi(\lambda I)x\}$ 的闭补子空间. 取 $\lambda_0\in\mathbb{R}$ 使得 $\lambda_0>|\lambda|$. 定义 $M\in\mathcal{B}(X)$ 如下:

$$Mx=\lambda_0x-\Phi(\lambda I)x,$$
$$M(\Phi(\lambda I)x)=\lambda_0^2x-\lambda_0\Phi(\lambda I)x,$$
$$Mw=0\qquad\forall w\in W.$$

显然 $M^2=0$. 因为 Φ 是满射, 存在某个 $R\in\mathcal{B}(X)$ 使得 $r(R)=0$ 且 $M=\Phi(R)$. 从而 $r(\lambda I+R)=|\lambda|=r(\Phi(\lambda I)+M)$. 但这与 $(\Phi(\lambda I)+M)x=\lambda_0x$ 矛盾.

于是对某个复数 c, 我们有 $\Phi(I)=cI$. 因为 Φ 保谱半径, 必有 $|c|=1$. 进而我们可得可加映射 $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 使得 $\Phi(\lambda I)=ch(\lambda)I$ 且 $|h(\lambda)|=|\lambda|$. 不难看出, $h(\lambda)=\lambda$ 对每个 $\lambda\in\mathbb{R}$ 成立. 应用上面的讨论于 Φ^{-1}, 易知 h 是双射. 不失一般性, 可假定 $c=1$, 从而 $\Phi(\lambda I)=h(\lambda)I$.

第三步 令 $\pi(T)=\{\lambda\mid\lambda\in\sigma(T)$ 且 $|\lambda|=r(T)\}$, 则对每个 $T\in\mathcal{B}(X)$, 都有 $\pi(\Phi(T))=h(\pi(T))$.

任取 $\lambda\in\pi(T)$, 我们有 $r(\Phi(T+\lambda I))=r(T+\lambda I)=2|\lambda|=r(\Phi(T)+h(\lambda)I)$. 故存在 $\alpha\in\sigma(\Phi(T))$ 使得 $|\alpha+h(\lambda)|=2|\lambda|=2|h(\lambda)|$. 因为 $r(\Phi(T))=r(T)$, 我们有 $|\alpha|\leq|\lambda|$, 但 $\alpha=h(\lambda)$. 这样 $h(\lambda)\in\sigma(\Phi(T))$ 且 $|h(\lambda)|=r(\Phi(T))$, 因此 $h(\lambda)\in\pi(\Phi(T))$. 此

蕴涵 $h(\pi(T)) \subseteq \pi(\Phi(T))$. 因为 Φ^{-1} 保谱半径, 因此也有 $\pi(T) \supseteq h^{-1}(\pi(\Phi(T)))$. 故 $\pi(\Phi(T)) = h(\pi(T))$.

第四步 设 $S \in \mathcal{B}(X)$ 使得对某个 $k \geq 2$, 有 $S^k = 0$. 如果 $T \in \mathcal{F}(X)$ 满足 $TQ^iT = 0$, $i = 0, 1, 2, \cdots, k-1$, 其中 $Q = \Phi(S)$, 则 $r(\lambda Q^k + TQ^{k-1} + QTQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1}T) = 0$ 对每个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 成立.

令 $B_1 = TQ^{k-1} + QTQ^{k-2} + \cdots + Q^{k-1}T$ 且 $B_2 = Q^k$. 那末 $B_1 \in \mathcal{F}(X)$, $r(B_2) = 0$. 注意到, 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $B_1 + \lambda B_2$ 的谱是可数集且惟一可能的聚点为 0, 从而 $\sigma(B_1 + \lambda B_2)$ 是 λ 的连续集值函数 (例如, 参见 [9; Corollary 3.4.5]). 故 $r(B_1 + \lambda B_2)$ 在 $\mathbb{C}$ 上连续.

因为 $r(T+\lambda Q)^k = r((T+\lambda Q)^k), T^2 = TQT = \cdots = TQ^{k-1}T = 0$, 所以 $r(T + \lambda Q)^k = |\lambda|^{k-1} r(B_1 + \lambda B_2)$. 对于 $|\lambda| \geq 1$, $\lambda = r + is$, 其中 $r, s \in \mathbb{Q}$, 我们有

$$r(T + \lambda Q)^k = |\lambda|^k r(\Phi^{-1}(\lambda^{-1}T) + S)^k = |\lambda|^k r((\Phi^{-1}(\lambda^{-1}T) + S)^k).$$

注意到 $S^k = 0$, 于是

$$r(T + \lambda Q)^k = |\lambda|^k r(A_0(\lambda) + A_1(\lambda) + \cdots + A_{k-1}(\lambda)),$$

其中

$$\begin{aligned} A_0(\lambda) &= \Phi^{-1}(\lambda^{-1}T)^k, \\ A_1(\lambda) &= \Phi^{-1}(\lambda^{-1}T)^{k-1}S + \Phi^{-1}(\lambda^{-1}T)^{k-2}S\Phi^{-1}(\lambda^{-1}T) \\ &\quad + \cdots + S\Phi^{-1}(\lambda^{-1}T)^{k-1}, \\ &\cdots\cdots \\ A_{k-1}(\lambda) &= S^{k-1}\Phi^{-1}(\lambda^{-1}T) + \cdots + \Phi^{-1}(\lambda^{-1}T)S^{k-1}. \end{aligned}$$

故我们得到

$$|\lambda|^{k-1} r(B_1 + \lambda B_2) = |\lambda|^k r(A_0(\lambda) + A_1(\lambda) + \cdots + A_{k-1}(\lambda)),$$

而此蕴涵

$$\begin{aligned} r(B_1+\lambda B_2) &= |\lambda| r(A_0(\lambda)+A_1(\lambda)+\cdots+A_{k-1}(\lambda)) \\ &\le |\lambda|(\|A_0(\lambda)\|+\|A_1(\lambda)\|+\cdots+\|A_{k-1}(\lambda)\|). \end{aligned}$$

令 $n=\max\{\|\Phi(T)\|,\|\Phi(iT)\|\}$. 则对于 $j=0,\cdots,k-1$, 我们有

$$\begin{aligned} &|\lambda|\|\Phi^{-1}(\lambda^{-1}T)\|^{k-j} \\ &= |\lambda|\left\|\Phi^{-1}\left(\frac{(r-is)T}{r^2+s^2}\right)\right\|^{k-j} \\ &= |\lambda|(r^2+s^2)^{j-k}\|r\Phi^{-1}(T)-s\Phi^{-1}(iT)\|^{k-j} \\ &\le |\lambda|(r^2+s^2)^{j-k}(\|r\Phi^{-1}(T))\|+\|s\Phi^{-1}(iT)\|)^{k-j} \\ &= |\lambda|(r^2+s^2)^{j-k}(|r|\|\Phi^{-1}(T))\|+|s|\|\Phi^{-1}(iT)\|)^{k-j} \\ &\le |\lambda|(r^2+s^2)^{j-k}(|r|+|s|)^{k-j}n^{k-j} \\ &\le |\lambda|(r^2+s^2)^{j-k}2^{\frac{k-j}{2}}(r^2+s^2)^{\frac{k-j}{2}}n^{k-j} \\ &= 2^{\frac{k-j}{2}}n^{k-j}(r^2+s^2)^{j-k+\frac{k-j}{2}+\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{k-j}{2}}n^{k-j}|\lambda|^{j-k+1}\le 2^{\frac{k-j}{2}}n^{k-j}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} |\lambda|\|A_j(\lambda)\| &= |\lambda|\|\Phi^{-1}(\lambda^{-1}T)^{k-j}S^j+\cdots+S^j\Phi^{-1}(\lambda^{-1}T)^{k-j}\| \\ &\le |\lambda|C_k^j\|\Phi^{-1}(\lambda^{-1}T)^{k-j}\|\|S\|^j \\ &\le C_k^j 2^{\frac{k-j}{2}}n^{k-j}\|S\|^j \end{aligned}$$

且

$$r(B_1+\lambda B_2)\le\sum_{j=0}^{k-1}C_k^j 2^{\frac{k-j}{2}}n^{k-j}\|S\|^j,$$

其中 $C_k^j=\dfrac{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}{j(j-1)\cdots 2\cdot 1\cdot(k-j)(k-j-1)\cdots 2\cdot 1}$. 另一方面, 对于 $|\lambda|<1$, 我们有 $r(B_1+\lambda B_2)\le\|B_1\|+\|B_2\|$. 令 $\mathfrak{G}=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\lambda=r+is,\ r,s\in\mathbb{Q}\}$. 我们已经证明了函数

$\lambda \to r(B_1+\lambda B_2)$ 在 $\mathfrak{G}$ 上的限制是有界的. 现在由 $r(B_1+\lambda B_2)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的连续性易知 $\lambda \to r(B_1+\lambda B_2)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界. 由命题 1.2.2 知谱半径是次调和函数, 现在由次调和函数的 Liouville 定理 1.1.10, 我们有 $r(B_1+\lambda B_2) = r(B_1)$ 对每个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 成立. 又由于 $B_1T = 0$, 容易验证, 对某些 $X_i \in \mathcal{B}(X)$,

$$\begin{aligned}B_1^2 &= (TQ^{k-1} + QTQ^{k-2} + Q^2TQ^{k-3} + \cdots + Q^{k-1}T)^2\\ &= X_{k-2}TQ^{k-2} + X_{k-3}TQ^{k-3} + \cdots + X_0T,\end{aligned}$$

因而 $B_1^2QT = B_1^2T = 0$. 进而, 此蕴涵对某些 $Y_i \in \mathcal{B}(X)$, B_1^3 具有形式

$$B_1^3 = Y_{k-3}TQ^{k-3} + \cdots + Y_0T,$$

故 $B_1^3Q^2T = B_1^3QT = B_1^3T = 0$. 重复这个过程, 我们得到 $B_1^{k+1} = 0$. 所以对每个 $\lambda \in \mathbb{C}$, $r(B_1+\lambda B_2) = 0$.

第五步 设 $S \in \mathcal{B}(X)$. 如果对某个 $k \geq 2$, $S^k = 0$, 则 $\Phi(S)^{2k-1} = 0$.

与定理 4.6.1 证明中的第二步相同, 故从略.

第六步 因为 Φ^{-1} 也保谱半径, 因此事实上, 我们已经证明了 Φ 双边保幂零性. 现在应用定理 6.4.3, 存在非零数 d 和 $\mathbb{C}$ 的环自同构 τ 使得下列性质之一成立:

(i) 存在 τ- 拟线性双射算子 $A: X \to X$ 使得对每个 $T \in \mathcal{B}_0(X)$ 都有 $\Phi(T) = dATA^{-1}$;

(ii) 存在 τ- 拟线性双射算子 $A: X^* \to X$ 使得对每个 $T \in \mathcal{B}_0(X)$ 都有 $\Phi(T) = dAT^*A^{-1}$, 其中 $\mathcal{B}_0(X)$ 代表所有幂零算子的线性张.

因为 $r(\lambda T) = r(\Phi(\lambda T)) = r(\tau(\lambda)\Phi(T))$, 故对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\tau(\lambda)| = |\lambda|$. 于是 τ 连续, 从而要么 $\tau(\lambda) = \lambda$ 对所有的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 成立; 要么 $\tau(\lambda) = \overline{\lambda}$ 对所有的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 成立. 由 Φ 的保谱半径性也易知 A 有界. 如果情形 (i) 成立, 定义 $\Psi: \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ 如下:

$$\Psi(T) = A^{-1}\Phi(T)A, \qquad \forall T \in \mathcal{B}(X);$$

如果情形 (ii) 成立，则定义 $\Psi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(X)$ 如下：

$$\Psi(T)=\kappa^{-1}A^*\Phi(T)^*(A^{-1})^*\kappa,\quad \forall T\in\mathcal{B}(X),$$

其中 κ 是 X 到 X^{**} 的自然嵌入. 无论哪种情形，Ψ 都是保谱半径的可加双射，$\Psi(I)=I$ 且 $\Psi(N)=dN$ 对每个幂零算子 $N\in\mathcal{B}(X)$ 都成立. 除此之外，我们还有，要么对每个 $T\in\mathcal{B}(X)$, $\pi(\Psi(T))=h(\pi(T))$; 要么对每个 $T\in\mathcal{B}(X)$, $\pi(\Psi(T))=\overline{h(\pi(T))}$. 只要我们能证明 $d=1$ 且对每个 $T\in\mathcal{B}(X)$, $\Psi(T)=T$, 则可完成定理的证明.

第七步 我们断言，$d=1$ 且对每个一秩幂等元 $P,\Psi(P)=P$.

令 $x\otimes f$ 是一秩幂等算子，于是 $\langle x,f\rangle=1$. 如果 x 与 $\Psi(x\otimes f)x$ 线性无关，则 $\Psi(x\otimes f)x=\alpha x+z$, 其中，$\alpha=\langle x,f\rangle\in\mathbb{C}$ 而 $0\neq z\in\ker f$. 取 $g\in X^*$ 使得 $\langle x,g\rangle=0$ 而 $\langle z,g\rangle=1$. 记 $w=\Psi(x\otimes f)z$，则我们有 $w=\beta x+\gamma z+u$, 其中 $\beta=\langle w,f\rangle$, $\gamma=\langle w,g\rangle$ 而 $u=w-\beta x-\gamma z\in\ker f\cap\ker g$. 令

$$\delta=(2-\alpha)(2-\gamma)-\beta,$$
$$N=d^{-1}(\delta x-u)\otimes g,$$
$$A=N+x\otimes f.$$

显然，$N^2=0$, 从而有 $\Psi(N)=dN$, $\Psi(A)=\Psi(x\otimes f)+dN$. 于是 $\Psi(A)((2-\gamma)x+z)=2((2-\gamma)x+z)$. 另一方面，由于 $A^3=A^2$, 我们有 $r(A)\leq 1$. 这个矛盾说明，对每个一秩幂等算子 $x\otimes f$, 都有 $\Psi(x\otimes f)x$ 与 x 线性相关，即存在 $\lambda_{x,f}\in\mathbb{C}$ 使得 $\Psi(x\otimes f)x=\lambda_{x,f}x$.

取 $x,y\in X$ 和 $f,g\in X^*$ 使得 $\langle x,f\rangle=\langle y,g\rangle=1$, $\langle x,g\rangle=\langle y,f\rangle=0$. 于是 $x\otimes g$, $y\otimes f$ 以及 $(x-y)\otimes(f+g)$ 都是幂零的. 因为

$$x\otimes f-y\otimes g=y\otimes f-x\otimes g+(x-y)\otimes(f+g),$$

故有

$$\Psi(x\otimes f)-\Phi(y\otimes g)=d(x\otimes f-y\otimes g).$$

由此推出

$$\Psi(x\otimes f)y=\lambda_{y,g}y-dy.$$

因此，对任意一秩幂等算子 $x\otimes f$ 以及 $y\in\ker f$，向量 $\Psi(x\otimes f)y$ 落在 y 张成的一维子空间中．于是， $\Phi(x\otimes f)$ 在 $\ker f$ 上的限制是恒等算子的常数倍．

总结上述论证，对任意一秩幂等元 P，存在 $\lambda_P,\mu_P\in\mathbb{C}$ 使得 $\lambda_P\neq\mu_P$ 且 $\Psi(P)=\lambda_PP+\mu_P(I-P)$．特别地，我们有 $\sigma(\Psi(P))=\{\lambda_P,\mu_P\}$．因为 $\pi(\Psi(P))=h(\pi(P))=\{h(1)\}=\{1\}$ (或 $\pi(\Psi(P))=\overline{h(\pi(P))}=\{h(1)\}=\{1\}$)，因此要么 $\lambda_P=1$ 且 $|\mu_P|<1$ 要么 $\mu_P=1$ 且 $|\lambda_P|<1$．进而，

$$\begin{aligned}\{-1,1\}&=\pi(I-2P)=h(\{1,-1\})\\&=\overline{h(\{1,-1\})}=\pi(I-2\Psi(P))\\&\subseteq\sigma(I-2\Psi(P))=\{1-2\lambda_P,1-2\mu_P\},\end{aligned}$$

故 $\{-1,1\}=\{1-2\lambda_P,1-2\mu_P\}$．所以 $\lambda_P=0$ 或者 $\mu_P=0$，即要么 $\Psi(P)=P$ 要么 $\Psi(P)=I-P$．现在令 P 和 Q 是满足 $PQ=QP=0$ 的一秩幂等元．根据上面论证，我们有 $\Psi(P)-\Psi(Q)=d(P-Q)$．由此易知，要么 $\Psi(P)=P$, $\Psi(Q)=Q$ 且 $d=1$ 要么 $\Psi(P)=I-P$, $\Psi(Q)=I-Q$ 且 $d=-1$．然而，如果后者发生，则有 $\Psi(P+Q)=2I-(P+Q)$，又由于 $\dim X\geq 3$，故 $1=r(P+Q)=r(\Psi(P+Q))=2$，导致矛盾．

第八步 对每个 $T\in\mathcal{B}(X)$, $\Psi(T)=T$．

假定对某个 $T\in\mathcal{B}(X)$ 以及某个非零向量 $x\in X$, $Tx=x$．给定 $\lambda\in\mathbb{C}$ 满足 $|\lambda|>\|T\|$，我们有 $(\lambda I-T)^{-1}x=\frac{1}{\lambda-1}x$．取 $f\in X^*$ 使得 $\langle x,f\rangle=1$．则 $\lambda\in\sigma(T+\mu x\otimes f)$ 当且仅当 $\langle\mu(\lambda I-T)^{-1}x,f\rangle=1$．故 $\lambda=1+\mu$．因此

$$\sigma(T+\mu x\otimes f)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C}\mid|\lambda|\leq\|T\|\}\cup\{1+\mu\}.$$

如果 $|\mu|>\max\{\|T\|+1,\|\Phi(T)\|+1\}$ 且 $\mu\in\mathbb{Q}$，则 $1+\mu\in\pi(T+\mu x\otimes f)$, $h(1+\mu)=\overline{h(1+\mu)}=1+\mu\in\pi(\Psi(T)+\mu x\otimes f)$．特别地，

$1+\mu\in\sigma(\Psi(T)+\mu x\otimes f)$. 于是我们有 $\mu f((I+\mu I-\Psi(T))^{-1}x)=1$, 即

$$\mu f((\mu I-(\Psi(T)-I))^{-1}x)=1.$$

由于函数 $\mu\to\mu f((\mu I-(\Psi(T)-I))^{-1}x)$ 解析且上面的方程对满足 $|\mu|>\max\{\|T\|+1,\|\Phi(T)\|+1\}$ 的所有 $\mu\in\mathbb{Q}$ 成立, 于是对满足 $|\mu|>\max\{\|T\|+1,\|\Phi(T)\|+1\}$ 的任意 $\mu\in\mathbb{C}$, $\mu f((\mu I-(\Psi(T)-I))^{-1}x)=1$, 即

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k}f((\Psi(T)-I)^k x)=1.$$

所以 $f((\Psi(T)-I)x)=0$, 即 $f(\Psi(T)x)=1$.

现在假定 $g\in X^*$ 且 $g(x)=0$, 则 $\langle x,(f+g)\rangle=1$ 蕴涵 $(f+g)(\Psi(T)x)=1$, 且 $g(\Psi(T)x)=0$, 所以 x 和 $\Psi(T)x$ 线性相关. 又因为 $f(x)=1$ 且 $f(\Psi(T)x)=1$, 因此 $\Psi(T)x=x$.

对任意 $y\in X$ 以及 $T\in\mathcal{B}(X)$, 我们将证明 $\Psi(T)y=Ty$. 令 $z=Ty$.

情形 1 y 与 z 线性无关. 取 $f\in X^*$ 使得 $f(y)=1$ 且 $f(z)=0$. 则 $F=(y-z)\otimes f$ 是一秩幂等元. 因此 $\Psi(F)=F$ 且 $(T+F)y=y$. 故 $\Psi(T+F)y=y$, 即 $\Psi(T)y=z$.

情形 2 $z=0$. 取 $f\in X^*$ 使得 $f(y)=1$. 则 $F=y\otimes f$ 是一秩幂等元. 因此 $\Psi(F)=F$ 且 $(T+F)y=y$. 故 $\Psi(T+F)y=y$, 即 $\Psi(T)y=0$.

情形 3 对某个非零数 $\lambda\in\mathbb{C}$, $z=\lambda y$. 取 $u\in X$, $f,g\in X^*$ 使得 $f(y)=1$, $f(u)=g(y)=0$ 且 $g(u)=1-\lambda$. 则 $u\otimes f$, $(1-\lambda)y\otimes g$ 和 $((1-\lambda)y-u)\otimes(f+g)$ 都是幂零算子. 我们有

$$\begin{aligned}
&\Psi((1-\lambda)y\otimes f-u\otimes g)\\
&=\Psi(u\otimes f-(1-\lambda)y\otimes g+((1-\lambda)y-u)\otimes(f+g))\\
&=u\otimes f-(1-\lambda)y\otimes g+((1-\lambda)y-u)\otimes(f+g)\\
&=(1-\lambda)y\otimes f-u\otimes g,
\end{aligned}$$

因此 $\Psi((1-\lambda)y\otimes f)y=\Psi(u\otimes g)y+((1-\lambda)y\otimes f-u\otimes g)y=(1-\lambda)y$. 由于 $(T+(1-\lambda)y\otimes f)y=y$, 于是 $\Psi(T)y+\Psi((1-\lambda)y\otimes f)y=y$. 这就证明了 $\Psi(T)y=\lambda y=z$.

综上所述, 对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$, 我们有 $\Psi(T)=T$. 证毕.

注 6.6.1 考查定理的证明, 不难看出, 定理 6.6.1 在标准算子代数的情形也是对的.

§6.7 注　记

§6.1 和 §6.2 主要是 Hou, Hou [115] 中的内容, 无限重复度 Banach 空间的概念属于 Hadwin Lunch Bunch [86]. 文献 [28] 中已证, 从 $\mathcal{B}(H)$ 到自身的保幂等性线性双射要么是自同构要么是反自同构, 其中 H 是复 Hilbert 空间. 而 [173] 中则证明, $\mathcal{B}(H)$ 上的一个线性满射双边保 r- 幂等性当且仅当它是数 1 的某个 $(r-1)$ 阶根与自同构或反自同构的乘积. §6.2 中定理 6.2.2 推广了 [28], [173] 中的已知结果, 甚至对于 Hilbert 空间情形也是如此.

§6.3 和 §6.5 取自 Bai, Hou [14]. 对于线性映射的情形, Šemrl [189] 在附加条件 Φ 保单位性的假定下获得定理 6.3.5 和定理 6.5.6, 此时, 当然有 $c=1$. 引理 6.5.1 和 6.5.2 及其证明本质上属于 Šemrl [189]. 结合定理 6.3.4 的证明, 与线性情形的结论相比较 (定理 6.3.5 和 6.3.6), 下列猜测是合理的.

猜测 6.7.1 设 H 和 K 是无限维 Hilbert 空间. 令 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$ 是连续可加满射. 则 Φ 保平方幂零算子当且仅当存在非零数 c 和从 H 到 K 的有界可逆线性或共轭线性算子 A 使得要么 $\Phi(T)=cATA^{-1}$ 对每个 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立; 要么 $\Phi(T)=cAT^*A^{-1}$ 对每个 $T\in\mathcal{B}(H)$ 成立.

需要指出的是, §6.3 和 §6.5 中结果的证明方法对一般 Banach 空间的情形不适用. 这是因为存在一个 Banach 空间 X, 使得 $\mathcal{B}(X)$ 上有非零的可乘线性泛函. 于是可知, $M=\mathrm{span}\mathcal{N}_k(X)$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 的真子空间. 令 $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(X)$ 是双边保零化多项式 $f(t)=t^k$

的元的线性满射，则 Φ 也是从 M 到 M 的满射. 用这里的方法只能确定 $\Phi|_M$ 的结构，而我们无法了解该映射在 M 之外的足够信息.

§6.4 和 §6.6 则取材于 Bai, Hou [15]. $\mathcal{B}_0(X)$ 上双边保幂零性的线性映射以及 $\mathcal{B}(X)$ 上保谱半径的线性映射之刻画先前分别被 Šemrl [187] 以及 Brešer 和 Šemrl [29] 获得. 引理 6.4.1 和 6.4.2 的证明以及定理 6.6.1 证明中第七步的前半部分直接取自这两个文献.

目前还没有得到 $\mathcal{B}(X)$ 上谱有界可加满射的具体刻画 (参见 §4.6). 我们猜测

猜测 6.7.2 设 X 是无限维复 Banach 空间. 令 $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ 是可加满射. 如果 Φ 是谱有界的，则要么 $\Phi(F) = 0$ 对所有的有限秩算子 $F \in \mathcal{B}(X)$ 都成立，要么存在非零数 c 和 X 上有界可逆线性或共轭线性算子 A 使得 $\Phi(T) = cATA^{-1}$ 对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$ 都成立；或者存在非零数 c 和有界可逆线性或共轭线性算子 $A : X^* \to X$ 使得 $\Phi(T) = cAT^*A^{-1}$ 对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$ 都成立.

第七章　套代数上的线性映射

前面几章所涉及的算子代数都是半单的甚至是素的. 然而，许多重要的算子代数不是半单的，套 (nest) 代数就是人们熟知的一类. 本章将集中讨论套代数上的线性保持问题.

第一节讨论作用在 Banach 空间套代数上保秩一性的线性映射,并给出在各种情形下保秩一性线性映射的结构. 当 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的有限套时，我们得到相应套代数上保秩一性线性映射更加具体的刻画. 作为第一节保秩一性线性映射结论的应用，第二节讨论套代数上的自同构与局部自同构. 首先证明了两个套代数之间的同构 (或反同构) 是空间的，并且得到两个套代数同构 (或反同构) 的充分必要条件；刻画了套代数上弱连续的满的局部自同构，特别地，证明了作用在 Hilbert 空间上的上三角算子矩阵代数的自同构是内的. 我们也证明了当 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的原子套时，相应套代数 Alg$\mathcal{N}$ 上的每个弱连续的满的局部自同构是自同构. 第三节讨论套代数上完全秩不增的线性映射，从而在套代数的情形肯定地回答了 §2.2 中的问题 2.2.1. 第四节刻画原子套代数上保幂等性的线性映射. 第五节讨论原子套代数上保零积的线性映射. 第六节刻画原子套代数上保多项式零化元的线性映射. 设 f 是一首项系数为 1, 常数项为零，没有重根且次数大于 1 的多项式，本节讨论了从原子套代数到其自身保持零化 f 的元的弱连续线性双射；其次，也给出了从原子套代数到 $\mathcal{B}(H)$ 的任一弱闭子代数的保持零化 f 的元的弱连续线性映射的刻画. 第七节刻画极大原子套代数上保数值域闭包的线性映射，同时还给出原子套代数的对角代数上保数值域闭包的弱连续线性满射的结构. 在第七节的基础上，第八节讨论极大原子套代数上保数值半径的线性映射，也讨论了原子套代数的对角代数上保数值半径的弱连

续线性满射.

本章总假定 X 和 Y (或 H 和 K) 是数域 $\mathbb{F}$ (为实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$) 上的 Banach 空间 (或 Hilbert 空间) 且 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 是分别作用在 X 和 Y (或 H 和 K) 上的两个套, Alg$\mathcal{N}$ 和 Alg$\mathcal{M}$ 分别代表相应的套代数. 令 $\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} = \text{Alg}\mathcal{N} \cap \mathcal{F}(X)$ 是 Alg$\mathcal{N}$ 中所有有限秩线性算子的集合. 对于 $N \in \mathcal{N}$, 令 $N_- = \bigvee\{M \in \mathcal{N} \mid M \subset N\}$, $N_+ = \bigwedge\{M \in \mathcal{N} \mid N \subset M\}$, 其中符号 " $\subset$ " 代表集合之间的真包含关系. 定义 $0_- = 0$, $X_+ = X$. 设 N 是 X 的闭线性子空间, 对于 $A \in \mathcal{A}$, 令 $A|_N$ 代表 A 到子空间 N 上的限制. 对任意的 $x \in N$, 令 $N^\perp = \{f \in X^* \mid \langle x, f\rangle = 0\}$, 其中 $\langle x, f\rangle$ 代表泛函 f 在 x 点的值. 集合 $\mathcal{D}_1(\mathcal{N}) = \cup\{N \in \mathcal{N} \mid N_- \neq X\}$, $\mathcal{D}_2(\mathcal{N}) = \cup\{N_-^\perp \mid N \in \mathcal{N}, N \neq 0\}$. 注意到, 如果 $\mathcal{N}$ 是 X 上的套, 则 $\mathcal{N}^\perp = \{N^\perp \mid N \in \mathcal{N}\}$ 是 X^* 上的套. 符号 GL(Alg$\mathcal{N}$) 代表 Alg$\mathcal{N}$ 中的可逆元群. 对任意的 $N \in \mathcal{N}$, $x \in N$ 和 $g \in N_-^\perp$, 记

$$L_x^N = \{x \otimes f \mid f \in N_-^\perp\}, \quad R_g^N = \{y \otimes g \mid y \in N\}.$$

§7.1 保秩一性的线性映射

本节总假定 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 是分别作用在 Banach 空间 X 和 Y 上的两个套, Alg$\mathcal{N}$ 和 Alg$\mathcal{M}$ 分别代表相应的套代数.

设 $\Phi : \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{M}$ 是线性映射. 对任意的 $F \in \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 如果 $\text{rank}(F) = 1$ 蕴涵 $\text{rank}(\Phi(F)) = 1$, 称 Φ 保秩一性; 如果 $\text{rank}(\Phi(F)) = \text{rank}(F)$, 称 Φ 保秩. 本节讨论套代数上保秩一性线性映射的结构.

引理 7.1.1 设 Φ: $\text{Alg}_{\mathcal{F}}(\mathcal{N}) \to \mathcal{B}(Y)$ 是保秩一性的线性映射, 则下列之一成立:

(1) 对任意的 $N \in \mathcal{N}$ 以及任意的 $x \in N$, 存在 $y(x) \in Y$ 使得 $\Phi(L_x^N) \subseteq L_{y(x)}$;

(2) 对任意的 $N \in \mathcal{N}$ 以及任意的 $x \in N$, 存在 $g(x) \in Y^*$ 使得 $\Phi(L_x^N) \subseteq R_{g(x)}$.

证明 分两步证明之.

第一步 取定 $M \in \mathcal{N}$, 并令 $x_0 \in M$. 则存在 $y_0 \in X$ 使得 $\Phi(L_{x_0}^M) \subseteq L_{y_0}$ 或者存在 $g_0 \in X^*$ 使得 $\Phi(L_{x_0}^M) \subseteq R_{g_0}$.

我们断言 $\dim\Phi(L_{x_0}^M) = 1$ 当且仅当 $\dim M_-^\perp = 1$. 充分性显然, 下证必要性. 因为 $\dim\Phi(L_{x_0}^M) = 1$, 因此对任意的 $f \in M_-^\perp$, 有 $\Phi(x_0 \otimes f) = \alpha(f)y_0 \otimes g_0$. 如果 $\dim M_-^\perp > 1$, 则存在线性无关的元 $f_1, f_2 \in M_-^\perp$ 使得 $x \otimes [\alpha(f_1)f_2 - \alpha(f_2)f_1]$ 是秩一算子, 但 $\Phi[x \otimes (\alpha(f_1)f_2 - \alpha(f_2)f_1)] = 0$, 与 Φ 保秩一性矛盾.

故我们可假定 $\dim M_-^\perp \geq 2$. 如果 $\Phi(L_{x_0}^M) \subseteq L_{y_0}$ 和 $\Phi(L_{x_0}^M) \subseteq R_{g_0}$ 都不成立, 则存在 $f_1, f_2 \in M_-^\perp$ 使得 $\Phi(x_0 \otimes f_1) = x_1 \otimes g_1$ 且 $\Phi(x_0 \otimes f_2) = x_2 \otimes g_2$, 其中 $\{x_1, x_2\}$ 和 $\{g_1, g_2\}$ 是两个线性无关的集合. 所以 $x_1 \otimes g_1 + x_2 \otimes g_2$ 是秩二算子且 $\Phi[x_0 \otimes (f_1 + f_2)] = x_1 \otimes g_1 + x_2 \otimes g_2$. 然而 $\Phi[x_0 \otimes (f_1 + f_2)]$ 具有秩一, 矛盾.

第二步 如果 $\Phi(L_{x_0}^M) \subseteq L_{y_0}$, 我们将证明引理中的情形 (1) 成立.

首先证明对任意的 $x \in M$, 有 $\Phi(L_x^M) \subseteq L_{y(x)}$. 令 $M_1 = \{x \in M \mid \Phi(L_x^M) \subseteq L_{y(x)}\}$, $M_2 = \{x \in M \mid \Phi(L_x^M) \subseteq R_{g(x)}$, 且 $\dim\Phi(L_x^M) \geq 2\}$. 不难验证 $M_1 \cup M_2 = M$ 且 $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. 因此只需证明 $M_2 = \emptyset$. 否则存在非零元 $x_1 \in M_2$ 使得对某个 $g_1 \in X^*$, 有 $\Phi(L_{x_1}^M) \subseteq R_{g_1}$. 显然 $x_0 + x_1 \in M$, 所以要么 $x_0 + x_1 \in M_2$ 要么 $x_0 + x_1 \in M_1$. 如果 $x_0 + x_1 \in M_2$, 那么对某个 $g_2 \in X^*$ 以及任意的 $f \in M_-^\perp$, 有 $\Phi[(x_0 + x_1) \otimes f] = y_2(f) \otimes g_2$. 因为对任意的 $f \in M_-^\perp$, 都有 $\Phi(x_0 \otimes f) = y_0 \otimes g_0(f)$ 且 $\Phi(x_1 \otimes f) = y_1(f) \otimes g_1$, 因此 $y_0 \otimes g_0(f) + y_1(f) \otimes g_1 = y_2(f) \otimes g_2$. 由于 $x_1 \in M$, 故对某个 $f \in M_-^\perp$, 有 $y_1(f)$ 和 y_0 线性无关, 于是存在 $b \in \mathbb{C}$ 使得 $g_2 = bg_1$. 从而 $g_0(f) \in \{bg_1 \mid b \in \mathbb{C}\}$, 此蕴涵 $\dim\Phi(L_{x_0}^M) = 1$, 与假设矛盾. 如果 $x_0 + x_1 \in M_1$, 类似可证 $\dim\Phi(L_{x_1}^M) = 1$, 又一次得到矛盾. 故必有 $M_2 = \emptyset$.

任取 $N \in \mathcal{N}$, 并假定 $\dim N_-^\perp \geq 2$. 下证对任意的 $x \in N$, 有 $\Phi(L_x^N) \subseteq L_{y(x)}$. 实际上, 如果 $M \subseteq N$, 则 $\Phi(L_{x_0}^N) \subseteq \Phi(L_{x_0}^M) \subseteq L_{y_0}$.

现在由前面的证明知，对任意的 $x \in N$，都有 $\Phi(L_x^N) \subseteq L_{y(x)}$. 如果 $N \subseteq M$，则对任意的 $x \in N$，$\Phi(L_x^M) \subseteq \Phi(L_x^N)$. 因为对任意的 $x \in N$，$\Phi(L_x^M) \subseteq L_{y(x)}$ 且 $\dim\Phi(L_x^M) \geq 2$，因此对任意的 $x \in N$，有 $\Phi(L_x^N) \subseteq L_{y(x)}$.

如果 $\Phi(L_{x_0}^M) \subseteq R_{g_0}$，类似地可证明引理的情形 (2) 成立. 证毕.

引理 7.1.2 设 $\Phi : \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathcal{B}(Y)$ 是线性映射，则 Φ 保秩一性当且仅当下列之一成立：

(1) 存在单射线性变换 $A : \mathcal{D}_1(\mathcal{N}) \to Y$ 和 $C : \mathcal{D}_2(\mathcal{N}) \to Y^*$ 使得对所有的 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$，$\Phi(x \otimes f) = Ax \otimes Cf$.

(2) 存在单射线性变换 $A : \mathcal{D}_2(\mathcal{N}) \to Y$ 和 $C : \mathcal{D}_1(\mathcal{N}) \to Y^*$ 使得对所有的 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$，$\Phi(x \otimes f) = Af \otimes Cx$.

(3) 存在满足在每个秩一算子上非零的线性映射 $\lambda(\cdot) : \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to Y^*$ 且存在向量 $y_0 \in Y$ 使得对每个 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$，$\Phi(T) = y_0 \otimes \lambda(T)$.

(4) 存在满足在每个秩一算子上非零的线性映射 $\delta(\cdot) : \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to Y$ 且存在泛函 $g_0 \in Y^*$ 使得对每个 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$，$\Phi(T) = \delta(T) \otimes g_0$.

证明 如果引理 7.1.1 的情形 (1) 成立，我们将证明引理 7.1.2 的结论 (1) 或 (3) 成立.

断言 1 如果 $\dim\{y(x) \mid x \in N, N \in \mathcal{N}\} = 1$，那么引理 7.1.2 的情形 (3) 成立.

因为 $\dim\{y(x) \mid x \in N, N \in \mathcal{N}\} = 1$，因此存在 $y_0 \in Y$ 使得 $y(x) = \alpha(x)y_0$ 且 $\Phi(x \otimes f) = y(x) \otimes g_x(f) = y_0 \otimes \alpha(x)g_x(f)$，其中 $\alpha(x)$ 是依赖于 x 的复数. 定义线性映射 $\lambda(\cdot) : \bigcup\{L_x^N \mid N \in \mathcal{N}, x \in N\} \to Y^*$ 使得 $\lambda(x \otimes f) = \alpha(x)g_x(f)$. 则对任意的 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$，我们有 $\Phi(x \otimes f) = y_0 \otimes \lambda(x \otimes f)$.

断言 2 如果 $\dim\{y(x) \mid x \in N, N \in \mathcal{N}\} > 1$，则引理 7.1.2 中的情形 (1) 成立.

对任意的 $N \in \mathcal{N}$ 及任意的 $x \in N$，定义线性映射 $g_x : N_-^\perp \to$

Y^* 为 $\Phi(x\otimes f)=y(x)\otimes g_x(f)$. 我们断言 $\dim\{g_x \mid x\in N\}=1$. 事实上，可假定 $\dim N>1$, 故可找到 N 及两个线性无关的元 x_1, $x_2\in N$ 使得 $y(x_1)$ 和 $y(x_2)$ 线性无关. 因为 $\Phi[(x_1+x_2)\otimes f]=y(x_1+x_2)\otimes g_{12}(f)=y(x_1)\otimes g_1(f)+y(x_2)\otimes g_2(f)$ 的秩至多为 1, 其中 g_1, g_2 和 g_{12} 分别代表由 x_1, x_2 和 x_1+x_2 定义的映射, 因此对任意的 $f\in N_-^\perp$, 有 $g_1(f)$ 和 $g_2(f)$ 线性相关. 故 $g_1, g_2\in\{ag_{12}\mid a\in\mathbb{C}\}$. 显然对任意的 $x\in N$, $y(x_1), y(x)$ 和 $y(x_2), y(x)$ 不可能同时线性相关. 不妨假定 $y(x_1)$ 和 $y(x)$ 线性无关，则 $g_x\in\{ag_{12}\mid a\in\mathbb{C}\}$. 设 g_x 吸收一个合适的常数且由 $C_{N_-^\perp}$ 表示，则 $C_{N_-^\perp}$ 是从 $N_-^\perp$ 到 Y^* 的线性映射. 我们也得到线性映射 $A_N: N\to Y$, 使得对任意的 $x\in N$ 及 $f\in N_-^\perp$, 都有 $\Phi(x\otimes f)=A_Nx\otimes C_{N_-^\perp}f$.

对任意的 $M,N\in\mathcal{N}$ 及对任意的 $x\in M\cap N$ 和 $f\in N_-^\perp\cap M_-^\perp$, 有 $\Phi(x\otimes f)=A_Nx\otimes C_{N_-^\perp}f=A_Mx\otimes C_{M_-^\perp}f$. 假定 $N\subset M$, 则存在非零数 $a_{MN}\in\mathbb{C}$ 使得 $A_M|_N=a_{MN}A_N$ 并且 $C_{N_-^\perp}|_{M_-^\perp}=a_{MN}C_{M_-^\perp}$. 固定 $M\in\mathcal{N}$. 对任意的 $N\in\mathcal{N}$, 定义

$$\widetilde{A}_N=A_N,\qquad \widetilde{C}_{N_-^\perp}=C_{N_-^\perp},\qquad \text{如果 } N=M;$$

$$\widetilde{A}_N=a_{MN}A_N,\qquad \widetilde{C}_{N_-^\perp}=\frac{1}{a_{MN}}C_{N_-^\perp},\qquad \text{如果 } N\subset M;$$

$$\widetilde{A}_N=\frac{1}{a_{NM}}A_N,\qquad \widetilde{C}_{N_-^\perp}=a_{NM}C_{N_-^\perp},\qquad \text{如果 } M\subset N.$$

易验证 $\{\widetilde{A}_N\mid N\in\mathcal{N}, N_-\neq X\}$ 和 $\{\widetilde{C}_{N_-^\perp}\mid N\in\mathcal{N}, N\neq 0\}$ 是两个相容的映射簇. 所以存在线性映射 $A:\cup\{N\in\mathcal{N}\mid N_-\neq X\}\to Y$ 和 $C:\cup\{N_-^\perp\mid N\neq 0\}\to Y^*$ 使得对任意的 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A|_N=\widetilde{A}_N$ 且 $C|_{N_-^\perp}=\widetilde{C}_{N_-^\perp}$. 显然 A 和 C 满足引理中的条件 (1).

如果引理 7.1.1 的情形 (2) 成立，类似可证引理中的情形 (2) 或 (4) 成立. 证毕.

对于保秩映射，我们有下列推论.

推论 7.1.3 设 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathcal{B}(Y)$ 是线性映射，则下列等价.

(1) Φ 保秩.

(2) Φ 保秩一性且它的值域包含一个秩大于 1 的算子.

(3) 引理 7.1.2 中的 (1) 或 (2) 成立.

证明 (1)$\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) 显然. 至于 (3)$\Rightarrow$ (1), 假定引理 7.1.2 的 (1) 成立. 对任意的秩 k 算子 $F \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 由命题 1.4.4 知, 存在两个线性无关的向量集 $\{x_i \mid 1 \leq i \leq k\} \subset X$ 和 $\{f_i \mid 1 \leq i \leq k\} \subset X^*$ 使得 $F = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes f_i$, 其中 $x_i \otimes f_i \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ $(1 \leq i \leq k)$. 因为 A 和 C 是单射, 因此 $\{Ax_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{Cf_i\}_{i=1}^{k}$ 是两个线性无关的向量集, 所以 $\Phi(F) = \sum_{i=1}^{k} Ax_i \otimes Cf_i$ 具有秩 k, 故 Φ 保秩. 如果引理 7.1.2 中的情形 (2) 发生, 类似地可验证 Φ 保秩. 证毕.

定理 7.1.4 设 $\Phi : \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathcal{B}(Y)$ 是保秩一性的有界线性映射, 则下列断言之一成立:

(1) 存在单射线性变换 $A : \mathcal{D}_1(\mathcal{N}) \to Y$ 和 $C : \mathcal{D}_2(\mathcal{N}) \to Y^*$ 满足对 $N_- \neq X$ 及 $M \neq 0$ 的任意 $N, M \in \mathcal{N}$, 有 $A|_N$ 和 $C|_{M^\perp}$ 有界并且 $\sup\{\|A|_N\|\|C|_{N_-^\perp}\| \mid N \in \mathcal{N}, N \neq 0 \text{ 且 } N_- \neq X\} < \infty$, 使得对所有的 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x \otimes f) = Ax \otimes Cf$.

(2) 存在单射线性变换 $A : \mathcal{D}_2(\mathcal{N}) \to Y$ 和 $C : \mathcal{D}_1(\mathcal{N}) \to Y^*$ 满足对 $N \neq 0$ 及 $M_- \neq X$ 的任意 $N, M \in \mathcal{N}$, 有 $A|_{N_-^\perp}$ 和 $C|_M$ 有界并且 $\sup\{\|A|_N\|\|C|_{N_-^\perp}\| \mid N \in \mathcal{N}, N \neq 0 \text{ 且 } N_- \neq X\} < \infty$, 使得对所有的 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x \otimes f) = Af \otimes Cx$.

(3) 存在满足在每个秩一算子上非零的有界线性映射 $\lambda(\cdot)$: $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to Y^*$ 且存在向量 $y_0 \in Y$ 使得对每个 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = y_0 \otimes \lambda(T)$.

(4) 存在满足在每个秩一算子上非零的有界线性映射 $\delta(\cdot)$: $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to Y$ 且存在泛函 $g_0 \in Y^*$ 使得对每个 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = \delta(T) \otimes g_0$.

证明 由引理 7.1.2, 我们只需证明在情形 (1) (或 (2)) 中, 对满足 $N_- \neq X$ 以及 $M \neq 0$ 的任意 N, $M \in \mathcal{N}$, 有 $A|_N$ 和 $C|_{M^\perp}$

(或 $C|_N$ 和 $A|_{M_-^\perp}$) 有界. 假定 Φ 满足引理 7.1.2 中的 (1). 取非零向量 $f\in N_-^\perp$, 则对每个 $x\in N$, 我们有 $x\otimes f\in\text{Alg}\mathcal{N}$ 且 $\Phi(x\otimes f)=A|_N x\otimes C|_{N_-^\perp}f$. 假定 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset N$ 使得当 $n\to\infty$ 时, $x_n\to x$ 且 $A|_N x_n\to y$. 因为 Φ 有界, 因此 $A|_N x_n\otimes C|_{N_-^\perp}f\to A|_N x\otimes C|_{N_-^\perp}f$. 所以 $A|_N x=y$, 即 $A|_N$ 是闭算子. 由闭图定理知 $A|_N$ 有界. 类似可证 $C|_{M_-^\perp}$ 有界. 证毕.

注 7.1.1 注意到, 如果 $0_+\neq 0$, 那么 $\mathcal{D}_2(\mathcal{N})=X^*$; 如果 $X_-\neq X$, 则 $\mathcal{D}_1(\mathcal{N})=X$. 因此如果 $0_+\neq 0$, 那么在定理 7.1.4 (1) 中 C (或在 (2) 中 A) 有界; 如果 $X_-\neq X$, 那么在定理 7.1.4 (1) 中 A (或在 (2) 中 C) 有界.

现在我们刻画 $\text{Alg}_\mathcal{F}\mathcal{N}$ 和 $\text{Alg}_\mathcal{F}\mathcal{M}$ 之间保秩一性的线性映射.

定理 7.1.5 设 $\Phi:\text{Alg}_\mathcal{F}\mathcal{N}\to\text{Alg}_\mathcal{F}\mathcal{M}$ 是线性映射, 则 Φ 保秩一性当且仅当下列之一成立:

(1) 存在序同态 $\theta:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ 以及单射线性变换 $A:\mathcal{D}_1(\mathcal{N})\to\mathcal{D}_1(\mathcal{M})$ 和 $C:\mathcal{D}_2(\mathcal{N})\to\mathcal{D}_2(\mathcal{M})$ 满足对 $N_-\neq X$ 以及 $N\neq 0$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N)\subseteq\theta(N)$, $C(N_-^\perp)\subseteq\theta(N)_-^\perp$, 使得对所有的 $x\otimes f\in\text{Alg}_\mathcal{F}\mathcal{N}$, $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$.

(2) 存在序同态 $\theta:\mathcal{N}^\perp\to\mathcal{M}$ 以及单射线性变换 $A:\mathcal{D}_2(\mathcal{N})\to\mathcal{D}_1(\mathcal{M})$ 和 $C:\mathcal{D}_1(\mathcal{N})\to\mathcal{D}_2(\mathcal{M})$ 满足对 $N\neq 0$ 以及 $N_-\neq X$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N_-^\perp)\subseteq\theta(N_-^\perp)$, $C(N)\subseteq\theta(N_-^\perp)_-^\perp$, 使得对所有的 $x\otimes f\in\text{Alg}_\mathcal{F}\mathcal{N}$, $\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cx$.

(3) 存在 $M\in\mathcal{M}$, $y_0\in M$ 和满足在每个秩一算子上非零的线性变换 $\lambda(\cdot):\text{Alg}_\mathcal{F}\mathcal{N}\to M_-^\perp$, 使得对每个 $x\otimes f\in\text{Alg}_\mathcal{F}\mathcal{N}$, $\Phi(x\otimes f)=y_0\otimes\lambda(x\otimes f)$.

(4) 存在 $M\in\mathcal{M}$, $g_0\in M_-^\perp$ 和满足在每个秩一算子上非零的线性变换 $\delta(\cdot):\text{Alg}_\mathcal{F}\mathcal{N}\to M$, 使得对每个 $x\otimes f\in\text{Alg}_\mathcal{F}\mathcal{N}$, $\Phi(x\otimes f)=\delta(x\otimes f)\otimes g_0$.

证明 显然只需证必要性. 由条件知, 引理 7.1.2 的 (1)—(4) 之一成立.

设引理 7.1.2 的情形 (1) 发生. 对满足 $N_-\neq X$ 且 $N\neq 0$ 的

任意 $N\in\mathcal{N}$ 以及对任意的 $x\in N$, 令 $M_x=\bigwedge\{L\in\mathcal{M}\mid Ax\in L\}$. 那么 $\Phi(L_x^N)=\{Ax\otimes Cf\mid f\in N_-^\perp\}\subseteq L_{Ax}^{M_x}$. 因此对每个 $x\in N$, 有 $C(N_-^\perp)\subseteq(M_x)_-^\perp$. 所以 $C(N_-^\perp)\subseteq\bigwedge\{(M_x)_-^\perp\mid x\in N\}\in\mathcal{M}^\perp$, 故存在 $M\in\mathcal{M}$ 使得 $M_-^\perp=\bigwedge\{(M_x)_-^\perp\mid x\in N\}$ 且对任意的 $x\in N$, 有 $Ax\in M$, 于是 $A(N)\subseteq M$. 如果存在 $M'\in\mathcal{M}$ 使得 $A(N)\subseteq M'$, 那么对任意的 $x\in N$, $Ax\in M'$. 因为 M_x 是 $\mathcal{M}$ 中包含 Ax 的最小元, 因此 $M_x\subseteq M'$. 所以 $(M'_-)^\perp\subseteq(M_x)_-^\perp$, 故 $(M'_-)^\perp\subseteq\bigwedge\{(M_x)_-^\perp\mid x\in N\}=M_-^\perp$, 从而 $M\subseteq M'$, 即 M 是 $\mathcal{M}$ 中包含 $A(N)$ 的最小子空间. 令 $\theta(N)=M$, 则 $A(N)\subseteq M=\theta(N)$, $C(N_-^\perp)\subseteq M_-^\perp=\theta(N)_-^\perp$. 如果 $N=0$, 定义 $\theta(N)=0$; 如果 $N_-=X$, 定义 $\theta(N)=Y$. 我们断言 $\theta:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ 是序同态, 即当 $N_1\subset N_2$ 时, 有 $\theta(N_1)\subseteq\theta(N_2)$. 事实上, 取 $x_i\in N_i\in\mathcal{N}$ 使得 $N_i=\bigwedge\{L\in\mathcal{N}\mid x_i\in L\}$ $(i=1,2)$. 由 θ 的定义, $\theta(N_i)=\bigwedge\{L\in\mathcal{M}\mid Ax_i\in L\}$ $(i=1,2)$. 因为 $x_1\in N_1\subset N_2$, 因此由 $\theta(N_1)$ 的定义, 我们有 $Ax_1\in\theta(N_2)$, 所以 $\theta(N_1)\subseteq\theta(N_2)$.

假定引理 7.1.2 的 (2) 成立. 对满足 $N_-\neq X$ 以及 $N\neq 0$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 且对任意的 $f\in N_-^\perp$, 令 $M_f=\bigwedge\{L\in\mathcal{M}\mid Af\in L\}$. 那么 $\Phi(R_f^N)=\{Af\otimes Cx\mid x\in N\}\subseteq L_{Af}^{M_f}$. 因此对每个 $f\in N_-^\perp$, 有 $C(N)\subseteq(M_f)_-^\perp$. 这样 $C(N)\subseteq\bigwedge\{(M_f)_-^\perp\mid f\in N_-^\perp\}\in\mathcal{M}^\perp$, 故存在 $M\in\mathcal{M}$ 使得 $M_-^\perp=\bigwedge\{(M_f)_-^\perp\mid f\in N_-^\perp\}$ 且对任意的 $f\in N_-^\perp$, 有 $Af\in M$, 从而 $A(N_-^\perp)\subseteq M$. 如果 $M'\in\mathcal{M}$ 使得 $A(N_-^\perp)\subseteq M'$, 那么对任意的 $f\in N_-^\perp$, $Af\in M'$, 因此由 M_f 的极小性, 我们有 $M'\supseteq M_f$, 所以 $(M')_-^\perp\subseteq\bigwedge\{(M_f)_-^\perp\mid f\in N_-^\perp\}=M_-^\perp$, 于是 $M'\supseteq M$. 这样 M 是 $\mathcal{M}$ 中包含 $A(N_-^\perp)$ 的最小子空间. 令 $\theta(N_-^\perp)=M$, 那么 $A(N_-^\perp)\subseteq M=\theta(N_-^\perp)$, $C(N)\subseteq M_-^\perp=\theta(N_-^\perp)_-^\perp$. 如果 $N=0$, 定义 $\theta(N_-^\perp)=Y$; 如果 $N_-=X$, 定义 $\theta(N_-^\perp)=0$. 下证 $\theta:\mathcal{N}^\perp\to\mathcal{M}$ 是序同态. 令 $N_1\subset N_2$. 取 $f_i\in(N_i)_-^\perp\in\mathcal{N}^\perp$ 使得 $N_i=\bigvee\{L\in\mathcal{N}\mid f_i\in L_-^\perp\}$ $(i=1,2)$, 由 θ 的定义, 我们有 $\theta((N_i)_-^\perp)=\bigwedge\{L\in\mathcal{M}\mid Af_i\in L\}$ $(i=1,2)$. 因为 $f_2\in(N_2)_-^\perp\subset(N_1)_-^\perp$, 因此 $Af_2\in\theta((N_1)_-^\perp)$, 所以 $\theta((N_2)_-^\perp)\subset\theta((N_1)_-^\perp)$. 故 θ 是

序同态.

如果引理 7.1.2 的 (3) 或 (4) 成立，易知相应地有定理中的情形 (3) 或 (4) 成立. 证毕.

下面的定理是本节的主要结论之一, 刻画了 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 和 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{M}$ 之间保秩一性的线性满射.

定理 7.1.6 设 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{M}$ 是线性满射，那么 Φ 保秩一性当且仅当下列性质之一成立:

(1) 存在保维序同构 $\theta:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ 以及线性双射 $A:\mathcal{D}_1(\mathcal{N})\to\mathcal{D}_1(\mathcal{M})$ 和 $C:\mathcal{D}_2(\mathcal{N})\to\mathcal{D}_2(\mathcal{M})$ 满足对 $N_-\neq X$ 以及 $N\neq 0$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N)=\theta(N)$, $C(N_-^{\perp})=\theta(N)_-^{\perp}$, 使得对所有的 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$.

(2) 存在保维序同构 $\theta:\mathcal{N}^{\perp}\to\mathcal{M}$ 以及线性双射 $A:\mathcal{D}_2(\mathcal{N})\to\mathcal{D}_1(\mathcal{M})$ 和 $C:\mathcal{D}_1(\mathcal{N})\to\mathcal{D}_2(\mathcal{M})$ 满足对 $N\neq 0$ 以及 $N_-\neq X$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N_-^{\perp})=\theta(N_-^{\perp})$, $C(N)=\theta(N^{\perp})^{\perp}$, 使得对所有的 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cx$.

证明 充分性容易验证，下证条件也是必要的.

假定 Φ 是满射且保秩一性，那么 Φ 具有定理 7.1.5 中的形式 (1) 或 (2).

易证 Φ 双边保秩一性，即 $\Phi(T)$ 具有秩一当且仅当 T 具有秩一. 不妨假定对任意的 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$. 由于 Φ 是满射，于是对任意的 $y\otimes g\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{M}$, 存在 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 使得 $\Phi(T)=y\otimes g$. 如果 $\mathrm{rank}(T)=n>1$, 那么由命题 1.4.4 知，存在 $x_i\otimes f_i\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ $(i=1,\cdots,n)$ 使得 $T=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\otimes f_i$, 其中 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 是两个线性无关的向量集. 因为 A 和 C 是单射，因此 $\{Ax_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{Cf_i\}_{i=1}^n$ 也是两个线性无关的向量集. 这样 $\Phi(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}Ax_i\otimes Cf_i$ 具有秩 $n>1$, 与假设条件矛盾. 所以 $\mathrm{rank}(T)=1$.

由于 Φ 是满射且双边保秩一性，因此在 (1) (或 (2)) 中， A

是从 $\mathcal{D}_1(\mathcal{N})$ (或 $\mathcal{D}_2(\mathcal{N})$) 到 $\mathcal{D}_1(\mathcal{M})$ 上的满射且 C 是从 $\mathcal{D}_2(\mathcal{N})$ (或 $\mathcal{D}_1(\mathcal{N})$) 到 $\mathcal{D}_2(\mathcal{M})$ 上的满射.

现在假定 Φ 具有定理 7.1.5 中的形式 (1), 即存在序同态 $\theta: \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ 满足对 $N_- \neq X$ 以及 $N \neq 0$ 的任意 $N \in \mathcal{N}$, 有 $A(N) \subseteq \theta(N)$, $C(N_-^\perp) \subseteq \theta(N)_-^\perp$ 使得对任意的 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x \otimes f) = Ax \otimes Cf$. 取 $f_0 \in N_-^\perp$ 使得 $N = \bigvee\{L \in \mathcal{N} \mid f_0 \in L_-^\perp\}$, 那么 $Cf_0 \in \theta(N)_-^\perp$. 令 $y \in \theta(N)$, 则 $y \otimes Cf_0 \in \mathrm{Alg}\mathcal{M}$. 因为 Φ 是满射且双边保秩一性, 因此存在 $x \otimes h \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 使得 $Ax \otimes Ch = \Phi(x \otimes h) = y \otimes Cf_0$. 又因 C 是单射, 因此存在某个 $\alpha \in \mathbb{F}$ 使得 $h = \alpha f_0 \in N_-^\perp$. 从而由 N 的极大性及 $x \otimes h \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 我们有 $x \in N$, 故 $y = \alpha Ax \in A(N)$. 这样对满足 $N_- \neq X$ 的每个 $N \in \mathcal{N}$, 都有 $A(N) = \theta(N)$. 类似地, 对满足 $N \neq 0$ 的任意 $N \in \mathcal{N}$, 可证 $C(N_-^\perp) = \theta(N)_-^\perp$. 定义 $\theta(X) = Y$, 我们将证明 θ 是保维序同构. 首先证明 $\theta: \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ 是满射. 对满足 $M_- \neq Y$ 的任意 $M \in \mathcal{M}$, 令 $f_0 \in M_-^\perp$ 使得 $M = \bigvee\{L \in \mathcal{M} \mid f_0 \in L_-^\perp\}$. 因为 C 是满射, 因此存在 $g_0 \in \mathcal{D}_2(\mathcal{N})$ 使得 $Cg_0 = f_0$. 令 $N = \bigvee\{L \in \mathcal{N} \mid g_0 \in L_-^\perp\}$, 则 $\Phi(R_{g_0}^N) = R_{Cg_0}^M$. 否则, 存在 $y \in M \backslash A(N)$ 使得 $y \otimes Cg_0 \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{M}$. 由于 Φ 是满射且双边保秩一性, 因此存在 $x \otimes h \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 使得 $Ax \otimes Ch = \Phi(x \otimes h) = y \otimes Cg_0$. 现在 C 的单射性蕴涵存在 $\alpha \in \mathbb{F}$ 使得 $h = \alpha g_0$. 于是 $h \in N_-^\perp$ 且 $y = A(\alpha x) \in A(N)$, 矛盾. 故 $M = A(N) = \theta(N)$, 即 θ 是满射. 由 A 的单射性知, 对任意的 $N_1, N_2 \in \mathcal{N}\backslash\{X\}$ 使得当 $N_1 \subset N_2$ 时, 有 $\theta(N_1) = A(N_1) \subset A(N_2) = \theta(N_2)$ 且 $\dim\theta(N) = \dim A(N) = \dim N$, 因此 θ 是单射且保维数. 所以定理的情形 (1) 成立.

设 Φ 满足定理 7.1.5 的情形 (2), 即存在序同态 $\theta: \mathcal{N}^\perp \to \mathcal{M}$ 满足对 $N \neq 0$ 及 $N_- \neq X$ 的任意 $N \in \mathcal{N}$, 有 $A(N_-^\perp) \subseteq \theta(N_-^\perp)$, $C(N) \subseteq \theta(N_-^\perp)_-^\perp$ 使得对任意的 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x \otimes f) = Af \otimes Cx$. 取 $f_0 \in N_-^\perp$ 使得 $N = \bigvee\{L \in \mathcal{N} \mid f_0 \in L_-^\perp\}$, 则 $Af_0 \in \theta(N_-^\perp)$. 令 $g \in \theta(N_-^\perp)_-^\perp$, 那么 $Af_0 \otimes g \in \mathrm{Alg}\mathcal{M}$. 因为 Φ 是满射且双边保秩一性, 故存在 $x \otimes h \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 使得 $Ah \otimes Cx =$

$\Phi(x\otimes h) = Af_0\otimes g$. 由于 A 是单射，于是存在某个 $\alpha\in\mathbb{F}$ 使得 $h=\alpha f_0\in N_-^\perp$. 再由 N 的极大性及 $x\otimes h\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 我们得到 $x\in N$, 所以 $g=\alpha Cx\in C(N)$. 故对满足 $N_-\neq X$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $C(N)=\theta(N_-^\perp)_-^\perp$. 相似可证对满足 $N\neq 0$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N_-^\perp)=\theta(N_-^\perp)$. 定义 $\theta(X^*)=Y$, 我们断言 θ 是保维序同构. 先证 θ 是满射. 对满足 $M\neq 0$ 的任意 $M\in\mathcal{M}$, 令 $g_0\in M_-^\perp$ 使得 $M=\bigvee\{L\in\mathcal{M}\mid g_0\in L_-^\perp\}$. 由 C 的满射性知，存在 $x_0\in\mathcal{D}_1(\mathcal{N})$ 使得 $Cx_0=g_0$. 令 $N=\bigwedge\{L\in\mathcal{N}\mid x_0\in L\}$. 如情形 (1) 的讨论知 $\Phi(L_{x_0}^N)=R_{Cx_0}^M$, 从而 $M=A(N_-^\perp)=\theta(N_-^\perp)$, 即 θ 是满射. 因为 A 是单射，类似于情形 (1) 的证明可知 θ 是单射且保维数，因此 θ 是保维序同构. 故对满足 $N_-\neq X$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $C(N)=\theta(N_-^\perp)_-^\perp=\theta(N^\perp)^\perp$. 证毕.

现在我们刻画 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 和 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{M}$ 之间保秩一性的有界线性满射.

定理 7.1.7 设 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{M}$ 是线性满射，则 Φ 有界且保秩一性当且仅当下列性质之一成立：

(1) 存在保维序同构 $\theta:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ 以及单射稠值域算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 和 $C\in\mathcal{B}(X^*,Y^*)$ 满足对 $N_-\neq X$ 及 $N\neq 0$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N)=\theta(N)$, $C(N_-^\perp)=\theta(N)_-^\perp$, 使得对所有的 $F\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(F)=AFC^*|_Y$.

(2) 存在保维序同构 $\theta:\mathcal{N}^\perp\to\mathcal{M}$ 以及单射稠值域算子 $A\in\mathcal{B}(X^*,Y)$ 和 $C\in\mathcal{B}(X,Y^*)$ 满足对 $N\neq 0$ 及 $N_-\neq X$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N_-^\perp)=\theta(N_-^\perp)$, $C(N)=\theta(N^\perp)^\perp$, 使得对所有的 $F\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(F)=AF^*C^*|_Y$.

证明 充分性是显然的，下证必要性. 显然定理 7.1.6 的情形 (1) 或 (2) 成立. 假定 Φ 取定理 7.1.6 的形式 (1). 对满足 $N_-\neq X$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 由定理 7.1.4 知 $A|_N$ 有界. 因为 $A(N)=\theta(N)$, 因此在 $\theta(N)$ 上， $A|_N$ 具有有界逆 $(A|_N)^{-1}$. 固定 $N_0\in\mathcal{N}$, 那么存在正数 α_0 使得对所有的 $x\in N_0$, 有 $\|Ax\|\geq\alpha_0\|x\|$. 因此对满足 $N\subset N_0$ 的任意非零 $N\in\mathcal{N}$, 且对任意的 $x\in N$, $f\in N_-^\perp$, 有

$$\|\Phi\|\|x\|\|f\| \geq \|\Phi(x\otimes f)\| = \|Ax\otimes Cf\| = \|Ax\|\|Cf\| \geq \alpha_0\|x\|\|Cf\|.$$

所以对满足 $N\subset N_0$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $\|C|_{N_-^\perp}\|\leq\alpha_0^{-1}\|\Phi\|$. 注意到 $\cup\{N_-^\perp \mid N\in\mathcal{N},\ N\neq 0$ 且 $N\subset N_0\}=\mathcal{D}_2(\mathcal{N})$, 故 C 有界且 $\|C\|\leq\alpha_0^{-1}\|\Phi\|$, 从而可延拓到 X^* 上的有界算子, 仍然用 C 表示. 由 Φ 和 C 的有界性, 显然 A 也能延拓为 X 上的有界算子, 仍然用 A 表示. 因为 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 中的每个有限秩算子都能表示为 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 中有限个秩一算子的和且 Φ 是线性的, 因此对每个 $F\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 都有 $\Phi(F)=AFC^*|_Y$.

设 Φ 取定理 7.1.6 的形式 (2). 应用定理 7.1.4 且类似于情形 (1) 的讨论, 我们可证明 $A\in\mathcal{B}(X^*,Y)$, $C\in\mathcal{B}(X,Y^*)$, 所以 (2) 成立. 证毕.

如果 X 和 Y 是自反的 Banach 空间, 那么在定理 7.1.7 中, $C^*|_Y=C^*$ 事实上是从 Y 到 X 的算子, 因此我们有

推论 7.1.8 设 X 和 Y 是自反的 Banach 空间且 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{M}$ 是线性满射, 则 Φ 有界且保秩一性当且仅当下列性质之一成立:

(1) 存在保维序同构 $\theta:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ 以及单射稠值域算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 和 $B\in\mathcal{B}(Y,X)$ 满足对 $N_-\neq X$ 及 $N\neq 0$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N)=\theta(N)$, $B^*(N_-^\perp)=\theta(N)_-^\perp$, 使得对所有的 $F\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(F)=AFB$.

(2) 存在保维序同构 $\theta:\mathcal{N}^\perp\to\mathcal{M}$ 以及单射稠值域算子 $A\in\mathcal{B}(X^*,Y)$ 和 $B\in\mathcal{B}(Y,X^*)$ 满足对 $N\neq 0$ 以及 $N_-\neq X$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N_-^\perp)=\theta(N_-^\perp)$, $B^*(N)=\theta(N^\perp)^\perp$, 使得对所有的 $F\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(F)=AF^*B$.

推论 7.1.9 设 $\mathcal{N}$ 是 X 上满足 $0_+\neq 0$ 的套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是线性映射且 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\subseteq\Phi(\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N})$, 那么 Φ 弱连续且保秩一性当且仅当下列性质之一成立:

(1) 存在保维序同构 $\theta:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ 及单射稠值域算子 $A\in\mathcal{B}(X)$ 和可逆算子 $B\in\mathcal{B}(X)$ 满足对 $N_-\neq X$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N)=$

$\theta(N)$, $B^*(N_-^{\perp}) = \theta(N)_-^{\perp}$, 使得对每个 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = ATB$ 成立.

(2) 存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X^*, X)$ 和 $B \in \mathcal{B}(X, X^*)$ 满足对每个 $N \in \mathcal{N}$, 有 $A(N^{\perp})^{\perp} = B(N)^{\perp}$, 使得 $\Phi(T) = AT^*B$ 对每个 $T \in$Alg$\mathcal{N}$ 成立. 在这种情形下 X 一定自反.

证明 显然只需证必要性. 由条件可知, $\Phi : \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是保秩一性的有界线性满射. 因此 Φ 具有定理 7.1.7 中的形式 (1) 或 (2). 由于 $0_+ \neq 0$, 故由注 7.1.1 知在 (1) 中的 C 或 (2) 中的 A 可逆.

假设 Φ 具有定理 7.1.7 中的形式 (1). 令 f_λ, $f \in X^*$ 使得 $f_\lambda \xrightarrow{wk^*} f$, 即对任意的 $y \in X$, $\langle y, f_\lambda \rangle \to \langle y, f \rangle$. 因为 $0_+ \neq 0$, 因此对任意的 $x \in 0_+$, 都有 $x \otimes f_\lambda$, $x \otimes f \in \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 所以对任意的 $y \in X$ 及 $g \in X^*$, $\langle (x \otimes f_\lambda)y, g \rangle \to \langle (x \otimes f)y, g \rangle$, 即 $x \otimes f_\lambda \xrightarrow{wk} x \otimes f$. 由于 Φ 弱连续, 于是 $\Phi(x \otimes f_\lambda) \xrightarrow{wk} \Phi(x \otimes f)$. 因此对任意的 $y \in X$, 都有 $\langle f_\lambda, C^*y \rangle Ax = \Phi(x \otimes f_\lambda)y \xrightarrow{wk} \Phi(x \otimes f)y = \langle f, C^*y \rangle Ax$, 即 C^*y 弱 $*$ 连续, 故 $C^*y \in X$. 令 $B = C^*|_X$, 则 $B \in \mathcal{B}(X)$ 且 $B^* = C$, 因此 B 可逆.

如果 Φ 取定理 7.1.7 中的形式 (2), 那么 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}^{\perp}$ 序同构, 所以 $X_- \neq X$. 从而由注 7.1.1 知 A 和 C 可逆. 故情形 (2) 成立. X 自反性的证明相似于定理 2.1.13 的证明. 证毕.

推论 7.1.10 设 $\mathcal{N}$ 是 Banach 空间 X 上满足 $0_+ \neq 0$, $X_- \neq X$ 的套. 令 $\Phi : \text{Alg}\mathcal{N} \to \text{Alg}\mathcal{N}$ 是线性映射且 $\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \subseteq \text{rng}(\Phi)$, 则 Φ 弱连续且保秩一性当且仅当下列性质之一成立:

(1) 存在满足 $A(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$, $B^*(\mathcal{N}^{\perp}) = \mathcal{N}^{\perp}$ 的可逆算子 A, $B \in \mathcal{B}(X)$ 使得对每个 $N \in \mathcal{N}$, 有 $A(N)^{\perp} = B^*(N^{\perp})$, 且对每个 $T \in$Alg$\mathcal{N}$ 都有 $\Phi(T) = ATB$.

(2) 存在满足 $A(\mathcal{N}^{\perp}) = \mathcal{N}$ 的可逆算子 $A \in \mathcal{B}(X^*, X)$ 和满足 $B^*(\mathcal{N}) = \mathcal{N}^{\perp}$ 的可逆算子 $B \in \mathcal{B}(X, X^*)$ 使得对每个 $N \in \mathcal{N}$, 有 $A(N^{\perp})^{\perp} = B(N)$, 且对每个 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = AT^*B$. 在这种情形下 X 一定自反.

证明 我们只需证必要性. 显然, 由条件, $\Phi : \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 有界且保秩一性. 因为 $0_+ \neq 0$, $X_- \neq X$, 因此由定理 7.1.4, Φ 的弱连续性及 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 在 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 中的弱稠性知, Φ 具有下列形式之一:

(i) 存在单射算子 $A \in \mathcal{B}(X)$ 和满足 $C^*|_X \in \mathcal{B}(X)$ 的单射算子 $C \in \mathcal{B}(X^*)$ 使得对所有的 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $\Phi(T) = ATC^*|_X$.

(ii) 存在单射算子 $A \in \mathcal{B}(X^*, X)$ 和 $C \in \mathcal{B}(X, X^*)$ 使得对所有的 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $\Phi(T) = AT^*C^*|_X$.

对任意的 $y \in X$, 取非零泛函 $g \in X_-^{\perp}$, 则 $y \otimes g \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 由于 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \subseteq \mathrm{rng}(\Phi)$, 因此存在 $T_0 \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 使得 $AT_0C^*|_X$ (或 $AT_0^*C^*|_X) = \Phi(T_0) = y \otimes g$, 所以 A 具有满值域. 因为 $0_+ \neq 0$, 相似可证 C 也是满射, 所以 A 和 C 可逆, 从而 $\Phi : \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是满射. 现在应用推论 7.1.9 完成证明. 证毕.

设 H 是 Hilbert 空间. 令 $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$, $N_j = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_j$ $(j = 1, \cdots, n)$. 设 $\mathcal{N} = \{\{0\}, N_1, N_2, \cdots, N_n = H\}$, 则 $\mathcal{N}$ 是 H 上的一个有限套且对于任意的 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 及任意的 $j\ (= 1, \cdots, n)$, 有 $TN_j \subseteq N_j$. 对于有限套代数上保秩一性的线性映射, 我们有更加具体的刻画.

定理 7.1.11 设 $\mathcal{N} = \{\{0\}, N_1, N_2, \cdots, N_n = H\}$ 为 Hilbert 空间 H 上的有限套, $\Phi : \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是线性满射, 则 Φ 有界且保秩一性当且仅当下列性质之一成立:

(1) 存在可逆算子 $A, B \in \mathrm{GL}(\mathrm{Alg}\mathcal{N})$ 使得对每个 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(T) = ATB$.

(2) 存在 H 上满足 $A(N_i^{\perp}) = N_{n-i}$, $B(N_i) = N_{n-i}^{\perp}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 的可逆有界共轭线性算子A和B, 使得对每个 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(T) = AT^*B$.

证明 (1) 由注 7.1.1, 显然定理 7.1.7 (1) 中的算子 A 和 C 可逆. 注意到对任意的 N_i $(i = 1, \cdots, n)$, 取 $x_0 \in N_i$ 使得 $i = \min\{l \mid x_0 \in N_l\ (l = 1, \cdots, n)\}$ 且 $j = \min\{l \mid Ax_0 \in N_l\ (l = 1, \cdots, n)\}$, 则由定理 7.1.6 的证明可知 $C(N_{i-1}^{\perp}) = N_{j-1}^{\perp}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$. 因

此我们有如下对应:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} C(H) & \supset & C(N_1^\perp) & \supset & \cdots & \supset & C(N_i^\perp) & \supset & \cdots & \supset & C(N_{n-1}^\perp) & \supset & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ H & \supset & N_1^\perp & \supset & \cdots & \supset & N_i^\perp & \supset & \cdots & \supset & N_{n-1}^\perp & \supset & 0 \end{array}$$

所以对任意的 $i = 0, 1, \cdots, n$, $C(N_i^\perp) = N_i^\perp$. 同理可证对任意的 $i = 0, 1, \cdots, n$, $A(N_i) = N_i$. 因为 A 和 $B = C^*$ 可逆, 因此 A, $B \in \mathrm{GL}(\mathrm{Alg}\mathcal{N})$.

(2) 的情形类似可证. 证毕.

推论 7.1.12 设 $\mathcal{N} = \{\{0\}, N_1, N_2, \cdots, N_n = H\}$ 为 Hilbert 空间 H 上的有限套, $\Phi : \mathrm{Alg}\mathcal{N} \to \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是线性映射满足 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \subseteq \mathrm{rng}(\Phi)$, 则 Φ 弱连续且保秩一性当且仅当下列之一成立:

(1) 存在可逆算子 A, $B \in \mathrm{GL}(\mathrm{Alg}\mathcal{N})$ 使得对每个 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $\Phi(T) = ATB$.

(2) 存在 H 上满足 $A(N_i^\perp) = N_{n-i}$, $B(N_i) = N_{n-i}^\perp$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 的有界可逆共轭线性算子 A 和 B 使得对每个 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $\Phi(T) = AT^*B$.

证明 由定理 7.1.11 和推论 7.1.10 立得. 证毕.

注意, 如果本节中弱连续性的假定由 σ- 弱连续性或强 $*$ 连续性代替, 结论仍然成立.

§7.2 同构与局部自同构的刻画

本节如不特别申明, 我们均假定 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 是分别作用在数域 $\mathbb{F}$ (= $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上 Banach 空间 X 和 Y 上的套, $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 和 $\mathrm{Alg}\mathcal{M}$ 是相应的套代数. 作为 7.1 节保秩一性线性映射结论的应用, 本节首先刻画套代数之间的同构或反同构.

定理 7.2.1 套代数 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 和 $\mathrm{Alg}\mathcal{M}$ 之间的同构 (或反同构) 是空间的. 进而, 套代数 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 和 $\mathrm{Alg}\mathcal{M}$ 同构 (或反同构) 当且仅当 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ (或 $\mathcal{N}^\perp$ 和 $\mathcal{M}$) 相似.

证明 设 $\pi:\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{M}$ 是同构. 我们断言 π 双边保秩一性.

对任意的 $W,V\in\mathrm{Alg}\mathcal{M}$, 因为 π 是满射, 因此存在 $S,R\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 使得 $W=\pi(S)$, $V=\pi(R)$. 设 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 且 $\mathrm{rank}(T)=1$. 如果 $W\pi(T)V=\pi(STR)=0$, 那么 $STR=0$, 由命题 1.4.3 知, $ST=0$ 或 $TR=0$, 从而 $W\pi(T)=\pi(ST)=0$ 或 $\pi(T)V=\pi(TR)=0$. 再次运用命题 1.4.3, 我们有 $\mathrm{rank}(\pi(T))=1$. 类似可证 π^{-1} 保秩一性. 故 π 双边保秩一性.

下证 π 和 π^{-1} 有界. 因为 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是 Banach 空间, 因此由逆映射定理, 只需证明 π 有界. 而由闭图定理知, 只需证明 π 是闭的. 显然, 对任意的 $y_i\otimes g_i\in\mathrm{Alg}\mathcal{M}$ $(i=1,2)$, 存在 $x_i\otimes f_i\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ $(i=1,2)$ 使得 $\pi(x_i\otimes f_i)=y_i\otimes g_i$. 令

$$\varphi(T)=(y_1\otimes g_1)\pi(T)(y_2\otimes g_2)=\langle Tx_2,f_1\rangle\pi(x_1\otimes f_2),$$

则 $\varphi:\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{M}$ 有界. 设 T_n, $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ $(n=1,2,\cdots)$ 且 $S\in\mathrm{Alg}\mathcal{M}$ 使得 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\pi(T_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 分别收敛于 T 和 S. 因为

$$\begin{aligned}\langle\pi(T)y_2,g_1\rangle y_1\otimes g_2=\varphi(T)&=\lim_{n\to\infty}\varphi(T_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\langle\pi(T_n)y_2,g_1\rangle y_1\otimes g_2\\&=\langle Sy_2,g_1\rangle y_1\otimes g_2,\end{aligned}$$

因此对每个 $g_1\in\mathcal{D}_2(\mathcal{M})$, $y_2\in\mathcal{D}_1(\mathcal{M})$, 有 $\langle\pi(T)y_2,g_1\rangle=\langle Sy_2,g_1\rangle$. 又 $\mathcal{D}_1(\mathcal{M})$ 和 $\mathcal{D}_2(\mathcal{M})$ 分别在 Y 和 Y^* 中稠密, 故 $\pi(T)=S$, 即 π 是闭的, 从而 π 有界.

因为 $\pi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{M}$ 是保秩一性的有界满射, 因此 π 具有定理 7.1.7 中的形式. 假定 π 具有那里的形式 (2), 则对任意的 $x_i\otimes f_i\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ $(i=1,2)$,

$$\begin{aligned}\langle x_2,f_1\rangle Af_2\otimes Cx_1&=\pi(x_1\otimes f_1)\pi(x_2\otimes f_2)\\&=(Af_1\otimes Cx_1)(Af_2\otimes Cx_2)\\&=\langle Af_2,Cx_1\rangle Af_1\otimes Cx_2,\end{aligned}$$

这是不可能的. 因此 π 具有定理 7.1.7 中的形式 (1). 现在容易验证对任意的 $y\otimes g \in$Alg$\mathcal{M}$, 有 $\pi^{-1}(y\otimes g) = A^{-1}y\otimes C^{-1}g$. 因为 π^{-1} 与 π 有相同的性质, 相似地我们有 A^{-1} 和 C^{-1} 有界, 所以 A 和 C 可逆. 对任意的 $x\otimes f, T \in$Alg$\mathcal{N}$, 由于 $\pi(T)Ax\otimes Cf = \pi(Tx\otimes f) = ATx\otimes Cf$, 于是对任意的 $x\in \mathcal{D}_1(\mathcal{N})$, 有 $\pi(T)Ax = ATx$, 从而 $\pi(T) = ATA^{-1}$, 即 π 是空间的.

又由定理 7.1.7 知, 存在保维序同构 $\theta : \mathcal{N}\to\mathcal{M}$ 使得对任意的 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N) = \theta(N)$. 因为 A 可逆, 因此 θ 是由 A 诱导的序同构, 所以 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 相似. 反过来假定 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 相似, 那么存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ 使得 $A(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$. 对任意的 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, 令 $\pi(T) = ATA^{-1}$. 显然 π :Alg$\mathcal{N}$ $\to$Alg$\mathcal{M}$ 是同构.

假定 π :Alg$\mathcal{N}$ $\to$Alg$\mathcal{M}$ 是反同构. 相似于同构情形的证明, 我们能够证明 π 具有定理 7.1.7 中的形式 (2). 所以对任意的 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, 有 $\pi(T) = AT^*A^{-1}$, 即 π 是空间的. 而 A 则诱导了 $\mathcal{N}^\perp$ 和 $\mathcal{M}$ 之间的保维序同构, 即 $\mathcal{N}^\perp$ 和 $\mathcal{M}$ 相似. 反过来, 如果 $\mathcal{N}^\perp$ 和 $\mathcal{M}$ 相似, 则容易验证 Alg$\mathcal{N}$ 和 Alg$\mathcal{M}$ 反同构. 证毕.

设 ϕ 是代数 $\mathcal{A}$ 上的线性映射. 如果对每个 $A\in\mathcal{A}$, 存在 $\mathcal{A}$ 的自同构 π_A 使得 $\phi(A) = \pi_A(A)$, 称 ϕ 是局部自同构. 如果 π 是 $\mathcal{A}$ 的自同构且存在可逆算子 $T \in$GL$(\mathcal{A})$ 使得对所有的 $A\in\mathcal{A}$, 都有 $\pi(A) = TAT^{-1}$ 成立, 称 π 是内的.

下面, 我们讨论套代数上局部自同构的刻画问题.

注意到, 如果 $\mathcal{N}$ 是 Banach 空间 X 上的套且 π 是 Alg$\mathcal{N}$ 的反自同构, 那么 X 一定自反. 事实上, 由上面的定理知, 存在可逆算子 $A\in\mathcal{B}(X^*,X)$ 使得对所有的 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, $\pi(T) = AT^*A^{-1}$. 显然 π 能被延拓为 $\mathcal{B}(X)$ 的反自同构, 现在由定理 2.1.13 的证明知, X 自反.

定理 7.2.2 假定 $\mathcal{N}$ 是 Banach 空间 X 上的非平凡套. 如果套 $\mathcal{N}$ 满足 $0_+\neq 0$ 或 X 自反, 那么 Alg$\mathcal{N}$ 的每个弱连续的满的局部自同构 (或局部反自同构) 要么是自同构要么是反自同构.

证明 令 Φ 是 Alg$\mathcal{N}$ 到其自身弱连续的满的局部自同构. 则

对每个 $T\in\text{Alg}\mathcal{N}$, 存在 $A_T\in\text{GL}(\mathcal{B}(X))$ 使得对每个 T, $\Phi(T)=A_TT(A_T)^{-1}$. 显然 $\Phi:\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 有界且是保秩一性的线性双射. 因此 Φ 具有定理 7.1.7 中的形式. 假定 Φ 具有那里的形式 (1), 那么存在 $A\in\mathcal{B}(X)$ 和 $C\in\mathcal{B}(X^*)$ 使得对每个 $F\in\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(F)=AFC^*|_X$. 如果 $0_+\neq 0$, 正如推论 7.1.9 中的讨论, 我们有 $C^*|_X\in\mathcal{B}(X)$; 如果 X 自反, 显然 $C^*|_X\in\mathcal{B}(X)$. 因此由 Φ 的弱连续性及 $\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 在 $\text{Alg}\mathcal{N}$ 中的弱稠性知, 对每个 $T\in\text{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=ATC^*|_X$. 因为 $\Phi(I)=I$, 因此 $AC^*|_X=I$. 这与 A 的单射性一起表明, A 可逆且 $A^{-1}=C^*|_X$. 这样对每个 $T\in\text{Alg}\mathcal{N}$, $\Phi(T)=ATA^{-1}$, 即 Φ 是自同构. 现在假定 Φ 取定理 7.1.7 中的形式 (2). 那么相似于形式 (1) 的讨论, 对每个 $T\in\text{Alg}\mathcal{N}$, 我们有 $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$, 即 Φ 是反自同构.

如果 Φ 是 $\text{Alg}\mathcal{N}$ 的弱连续的满的局部反自同构, 相似地, 可证明 Φ 要么是自同构要么是反自同构. 证毕.

推论 7.2.3 设 Banach 空间 X 不自反或 X 与 X^* 不同构. 如果套 $\mathcal{N}$ 满足 $0_+\neq 0$, 那么 $\text{Alg}\mathcal{N}$ 的每个弱连续的满的局部自同构是自同构.

证明 由推论 7.1.9 及定理 7.2.2 立得. 证毕.

推论 7.2.4 设 $\mathcal{N}$ 是 Banach 空间 X 上的非平凡套. 如果套 $\mathcal{N}$ 满足 $0_+\neq 0$ 或者 X 自反, 那么 $\text{Alg}\mathcal{N}$ 的每个弱连续的满的局部内自同构是内自同构.

证明 令 Φ 是 $\text{Alg}\mathcal{N}$ 的弱连续且满的局部内自同构, 则对每个 $T\in\text{Alg}\mathcal{N}$, 存在 $A_T\in\text{GL}(\text{Alg}\mathcal{N})$ 使得 $\Phi(T)=A_TT(A_T)^{-1}$. 易证 $\Phi:\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是保秩一性的有界线性双射, 因此具有定理 7.1.7 中的形式. 假定 Φ 具有定理 7.1.7 中的形式 (2). 那么对任意的 $N\in\mathcal{N}$ 及 $x\in N$, $f\in N_-^\perp$, 存在 $A_{x,f}\in\text{GL}(\text{Alg}\mathcal{N})$ 使得 $A_{x,f}x\otimes((A_{x,f})^*)^{-1}f=\Phi(x\otimes f)=Af\otimes Cx$. 注意到 $A_{x,f}x\in N$ 且 $((A_{x,f})^*)^{-1}f\in N_-^\perp$, 所以由 Φ 的满射性知,

$$\{Af\otimes Cx\mid x\in N,f\in N_-^\perp\}=\{y\otimes g\mid y\in N,g\in N_-^\perp\}.$$

这表明 $A(N_-^\perp) = N$, $C(N) = N_-^\perp$. 因为 $\mathcal{N}$ 非平凡，因此存在非零元 $N, M \in \mathcal{N}$ 使得 N 是 M 的真子空间. 由于 A 是单射，于是 $N = A(N_-^\perp) \supset A(M_-^\perp) = M$, 故 $N = M$, 矛盾. 所以 Φ 只能取定理 7.1.7 中的形式 (1). 现在由定理 7.2.2 的证明知， $C^*|_X = A^{-1}$. 对任意的 $N \in \mathcal{N}$, 类似于上面的讨论，我们有 $A(N) = N$ 且 $(A^{-1})^*(N_-^\perp) = N_-^\perp$, 所以 $A \in$GL(Alg$\mathcal{N}$). 即 Φ 是内自同构. 证毕.

关于上三角算子矩阵代数的情形，我们有

定理 7.2.5 作用在 Hilbert 空间上的上三角算子矩阵代数的自同构是内的.

证明 令 H 是 Hilbert 空间且 $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$, $N_j = H_1 \oplus \cdots \oplus H_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ 且令 $\mathcal{N} = \{\{0\}, N_1, \cdots, N_n = H\}$, 则 Alg$\mathcal{N}$ 是 H 上的上三角算子矩阵代数. 设 π 是 Alg$\mathcal{N}$ 的自同构. 由定理 7.2.1 知，π 是空间的, 即存在可逆算子 $S \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $\pi(T) = STS^{-1}$. 特别地， π 满足定理 7.1.11 的假定. 因为 π 是可乘的，因此它必须取定理 7.1.11 中的形式 (1). 所以对每个 $x \otimes f \in$Alg$_\mathcal{F}\mathcal{N}$, 有 $Sx \otimes (S^*)^{-1}f = \pi(x \otimes f) = Ax \otimes C^*f$. 从而对任意的 $x \in H$, Sx 和 Ax 线性相关，故存在 $\alpha \in \mathbb{F}$ 使得 $S = \alpha A$. 因此 $S(N_i) = A(N_i) = N_i$ $(1 \le i \le n)$, 这表明 $S \in$GL(Alg$\mathcal{N}$), 即 π 是内的. 证毕.

推论 7.2.6 作用在 Hilbert 空间上的上三角算子矩阵代数上的每个弱连续的满的局部自同构是内自同构.

证明 令 H 是 Hilbert 空间且 $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$, $N_j = H_1 \oplus \cdots \oplus H_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ 且令 $\mathcal{N} = \{\{0\}, N_1, \cdots, N_n = H\}$, 则 Alg$\mathcal{N}$ 是 H 上的上三角算子矩阵代数. 设 Φ 是 Alg$\mathcal{N}$ 上的弱连续的满的局部自同构. 由定理 7.2.5, 对每个 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, 存在 $A_T \in$GL(Alg$\mathcal{N}$) 使得 $\Phi(T) = A_T T (A_T)^{-1}$. 显然 $\Phi :$ Alg$_\mathcal{F}\mathcal{N} \to$Alg$_\mathcal{F}\mathcal{N}$ 是保秩一性的双射, 因此满足推论 7.1.12 的条件. 假定 Φ 具有推论 7.1.12 中的形式 (2), 则对任意的 N_i 及任意的 $x \in N_i$ 和 $f \in N_{i-1}^\perp$, 存在 $A_{x,f} \in$GL(Alg$\mathcal{N}$) 使得 $A_{x,f}x \otimes ((A_{x,f})^*)^{-1}f = \Phi(x \otimes f) =$

$Af \otimes B^*x$. 注意到 $A_{x,f}x \in N_i$ 且 $((A_{x,f})^*)^{-1}f \in N_{i-1}^{\perp}$, 所以从 Φ 的满射性知,

$$\{Af \otimes B^*x \mid x \in N_i, f \in N_{i-1}^{\perp}\} = \{y \otimes g \mid y \in N_i, g \in N_{i-1}^{\perp}\}.$$

这表明 $A(N_{i-1}^{\perp}) = N_i$ 且 $B^*(N_i) = N_{i-1}^{\perp}$. 因为 N_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ 非平凡, 因此存在非零元 N_i 和 N_j 使得 N_i 是 N_j 的真子集. 这样 $N_j = A(N_{j-1}^{\perp})$ 是 $A(N_{i-1}^{\perp}) = N_i$ 的真子集, 矛盾. 故 Φ 只能取推论 7.1.12 中的形式 (1), 所以存在 $A, B \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 使得对所有的 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $\Phi(T) = ATB$. 又因为 $AB = \Phi(I) = I$ 且 A 单射, 因此 $A \in \mathrm{GL}(\mathrm{Alg}\mathcal{N})$ 且 $B = A^{-1}$, 即 Φ 是内自同构. 证毕.

注 7.2.1 设 $\mathcal{N}$ 是 X 上的任意套. 如果 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 的局部自同构是反自同构, 那么对任意的 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, T 和 T^* 相似. 因此如果存在 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 使得 T 和 T^* 不相似, 那么 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 的每个弱连续的满的局部自同构是自同构. 我们猜测这是对的.

猜测 7.2.1 设 $\mathcal{N}$ 是作用在 Banach 空间上的非平凡套, 则套代数 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 的每个弱连续的满的局部自同构是自同构.

下证当 $\mathcal{N}$ 是可分 Hilbert 空间上的原子套时这个猜测是正确的.

定理 7.2.7 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的非平凡原子套且 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是相应的套代数, 则 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 的每个弱连续的满的局部自同构是自同构.

证明 如果 $\mathcal{N}$ 是有限套, 由推论 7.2.6 知, 结论正确. 因此, 我们假定 $\mathcal{N}$ 包含无限多个元.

假设 $\mathcal{N}$ 至少包含一个无限维原子, 比如 $N \ominus N_-$ 是 $\mathcal{N}$ 的无限维原子. 不妨设 $N \ominus N_-$ 是可分的. 令 $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 $N \ominus N_-$ 的标准正交基, $T_0 \in \mathcal{B}(N \ominus N_-)$ 使得 $T_0 u_n = u_{n-1}$ $(n > 1)$ 且 $T_0 u_1 = 0$, 则 T_0^* 是完全非正规的次正规算子. 由命题 1.1.22, 如果存在 $W \in \mathcal{B}(N \ominus N_-)$ 使得 $T_0^* W = W T_0$, 则 $W = 0$. 取 H 的标准正交基, 它由 N_- 的基, $N^{\perp}$ 的基以及 $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 组成. 关于

空间分解 $H = N_- \oplus (N \ominus N_-) \oplus N^{\perp}$, 令 $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则

$T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 且 $T^{tr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_0^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 易验证 T 与 T^{tr} 不相似. 事实上, 如果存在可逆算子 A 使得 $AT = T^{tr}A$. 记 $A = (A_{ij})_{3\times 3}$, 则

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12}T_0 & 0 \\ 0 & A_{22}T_0 & 0 \\ 0 & A_{32}T_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_0^*A_{21} & T_0^*A_{22} & T_0^*A_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

比较上式两边, 我们有 $A_{22}T_0 = T_0^*A_{22}$, $A_{12}T_0 = 0$, $T_0^*A_{21} = 0$, $A_{32}T_0 = 0$, $T_0^*A_{23} = 0$. 现在 T_0 的满射性表明 $A_{12} = A_{32} = A_{21} = A_{23} = 0$. 由上面的讨论知, $A_{22}T_0 = T_0^*A_{22}$ 蕴涵 $A_{22} = 0$, 从而 A 不可逆, 矛盾. 所以在这种情形下, 由注 7.2.1 知, 定理成立.

现在假定 $\mathcal{N}$ 的所有原子都是有限维的. 令 $\tilde{\mathcal{N}}$ 是包含 $\mathcal{N}$ 的极大套, 那么 $\tilde{\mathcal{N}}$ 是原子套且每个原子都是一维的, 因此 $\mathrm{Alg}\tilde{\mathcal{N}} \subset \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 且 $\tilde{\mathcal{N}}$ 序同构于序型为 $\omega + n$ 或 $m + \omega^*$ 的可数个全序集的序和, 其中 ω 和 ω^* 分别代表 $\mathbb{N}$ 和 $-\mathbb{N}$ 的序型. 因为 $\tilde{\mathcal{N}}$ 包含无限多个元, 因此它包含具有序型为 $\omega + 1$ 或 $1 + \omega^*$ 的区间 $[N_1, N_2] = \{N \in \mathcal{N} \mid N_1 \subseteq N \subseteq N_2\}$. 令 $H_2 = N_2 \ominus N_1$, $H_3 = (N_2)^{\perp}$, 那么 $H = N_1 \oplus H_2 \oplus H_3$. 注意到 $\mathcal{M} = \{N \cap H_2 \mid N \in \tilde{\mathcal{N}}\}$ 是与 $[N_1, N_2]$ 有相同序型的极大原子套.

如果 $\mathcal{M}$ 具有序型 $\omega + 1$, 那么存在 H_2 的标准正交基 $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 使得

$$\mathcal{M} = \{0,\ M_n = \bigvee\{u_k \mid k \le n\}\ (n \in \mathbb{N}),\ H_2\}.$$

设 S 是关于这组基的左移单侧移位算子, 则 $S \in \mathrm{Alg}\mathcal{M}$. 相似地, 如果 $\mathcal{M}$ 有序型 $1+\omega^*$, 那么存在右移单侧移位算子 S 使得 $S \in \mathrm{Alg}\mathcal{M}$. 设 H 的基由 N_1 的基, H_3 的基和 $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 组成, 则关于空间

分解 $H = N_1 \oplus H_2 \oplus H_3$, 令 $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 我们有 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 如上的讨论表明 T 与 T^{tr} 不相似. 故由注 7.2.1 知, 结论成立. 证毕.

§7.3 完全秩不增的线性映射

设 X 和 Y 是数域 $\mathbb{F}$ (为实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$) 上的 Banach 空间. 在第二章中, 我们讨论了 $\mathcal{F}(X)$ 和 $\mathcal{B}(X)$ 上的完全秩不增线性映射, 本节则在套代数上考虑此类线性映射的刻画问题. 为此, 先回顾一些概念. 令 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 的线性子空间且 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(Y)$ 是线性映射. 如果对每个 $A \in \mathcal{A}$, $\mathrm{rank}(\Phi(A)) \leq \mathrm{rank}(A)$ (或 $\mathrm{rank}(\Phi(A)) = \mathrm{rank}(A)$), 称 Φ 秩不增 (或保秩), 其中 $\mathrm{rank}(A)$ 代表算子 A 的秩, 即 A 的值域维数. 令 $\mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{F}) = \{(T_{ij})_{n\times n} \mid T_{ij} \in \mathcal{A}\}$ 且 Φ_n 定义为 $\Phi_n((T_{ij})_{n\times n}) = (\Phi(T_{ij}))_{n\times n}$, 如果对每个正整数 n, $\Phi_n : \mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{B} \otimes M_n(\mathbb{F})$ 秩不增 (或保秩), 称 Φ 完全秩不增 (或完全保秩).

本节将在可分 Hilbert 空间套代数的情形回答 §2.2 中提出的问题 2.2.1.

首先讨论作用在 Hilbert 空间 H 上的上三角算子矩阵代数上完全秩不增的线性映射. 下面设 H 和 K 是数域 $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$) 上的 Hilbert 空间, 具有内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$. 如果 $\mathcal{N} = \{N_0 = \{0\}, N_1, \cdots, N_n = H\}$ 是 H 上的有限套, 令 $H_j = N_j \ominus N_{j-1}$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 则 $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$.

定理 7.3.1 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的有限套. 令 $\Phi : \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathcal{B}(K)$ 是有界线性映射且 k 是正整数, 则下列性质等价.

(1) Φ 完全秩 1 不增.

(2) Φ_2 秩 1 不增.

(3) 存在算子序列 $\{A_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(H, K)$ 和 $\{B_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(K, H)$

使得

$$\Phi(F)=\lim_{s\to\infty}A_sFB_s \qquad \forall F\in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}.$$

证明　(3)⇒(1)⇒(2) 显然. 故我们只需证明 (2)⇒(3).

假定 (2) 成立. 对任意的 $x\in H$, 令 $L_x^{\mathcal{N}}=\{x\otimes f\mid f\in H$ 使得 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\}$, $L_x=\{x\otimes f\mid f\in H\}$. 显然 $L_x^{\mathcal{N}}\neq 0$ 当且仅当存在 i $(1\le i\le n)$ 使得 $x\in N_i$. 首先证明对每个 $x\in H$, 存在 $y(x)\in H$ 使得 $\Phi(L_x^{\mathcal{N}})\subseteq L_{y(x)}$.

如果 $\Phi(L_x^{\mathcal{N}})=0$, 取 $y(x)=0$; 如果 $\Phi(L_x^{\mathcal{N}})\neq 0$, 取 $x\otimes f_1\in L_x^{\mathcal{N}}$ 使得 $\Phi(x\otimes f_1)=y_1\otimes g_1\neq 0$. 对任意的 $x\otimes f_2\in L_x^{\mathcal{N}}$, 存在 $y_2,g_2\in H$ 使得 $\Phi(x\otimes f_2)=y_2\otimes g_2$. 因为 $\begin{pmatrix} x\otimes f_1 & x\otimes f_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in L_x^{\mathcal{N}}\otimes M_2(\mathbb{F})$ 具有秩一, 因此 $\begin{pmatrix} y_1\otimes g_1 & y_2\otimes g_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 也具有秩一. 故存在 $\alpha\in\mathbb{F}$ 使得 $y_2=\alpha y_1$. 取 $y(x)=y_1$, 则 $\Phi(L_x^{\mathcal{N}})\subseteq L_{y(x)}$. 即对任意的 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 存在向量 $y(x)$, $g_x(f)\in H$ 使得 $\Phi(x\otimes f)=y(x)\otimes g_x(f)$. 令

$$I_{10}=\{i>0\mid \text{对所有的}x\in N_i=H_1\oplus\cdots\oplus H_i\text{和}f\in H\text{使得当}\ x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\text{时,有}\Phi(x\otimes f)=0\}.$$

如果 $I_{10}=\emptyset$, 令 $i_{10}=0$; 如果 $I_{10}\neq\emptyset$, 令 $i_{10}=\max\{i\mid i\in I_{10}\}$. 设 $L_{10}=H_1\oplus\cdots\oplus H_{i_{10}}$. 则存在 $x\in H_{i_{10}+1}$ 和 $f\in(H_1\oplus\cdots\oplus H_{i_{10}})^\perp$ 使得 $\Phi(x\otimes f)\neq 0$. 令

$$I_{11}=\{i>i_{10}\mid \text{存在}x\in H_{i_{10}+1}\text{和}f\in H_i\text{使得}\Phi(x\otimes f)\neq 0\},$$

$i_{11}=\max\{i\mid i\in I_{11}\}$. 则存在 $x_1\in H_{i_{10}+1}$ 和 $f_1\in H_{i_{11}}$ 使得 $\Phi(x_1\otimes f_1)=y_1\otimes g_{x_1}(f_1)\neq 0$. 只有当 $f\in H_{i_{11}}\oplus\cdots\oplus H_n$ 时, 对所有的 $x\in H_{i_{10}+1}\oplus H_{i_{10}+2}\oplus\cdots\oplus H_{i_{11}}$, 有 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 因此 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 表明 $x_1\otimes f$, $x\otimes f_1\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 记 $\Phi(x_1\otimes f)=y_1\otimes g_{x_1}(f)$, $\Phi(x\otimes f_1)=y(x)\otimes g_x(f_1)$ 及 $\Phi(x\otimes f)=y(x)\otimes$

$g_x(f)$. 因为 $\begin{pmatrix} x_1 \otimes f_1 & x_1 \otimes f \\ x \otimes f_1 & x \otimes f \end{pmatrix}$ 具有秩一且 Φ_2 秩 1 不增，因此 $\begin{pmatrix} y_1 \otimes g_{x_1}(f_1) & y_1 \otimes g_{x_1}(f) \\ y(x) \otimes g_x(f_1) & y(x) \otimes g_x(f) \end{pmatrix}$ 具有秩一. 如果 $y(x)=0$, 则对所有的 f, 取 $g_x(f) = g_{x_1}(f)$; 如果 $y(x) \neq 0$, 则要么对所有的 f, $g_x(f) = g_{x_1}(f)$, 要么对所有的 f, $g_x(f) = 0$. 注意到如果对所有的 f, $g_x(f) = 0$, 那么由假定知， $y(x) = 0$, 矛盾. 因此第三种情形不可能发生. 故对所有的 f, 都有 $g_x(f) = g_{x_1}(f)$, 即 $g_x(f)$ 与 x 无关. 现在由 Φ 的线性，存在线性变换 $W_1, V_1 : L_{11} = H_{i_{10}+1} \oplus H_{i_{10}+2} \oplus \cdots \oplus H_{i_{11}} \to K$ 使得

$$\Phi(x\otimes f) = \begin{cases} W_1 x \otimes V_1 f, & \text{如果} x, f \in L_{11}, \\ 0, & \text{如果} x \in L_{10} \text{或} x \in L_{11} \text{且} f \in H_{i_{11}+1} \oplus \cdots \oplus H_n. \end{cases}$$

因为 Φ 有界，故 W_1 和 V_1 有界. 令

$$I_{20} = \{i > i_{11} \mid \text{对所有的} x \in H_{i_{11}+1} \oplus \cdots \oplus H_i \text{和} f \in H_{i_{11}+1} \oplus \cdots \oplus H_n \text{使得当} x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \text{时,有} \Phi(x\otimes f) = 0\}.$$

如果 $I_{20} = \emptyset$, 令 $i_{20} = i_{11}$; 如果 $I_{20} \neq \emptyset$, 令 $i_{20} = \max\{i \mid i \in I_{20}\}$ 且令 $L_{20} = H_{i_{11}+1} \oplus \cdots \oplus H_{i_{20}}$. 令

$$I_{22} = \{i > i_{20} \mid \text{存在} x \in H_{i_{20}+1} \text{和} f \in H_i \text{使得} \Phi(x \otimes f) \neq 0\},$$

$i_{22} = \max\{i \mid i \in I_{22}\}$. 相似于上面的讨论，存在有界线性算子 $W_2, V_2 : L_{22} = H_{i_{20}+1} \oplus \cdots \oplus H_{i_{22}} \to K$ 使得

$$\Phi(x\otimes f) = \begin{cases} W_2 x \otimes V_2 f, & \text{如果} x, f \in L_{22}, \\ 0, & \text{如果} x \in L_{20} \text{或} x \in L_{22} \text{且} f \in H_{i_{22}+1} \oplus \cdots \oplus H_n. \end{cases}$$

以这种方式继续下去. 因为 n 有限，因此存在正整数 k 使得 $i_{(k+1)0} = n$. 这样我们得到序列

$$0 \le i_{10} < i_{11} \le i_{20} < i_{22} \le \cdots \le i_{k0} < i_{kk} \le i_{(k+1)0} = n,$$

$$L_{l0} = H_{i_{(l-1)(l-1)}+1} \oplus \cdots \oplus H_{i_{l0}}, \quad L_{ll} = H_{i_{l0}+1} \oplus \cdots \oplus H_{i_{ll}}$$

和有界线性算子 $W_l, V_l : L_{ll} \to K$ $(l = 1, \cdots, k)$ 使得对 $l = 1, \cdots, k$,

$$\Phi(x \otimes f) = \begin{cases} W_l x \otimes V_l f, & 如果 x, f \in L_{ll}, \\ 0, & 如果 x \in L_{l0} 或者 x \in L_{ll} 且 f \in H_{i_{ll}+1} \oplus \cdots \oplus H_n, \end{cases}$$

且如果 $x \in L_{(k+1)0}$, 有 $\Phi(x \otimes f) = 0$.

现在对每个 $s \in \mathbb{N}$, 定义算子 $A_s, C_s \in \mathcal{B}(H, K)$ 如下:

$$A_s x = \begin{cases} s^{l-1} W_l x, & 如果 x \in L_{ll}\ (l = 1, \cdots, k), \\ 0, & 如果 x \in L_{l0}\ (l = 1, \cdots, k, k+1) \end{cases}$$

且

$$C_s f = \begin{cases} \dfrac{1}{s^{l-1}} V_l f, & 如果 f \in L_{ll}\ (l = 1, \cdots, k), \\ 0, & 如果 f \in L_{l0}\ (l = 1, \cdots, k, k+1). \end{cases}$$

令 $B_s = C_s^*$. 设 $i \leq j$, 对任意的 $x \in H_i$ 和 $f \in H_j$, 如果存在 l 使得 $H_i \subset L_{l0}$ 或 $H_j \subset L_{l0}$, 则对每个 $s \in \mathbb{N}$, 有

$$A_s(x \otimes f)B_s = A_s x \otimes C_s f = 0 = \Phi(x \otimes f);$$

如果存在 l 使得 $H_i \subset L_{ll}$ 且 $H_j \subset L_{ll}$, 则对每个 $s \in \mathbb{N}$,

$$A_s(x \otimes f)B_s = A_s x \otimes C_s f = (s^{l-1} W_l x) \otimes (\frac{1}{s^{l-1}} V_l f) = \Phi(x \otimes f);$$

如果 $H_i \subset L_{ll}$ 且 $H_j \subset L_{hh}$, 其中 $l < h$, 则当 $s \to \infty$ 时,

$$\begin{aligned} A_s(x \otimes f)B_s &= A_s x \otimes C_s f = (s^{l-1} W_l x) \otimes \left(\frac{1}{s^{h-1}} V_h f \right) \\ &= \frac{1}{s^{h-l}} W_l x \otimes V_h f \to 0 = \Phi(x \otimes f). \end{aligned}$$

所以对所有的 $x \in H_i$ 及 $f \in H_j$, 其中 $i \le j$, 都有 $\Phi(x \otimes f) = \lim_{s\to\infty} A_s(x\otimes f)B_s$ 成立. 因为 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} = \mathrm{span}\{x \otimes f \mid x \in H_i$ 且 $f \in H_j\ (i \le j)\}$, 因此对所有的 $F \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(F) = \lim_{s\to\infty} A_sFB_s$. 证毕.

定理 7.3.2 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的有限套. 令 $\Phi : \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathcal{B}(K)$ 是有界线性映射且 k 是正整数, 则下列性质等价.

(1) Φ 完全秩不增.

(2) Φ 完全秩 k 不增.

(3) Φ 完全秩 1 不增.

(4) Φ_{k+1} 秩 k 不增.

(5) Φ_2 秩 1 不增.

(6) 存在算子列 $\{A_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(H,K)$ 和 $\{B_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(K,H)$ 使得

$$\Phi(F) = \lim_{s\to\infty} A_sFB_s \qquad \forall F \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}.$$

证明 由定理 7.3.1, 显然 (5)⇒(6)⇒(1)⇒(3)⇒(2)⇒(4), 因此只需证明 (4)⇒(5).

假定 Φ_2 不是秩一不增的, 那么存在秩一算子

$$T = \begin{pmatrix} x_1 \otimes f_1 & x_1 \otimes f_2 \\ x_2 \otimes f_1 & x_2 \otimes f_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \otimes M_2(\mathbb{F})$$

使得 $\mathrm{rank}(\Phi_2(T)) \ge 2$, 所以 $\Phi(x_i \otimes f_j)$ 中至少有一个不等于零. 不失一般性, 设 $\Phi(x_1 \otimes f_1) \ne 0$. 令

$$S = \begin{pmatrix} T & & & 0 \\ & x_1 \otimes f_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_1 \otimes f_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \otimes M_{k+1}(\mathbb{F}),$$

则 rank(S)= k. 因为

$$\Phi_{k+1}(S)=\begin{pmatrix}\Phi_2(T) & & & 0\\ & \Phi(x_1\otimes f_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Phi(x_1\otimes f_1)\end{pmatrix},$$

因此 $\mathrm{rank}(\Phi_{k+1}(S))$ $=\mathrm{rank}(\Phi_2(T))+(k-1)\mathrm{rank}(\Phi(x_1\otimes f_1))\geq 2+(k-1)=k+1$, 与假设条件矛盾. 故 Φ_2 秩一不增. 证毕.

定理 7.3.3 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的有限套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathcal{B}(K)$ 是有界线性映射且 k 是正整数, 则下列性质等价.

(1) Φ 完全秩不增.

(2) Φ 完全秩 k 不增.

(3) Φ 完全秩 1 不增.

(4) Φ_{k+1} 秩 k 不增.

(5) Φ_2 秩 1 不增.

(6) 存在算子网 $\{A_\lambda\}\subset\mathcal{B}(H,K)$ 和 $\{B_\lambda\}\subset\mathcal{B}(K,H)$ 使得对任意的 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$,

$$\Phi(T)=\text{s-}\lim_{\lambda}A_\lambda TB_\lambda,$$

其中 s-lim 代表强算子拓扑极限. 进而, 如果 Φ 保单位元, 那么

(7) 存在可逆算子网 $\{C_\lambda\}\subset\mathcal{B}(H,K)$ 使得对任意的 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $\Phi(T)=\lim_\lambda C_\lambda TC_\lambda^{-1}$ (SOT 或 WOT).

证明 假定 (6) 成立, 显然 (1)—(5) 成立. 反过来, 假定 (1)—(5) 之一成立, 那么由定理 7.3.2, 存在有界算子列 $\{A_s\}$ 和 $\{B_s\}$ 使得对每个 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=\lim_{s\to\infty}A_sTB_s$. 文献 [87] 中定理 10 指出: 若 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的线性子空间, 则线性映射 $\varphi:\mathcal{R}\to\mathcal{B}(H)$ 具有形式 $\varphi(\cdot)$ =s-$\lim_\lambda A_\lambda(\cdot)B_\lambda$ 当且仅当 $\varphi|_{\mathcal{R}\cap\mathcal{F}(H)}(\cdot)$ =s-$\lim_\alpha C_\alpha(\cdot)D_\alpha$, 故 (6) 成立. 如果 $\Phi(I)=I$, 由文献 [87] 中推论 3 和推论 11 知, (6)⇔(7). 证毕.

对于完全保秩线性映射，我们有下列结论.

定理 7.3.4 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的有限套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathcal{B}(K)$ 是有界线性映射且 k 是正整数，则下列性质等价.

(1) Φ 完全保秩.

(2) Φ 完全保秩 k.

(3) Φ 完全保秩 1.

(4) Φ_{k+1} 保秩 k.

(5) Φ_2 保秩 1.

(6) 存在单射算子 $A\in\mathcal{B}(H,K)$ 和稠值域算子 $B\in\mathcal{B}(K,H)$ 使得对任意的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(T)=ATB$.

证明 显然 (6)⇒(1)⇒(3)⇒(5) 和 (1)⇒(2)⇒(4).

(5)⇒(6). 设 Φ_2 保秩 1, 则 Φ 保秩 1. 因此在定理 7.3.1 的证明中， $i_{10}=0, i_{11}=n$, 且存在算子 A 和 B 使得对任意的秩一算子 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Bf\neq 0$. 显然 A 和 B 是单射. 令 $C=B^*$, 因为每个有限秩算子是 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 中有限个秩一算子的和，因此 (6) 成立.

(4)⇒(5). 设 (4) 成立. 由定理 7.3.2 知，Φ_2 秩一不增. 如果 (5) 不成立, 那么存在秩一算子 $T=\begin{pmatrix} x_1\otimes f_1 & x_1\otimes f_2\\ x_2\otimes f_1 & x_2\otimes f_2\end{pmatrix}\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\otimes M_2(\mathbb{F})$ 使得 $\Phi_2(T)=0$, 因此存在秩一算子 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 使得 $\Phi(x\otimes f)=0$. 令

$$S=\begin{pmatrix} 0 & & & 0\\ & x\otimes f & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x\otimes f\end{pmatrix}\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\otimes M_{k+1}(\mathbb{F}),$$

则 $\mathrm{rank}(S)=k$ 但 $\mathrm{rank}(\Phi_{k+1}(S))=0$, 矛盾. 证毕.

特别地，当 H 和 K 是有限维空间时，我们得到上三角块矩阵代数 $\mathcal{T}\subset M_n(\mathbb{F})$ 上完全秩不增线性映射的如下刻画，证明略.

推论 7.3.5 设 $\mathcal{T} \subset M_n(\mathbb{F})$ 是上三角块矩阵代数且 k 是正整数. 令 $\Phi : \mathcal{T} \to M_m(\mathbb{F})$ 是线性变换, 则下列性质等价.

(1) Φ 完全秩不增.

(2) Φ 完全秩 k 不增.

(3) Φ 完全秩 1 不增.

(4) Φ_{k+1} 秩 k 不增.

(5) Φ_2 秩 1 不增.

(6) 存在矩阵序列 $\{A_s\} \subseteq M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 和 $\{B_s\} \subseteq M_{n\times m}(\mathbb{F})$ 使得

$$\Phi(F) = \lim_{s\to\infty} A_s F B_s \qquad \forall F \in \mathcal{T}.$$

推论 7.3.6 设 $\mathcal{T} \subset M_n(\mathbb{F})$ 是上三角块矩阵代数且 k 是正整数. 令 $\Phi : \mathcal{T} \to M_n(\mathbb{F})$ 是线性变换, 则下列性质等价.

(1) Φ 完全保秩.

(2) Φ 完全保秩 k.

(3) Φ 完全保秩 1.

(4) Φ_{k+1} 保秩 k.

(5) Φ_2 保秩 1.

(6) 存在可逆块矩阵 $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得对每个 $F \in \mathcal{T}$, $\Phi(F) = AFB$.

进而如果 Φ 保单位元, 那么上面的 (1)—(6) 也等价于

(7) $\Phi : \mathcal{T} \to M_n(\mathbb{F})$ 是单射同态.

当 φ 是上三角矩阵代数上的线性泛函时, 我们有下列推论.

推论 7.3.7 设 $\tau_n \subseteq M_n(\mathbb{F})$ 是 $n \times n$ 上三角矩阵代数且 φ 是 τ_n 的线性泛函, 即存在 $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$ $(1 \le i \le j \le n)$ 使得对每个 $T = (t_{ij}) \in \tau_n$, 有 $\varphi(T) = \sum\limits_{i\le j} \alpha_{ij} t_{ij}$, 则下列性质等价.

(1) φ 完全秩不增.

(2) φ_2 秩不增.

(3) $\{\alpha_{ij}\}_{i,j}$ 具有下列性质: 对任意的 i_1, i_2, j_1, j_2 满足条件 $1 \le i_1 \le i_2 \le j_1 \le j_2 \le n$, 有 $\alpha_{i_1 j_1}\alpha_{i_2 j_2} = \alpha_{i_1 j_2}\alpha_{i_2 j_1}$.

(4) 存在列向量 $\{A_s\}_{s=1}^{\infty}$ 和 $\{B_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{F}^n$ 使得对所有的 $T \in \tau_n$, $\varphi(T) = \lim_{s\to\infty} A_s^{tr} T B_s$, 其中 A^{tr} 代表 A 的转置.

证明 由定理 7.3.2 知, 只需证明 (2)⇔(3).

令 E_{ij} $(1 \le i \le j \le n)$ 是 $M_n(\mathbb{F})$ 的矩阵单位, 即在 (i,j) 处的值为 1, 其他表值为 0 的矩阵. 显然 $\{E_{ij}\}_{1\le i\le j\le n}$ 是 τ_n 的一组基. 对 $1 \le i_1 \le i_2 \le j_1 \le j_2 \le n$, $E = \begin{pmatrix} E_{i_1j_1} & E_{i_1j_2} \\ E_{i_2j_1} & E_{i_2j_2} \end{pmatrix}$ 是 $\tau_n \otimes M_2(\mathbb{F})$ 中的一秩元. 然而 $\varphi_2(E) = \begin{pmatrix} \alpha_{i_1j_1} & \alpha_{i_1j_2} \\ \alpha_{i_2j_1} & \alpha_{i_2j_2} \end{pmatrix}$ 的秩至多为 1 当且仅当 $\alpha_{i_1j_1}\alpha_{i_2j_2} = \alpha_{i_1j_2}\alpha_{i_2j_1}$. 证毕.

注 7.3.1 由推论 7.3.7 知, 在 $n = 2$ 的情形, (3) 总成立, 因此很容易看到 τ_2 的每个线性泛函是完全秩不增的. 然而当 $n > 2$ 时, 存在 τ_n 上不是完全秩不增的线性泛函.

设 $\mathbf{T} = (T_1, \cdots, T_m)$ 和 $\mathbf{S} = (S_1, \cdots, S_m)$ 是 m- 矩阵组, 其中 T_i, $S_i \in M_n(\mathbb{F})$. 令 $\mathcal{S}(\mathbf{T}) = \{A\mathbf{T}A^{-1} = (AT_1A^{-1}, \cdots, AT_mA^{-1}) \mid A \in M_n(\mathbb{F})$ 可逆 $\}$. 作为定理 7.3.1 的应用, 下面的结论也给出有关猜测 2.2.3 和 2.2.4 的一些肯定结果.

命题 7.3.8 设 $\mathcal{M} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ 是线性子空间. 令 $\{I, T_1, \cdots, T_m\}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组基, 且这组基生成一个上三角块矩阵代数. 假定 $\Phi : \mathcal{M} \to M_n(\mathbb{F})$ 是保单位元的线性映射且 $\Phi(T_i) = S_i$, 则下列等价.

(1) Φ 完全秩不增.

(2) $\mathbf{S} \in \mathcal{S}(\mathbf{T})^-$.

证明 (1)⇒(2). 设 Φ 完全秩不增, 那么由 §4.5 定理 4.5.6 知, Φ 能够延拓为由 $\{I, T_1, \cdots, T_m\}$ 生成的代数 $\mathcal{A}$ 到 $\{I, S_1, \cdots, S_m\}$ 生成代数的完全秩不增线性映射. 因为 $\mathcal{A}$ 是上三角块矩阵代数, 应用推论 7.3.5, 存在矩阵列 $\{A_k\}$, $\{B_k\} \subset M_n(\mathbb{F})$ 使得对每个非交换多项式 $P = P(t_1, \cdots, t_m)$, $P(\mathbf{S}) = \lim_{k\to\infty} A_k P(\mathbf{T}) B_k$. 因为 $\Phi(I) = I$, 因此 $\lim_{k\to\infty} A_k B_k = I$, 从而 $\lim_{k\to\infty}(A_kB_k)^{-1} = I$. 所以 $P(\mathbf{S}) = \lim_{k\to\infty} A_k P(\mathbf{T}) B_k (A_kB_k)^{-1} = \lim_{k\to\infty} A_k P(\mathbf{T}) A_k^{-1}$.

特别地，对任意的 i ($i=1,\cdots,m$)，我们有 $S_i=\lim_{k\to\infty}A_kT_iA_k^{-1}$，故 $\mathbf{S}=\lim_{k\to\infty}A_k\mathbf{T}A_k^{-1}$.

(2)⇒(1). 假定 (2) 成立，即 $\mathbf{S}\in\mathcal{S}(\mathbf{T})^-$. 于是存在可逆矩阵 A_k 使得 $\mathbf{S}=\lim_{k\to\infty}A_k\mathbf{T}A_k^{-1}$. 因此对具有变量 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 的任意非交换多项式 P, 有

$$P(\mathbf{S})=\lim_{k\to\infty}A_kP(\mathbf{T})B_k,$$

从而对每个 $D\in\mathcal{M}$, 有 $\Phi(D)=\lim_{k\to\infty}A_kDA_k^{-1}$, 所以 Φ 完全秩不增. 证毕.

命题 7.3.9 令 $\mathcal{M},\Phi$ 正如命题 7.3.8 中所设，则下列性质等价.

(1) Φ 完全保秩.

(2) $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{T}$ 联合相似.

证明 由推论 7.3.5, 命题 7.3.8 和定理 4.5.6 立得. 证毕.

在本节的剩余部分，我们总假定 Hilbert 空间 H 是可分的. 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的套且 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是相应的套代数.

定理 7.3.10 设 $\mathcal{N}$ 是可分 Hilbert 空间 H 上的套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathcal{B}(K)$ 是有界线性映射，则下列性质等价.

(1) Φ 完全秩一不增.

(2) Φ_2 秩一不增.

(3) 存在有界算子网 $\{A_\lambda\}\subseteq\mathcal{B}(H,K)$ 和 $\{B_\lambda\}\subseteq\mathcal{B}(K,H)$ 使得在算子范数拓扑下，对任意的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=\lim_\lambda A_\lambda TB_\lambda$.

证明 显然 (3)⇒(1)⇒(2). 下证 (2)⇒(3). 假定 Φ_2 秩一不增. 对任意的 $x\in H$, 定义

$$L_x^{\mathcal{N}}=\{x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\mid f\in H\},\quad L_x=\{x\otimes f\mid f\in H\}.$$

我们把证明分成以下几步.

第一步 首先证明对任意的 $x\in H$, 存在 $y(x)\in K$ 使得 $\Phi(L_x^{\mathcal{N}})\subseteq L_{y(x)}$, 从而对每个 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=y(x)\otimes g_x(f)$.

如果 $\Phi(L_x^{\mathcal{N}})=0$, 令 $y(x)=0$; 如果 $\Phi(L_x^{\mathcal{N}})\neq 0$, 那么存在 $f_0\in H$ 使得 $\Phi(x\otimes f_0)=y_0\otimes g_0\neq 0$. 对满足 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 的任意 $f\in H$, 令 $\Phi(x\otimes f)=y\otimes g$. 因为 $\begin{pmatrix} x\otimes f_0 & x\otimes f \\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\otimes M_2(\mathbb{F})$ 是秩一算子, 因此 $\begin{pmatrix} y_0\otimes g_0 & y\otimes g \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 也具有秩一, 所以 $y\in\mathrm{span}\{y_0\}$, 从而 $\Phi(x\otimes f)\in L_{y_0}$. 取 $y(x)=y_0$, 则 $\Phi(L_x^{\mathcal{N}})\subseteq L_{y(x)}$.

因为 H 可分, 因此存在与 $\mathcal{N}$ 有相同序型的区间 $[0,1]$ 的闭子集 Γ 使得 $0,1\in\Gamma$. 以后, 我们以 Γ 作为 $\mathcal{N}$ 的指标, 即记 $\mathcal{N}=\{N_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}$.

第二步 令 $\beta_{10}=0$, $\Lambda_{11}=\{\gamma\geq\beta_{10}\mid$ 当 $x\in N_\gamma$ 时, 有 $\Phi(L_x^{\mathcal{N}})=0\}$, $\alpha_{11}=\sup\{\gamma\mid\gamma\in\Lambda_{11}\}$. 则 $\alpha_{11}\in\Lambda_{11}$.

如果 $\alpha_{11}\notin\Lambda_{11}$, 那么存在 $x_0\in N_{\alpha_{11}}$ 和 $f_0\in H$ 使得 $x_0\otimes f_0\in L_{x_0}^{\mathcal{N}}$ 且 $\Phi(x_0\otimes f_0)\neq 0$. 在这种情形下, α_{11} 是 Γ 的极限数. 取递增序列 $\{\gamma_n\}\subset\Lambda_{11}$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\alpha_{11}$. 令 $L_n=N_{\gamma_n}\ominus N_{\gamma_{n-1}}$ $(N_{\gamma_0}=0)$, 则 $N_{\alpha_{11}}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}L_n$, $x_0=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\xi_n$, 其中 $\xi_n\in L_n\subset N_{\gamma_n}$. 因为 $x_0\otimes f_0\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 因此 $f_0\in(N_{\alpha_{11}})_-^{\perp}$, 所以对每个 n, $\xi_n\otimes f_0\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 且 $\Phi(\xi_n\otimes f_0)=0$. 由于 Φ 有界, 于是 $\Phi(x_0\otimes f_0)=\lim_{n\to\infty}\Phi\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\otimes f_0\right)=0$, 矛盾.

第三步 令 $\Delta_{11}=\{\gamma>\alpha_{11}\mid$ 当 $x\in N_\gamma\ominus N_{\alpha_{11}}$ 且 $f\in N_\gamma^{\perp}$ 时, 有 $\Phi(x\otimes f)=0\}$, $\beta_{11}=\inf\{\gamma\mid\gamma\in\Delta_{11}\}$. 则 $\beta_{11}\in\Delta_{11}$.

如果 $\beta_{11}\notin\Delta_{11}$, 那么存在 $x_0\in N_{\beta_{11}}\ominus N_{\alpha_{11}}$ 和 $f_0\in N_{\beta_{11}}^{\perp}$ 使得 $\Phi(x_0\otimes f_0)\neq 0$. 取递减序列 $\{\gamma_n\}\subset\Delta_{11}$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\beta_{11}$. 令 $H_n=N_{\gamma_n}^{\perp}\ominus N_{\gamma_{n-1}}^{\perp}$ 且 $H_1=N_{\gamma_1}^{\perp}$. 那么 $N_{\beta_{11}}^{\perp}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}H_n$ 且 $f_0=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\eta_n$, 其中 $\eta_n\in H_n\subseteq N_{\gamma_n}^{\perp}$. 因为 $x_0\in N_{\beta_{11}}\ominus N_{\alpha_{11}}$, 因此对每个 n, $x_0\otimes\eta_n\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 且 $\Phi(x_0\otimes\eta_n)=0$. 由于 Φ 有界, 于是 $\Phi(x_0\otimes f_0)=\lim_{n\to\infty}\Phi\left(\sum_{k=1}^{n}x_0\otimes\eta_k\right)=0$, 矛盾.

第四步 存在有界算子序列 $\{A_{11}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty},\{C_{11}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{B}(N_{\beta_{11}}\ominus$

$N_{\beta_{10}}, K)$ 使得对满足 $x\otimes f\in\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 的所有 $x, f\in N_{\beta_{11}}\ominus N_{\beta_{10}}$, 有

$$\Phi(x\otimes f)=\lim_{n\to\infty}A_{11}^{(n)}x\otimes C_{11}^{(n)}f,$$

且对每个 $x\in N_{\beta_{11}}\ominus N_{\beta_{10}}$ 及 $f\in(N_{\beta_{11}})^{\perp}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=0$.

情形 1 $(N_{\beta_{11}})_{-}=N_{\beta_{11}}$ 且 $(N_{\alpha_{11}})_{+}=N_{\alpha_{11}}$.

我们首先断言存在收敛于 β_{11} 的递增序列 $\{\delta_n\}\subset\Gamma$ 及收敛于 α_{11} 的递减序列 $\{\gamma_n\}\subset\Gamma$, 向量 $x_n\in N_{\gamma_n}\ominus N_{\alpha_{11}}$ 和 $f_n\in N_{\beta_{11}}\ominus N_{\delta_n}$ 使得对每个 $n\in\mathbb{N}$, $\Phi(x_n\otimes f_n)=y_n\otimes g_n(f_n)\neq 0$ (对任意的自然数 n 和 m, 可要求 $\gamma_n<\delta_m$).

反证, 假定存在满足 $\alpha_{11}<\gamma_0<\delta_0<\beta_{11}$ 的 $\gamma_0, \delta_0\in\Gamma$ 使得当 $x\in N_{\gamma_0}\ominus N_{\alpha_{11}}$ 且 $f\in N_{\beta_{11}}\ominus N_{\delta_0}$ 时, 有 $\Phi(x\otimes f)=0$. 令

$$\Delta_{11}^{'}=\{\gamma\geq\gamma_0\mid 当x\in N_{\gamma_0}\ominus N_{\alpha_{11}}且f\in N_{\gamma}^{\perp}时,有\Phi(x\otimes f)=0\},$$

$\beta_{11}^{'}=\inf\{\gamma\mid\gamma\in\Delta_{11}^{'}\}$. 显然 $\gamma_0\leq\beta_{11}^{'}\leq\delta_0<\beta_{11}$. 下证 $\beta_{11}^{'}\in\Delta_{11}$.

假定 $\beta_{11}^{'}\notin\Delta_{11}$, 那么存在 $x_0\in N_{\beta_{11}^{'}}\ominus N_{\alpha_{11}}$ 和 $f_0\in N_{\beta_{11}}\ominus N_{\beta_{11}^{'}}$ 使得 $\Phi(x_0\otimes f_0)\neq 0$. 如果 $(N_{\beta_{11}^{'}})_{-}=N_{\beta_{11}^{'}}$, 则对某个 γ $(\alpha_{11}<\gamma<\beta_{11}^{'})$, 可要求 $x_0\in N_{\gamma}\ominus N_{\alpha_{11}}$. 事实上, 存在收敛于 $\beta_{11}^{'}$ 的递增序列 $\{\theta_n\}$ $(\subset\Gamma)$. 令 $L_n=N_{\theta_n}\ominus N_{\theta_{n-1}}$ $(N_{\theta_0}=0)$. 则 $N_{\beta_{11}^{'}}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}L_n$, $x_0=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\xi_n=\lim_{l\to\infty}\bigoplus_{n=1}^{l}\xi_n$, 其中 $\xi_n\in L_n\subset N_{\theta_n}$. 因为 Φ 有界且 $\Phi(x_0\otimes f_0)\neq 0$, 因此存在自然数 k 使得 $\Phi(\sum\limits_{n=1}^{k}\xi_n\otimes f_0)\neq 0$.

显然 $x_k=\sum\limits_{n=1}^{k}\xi_n\in N_{\theta_k}\subset N_{\beta_{11}^{'}}$, 因此可取 $\gamma=\theta_k<\beta_{11}^{'}$. 由 $\beta_{11}^{'}$ 的定义, 对于 $\gamma<\beta_{11}^{'}$, 存在 $x_1\in N_{\gamma_0}\ominus N_{\alpha_{11}}$ 和 $f_1\in N_{\gamma}^{\perp}$ 使得 $\Phi(x_1\otimes f_1)\neq 0$. 注意到 $x_0\otimes f_1$, $x_1\otimes f_0\in\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 所以算子矩阵 $\begin{pmatrix}x_0\otimes f_0 & x_0\otimes f_1\\ x_1\otimes f_0 & x_1\otimes f_1\end{pmatrix}\in\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\otimes M_2(\mathbb{F})$ 具有秩一. 然而 $\Phi(x_1\otimes f_0)=0$ 表明 $\begin{pmatrix}\Phi(x_0\otimes f_0) & \Phi(x_0\otimes f_1)\\ \Phi(x_1\otimes f_0) & \Phi(x_1\otimes f_1)\end{pmatrix}$ 具有秩二, 与假定 Φ_2 秩一不增矛盾. 如果 $(N_{\beta_{11}^{'}})_{-}\neq N_{\beta_{11}^{'}}$, 则要么取 $x_0\in$

$(N_{\beta'_{11}})_- \ominus N_{\alpha_{11}}$ 或者取 $x_0 \in N_{\beta'_{11}} \ominus (N_{\beta'_{11}})_-$. 对于第一种情形，取 $N_\gamma = (N_{\beta'_{11}})_-$，如上的讨论可导致矛盾. 对于第二种情形，由 β'_{11} 的定义，存在 $x_1 \in N_{\gamma_0} \ominus N_{\alpha_{11}}$ 和 $f_1 \in N_{\beta'_{11}} \ominus (N_{\beta'_{11}})_-$ 使得 $\Phi(x_1 \otimes f_1) \neq 0$. 因为 $f_1 \in (N_{\beta'_{11}})_-^\perp$ 且 $\gamma_0 < \beta'_{11}$, 所以仍有 $x_0 \otimes f_1$, $x_1 \otimes f_0 \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 因为 $\Phi(x_1 \otimes f_0) = 0$ 且 Φ_2 秩一不增，通过考虑算子矩阵 $\begin{pmatrix} x_0 \otimes f_0 & x_0 \otimes f_1 \\ x_1 \otimes f_0 & x_1 \otimes f_1 \end{pmatrix}$，又一次得到矛盾. 所以 $\beta'_{11} \in \Delta_{11}$. 从而 $\beta_{11} \leq \beta'_{11} < \beta_{11}$，矛盾. 故断言成立.

对每个 $x_n \otimes f \in L^{\mathcal{N}}_{x_n}$，由第一步，$\Phi(x_n \otimes f) = y_n \otimes g_n(f)$. 显然 g_n 在 $D(x_n) = \{f \mid x_n \otimes f \in L^{\mathcal{N}}_{x_n}\}$ 上是线性的且 $(N_{\gamma_n})_-^\perp \subset D(x_n)$. 易证 $g_n|_{(N_{\gamma_n})_-^\perp} : (N_{\gamma_n})_-^\perp \to K$ 有界. 事实上，这由 Φ 的有界性和闭图定理立得.

其次我们断言，对任意的自然数 k, $\dim \bigvee_{n=k}^{\infty} (g_n|_{(N_{\gamma_k})_-^\perp}) = 1$.

反之，假定存在 $n_i, n_j\ (\geq k)$ 使得 $g_{n_i}|_{(N_{\gamma_k})_-^\perp}$ 和 $g_{n_j}|_{(N_{\gamma_k})_-^\perp}$ 线性无关. 设 $n_j > n_i$，则 $\delta_{n_i} < \delta_{n_j}$ 且 $\gamma_{n_i} > \gamma_{n_j}$，因此 $x_{n_i} \otimes f_{n_j}$, $x_{n_j} \otimes f_{n_i} \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 由于

$$\begin{pmatrix} x_{n_i} \otimes f_{n_i} & x_{n_i} \otimes f_{n_j} \\ x_{n_j} \otimes f_{n_i} & x_{n_j} \otimes f_{n_j} \end{pmatrix} \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \otimes M_2(\mathbb{F})$$

具有秩一，因此 $\begin{pmatrix} y_{n_i} \otimes g_{n_i}(f_{n_i}) & y_{n_i} \otimes g_{n_i}(f_{n_j}) \\ y_{n_j} \otimes g_{n_j}(f_{n_i}) & y_{n_j} \otimes g_{n_j}(f_{n_j}) \end{pmatrix}$ 也具有秩一，于是 $g_{n_i}(f_{n_i}) = g_{n_j}(f_{n_i})$ 且 $g_{n_i}(f_{n_j}) = g_{n_j}(f_{n_j})$. 对任意的 $f \in (N_{\gamma_k})_-^\perp$，因为 $x_{n_i} \otimes f, x_{n_j} \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 且 $\begin{pmatrix} x_{n_i} \otimes f & x_{n_i} \otimes f_{n_j} \\ x_{n_j} \otimes f & x_{n_j} \otimes f_{n_j} \end{pmatrix}$ $\in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \otimes M_2(\mathbb{F})$ 具有秩一，因此

$$\begin{pmatrix} y_{n_i} \otimes g_{n_i}(f) & y_{n_i} \otimes g_{n_i}(f_{n_j}) \\ y_{n_j} \otimes g_{n_j}(f) & y_{n_j} \otimes g_{n_j}(f_{n_j}) \end{pmatrix}$$

具有秩一. 所以对所有的 $f \in (N_{\gamma_k})_-^\perp$，有 $g_{n_i}(f) = g_{n_j}(f)$，从而 $g_{n_i}|_{(N_{\gamma_k})_-^\perp} = g_{n_j}|_{(N_{\gamma_k})_-^\perp}$，与假定 $g_{n_i}|_{(N_{\gamma_k})_-^\perp}$ 和 $g_{n_j}|_{(N_{\gamma_k})_-^\perp}$ 线性无

关矛盾. 故对任意的自然数 $n\ (\geq k)$, $g_n|_{(N_{\gamma_k})_-^\perp} = g_k|_{(N_{\gamma_k})_-^\perp}$, 即 $\dim\bigvee_{n=k}^{\infty}\{g_n|_{(N_{\gamma_k})_-^\perp}\} = 1$.

类似地, 对每个 n, 存在线性变换 $y_n : D(f_n) = \{x \mid x \otimes f_n \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}\} \to K$ 使得 $\Phi(x\otimes f_n) = y_n(x) \otimes g_n(f_n)$, 其中 $y_n|_{N_{\delta_n}}$ 有界且如果 $m > n$, 有 $y_m|_{N_{\delta_n}} = y_n|_{N_{\delta_n}}$.

定义 $w : \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\delta_n} \to K$ 使得 $w|_{N_{\delta_n}} = y_n|_{N_{\delta_n}}$, $g : \bigcup_{n=1}^{\infty}(N_{\gamma_n})_-^\perp \to K$ 使得 $g|_{(N_{\gamma_n})_-^\perp} = g_n|_{(N_{\gamma_n})_-^\perp}$, 那么 w 和 g 是线性的. 对满足 $x\otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 的任意的 x, $f \in N_{\beta_{11}} \ominus N_{\alpha_{11}}$, 存在 $\gamma \in \Gamma$ 使得 $x \in N_\gamma \ominus N_{\alpha_{11}}$ 且 $f \in N_{\beta_{11}} \ominus (N_\gamma)_-$. 我们可要求 $\gamma = \min\{\delta \mid x \in N_\delta \ominus N_{\alpha_{11}}\}$. 因为序列 $\{\delta_n\}$ 递增收敛于 β_{11} 且 $\{\gamma_n\}$ 递减收敛于 α_{11}, 因此存在满足 $\gamma_n < \gamma < \delta_n$ 的自然数 n, 显然 $x_n \otimes f$, $x \otimes f_n \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 因为 $\begin{pmatrix} x_n\otimes f_n & x_n \otimes f \\ x\otimes f_n & x\otimes f \end{pmatrix} \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \otimes M_2(\mathbb{F})$ 具有秩一, 因此

$$\begin{pmatrix} y_n\otimes g_n(f_n) & y_n \otimes g_n(f) \\ y_n(x)\otimes g_n(f_n) & y(x)\otimes g_x(f) \end{pmatrix}$$

也具有秩一, 所以 $y(x)$ 和 $y_n(x)$ 线性相关. 如果 $y(x)$ 和 $y_n(x)$ 非零, 则可假定 $y(x) = y_n(x) = w(x)$, $g_x(f) = g_n(f) = g(f)$. 如果 $y(x) = 0$, 因为 $g_n(f_n) \neq 0$, 因此一定有 $y_n(x) = 0$, 所以仍然可取 $g_x(f) = g_n(f)$; 如果 $y_n(x) = 0$ 但 $y(x) \neq 0$, 则对所有的 $f \in (N_\gamma)_-^\perp$, 有 $g_x(f) \equiv 0$, 于是 $\Phi(L_x^{\mathcal{N}}) = 0$, 从而由定义知 $y(x) = 0$, 与假定 $y(x) \neq 0$ 矛盾. 所以对任意的 x, $f \in N_{\beta_{11}} \ominus N_{\alpha_{11}}$ 使得 $x\otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x\otimes f) = y_n(x)\otimes g_n(f) = w(x) \otimes g(f)$.

对每个 n, 定义 $A_{11}^{(n)}, C_{11}^{(n)} : N_{\beta_{11}} \ominus N_{\beta_{10}} \to K$ 如下:

$$A_{11}^{(n)}x = \begin{cases} w(x) & \text{如果} x \in N_{\delta_n} \ominus N_{\beta_{10}}, \\ 0 & \text{如果} x \in N_{\beta_{11}} \ominus N_{\delta_n}; \end{cases}$$

$$C_{11}^{(n)}f = \begin{cases} g(f) & \text{如果} f \in N_{\beta_{11}} \ominus (N_{\gamma_n})_-, \\ 0 & \text{如果} f \in N_{\gamma_n} \ominus N_{\beta_{10}}. \end{cases}$$

显然对每个自然数 n, $A_{11}^{(n)}$, $C_{11}^{(n)} \in \mathcal{B}(N_{\beta_{11}} \ominus N_{\beta_{10}}, K)$ 且对满足 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 的所有 $x, f \in N_{\beta_{11}} \ominus N_{\beta_{10}}$, 有

$$\Phi(x \otimes f) = \lim_{n\to\infty} A_{11}^{(n)} x \otimes C_{11}^{(n)} f,$$

从而完成了情形 1 的证明.

情形 2 如果 $(N_{\beta_{11}})_- < N_{\beta_{11}}$ 且 $(N_{\alpha_{11}})_+ = N_{\alpha_{11}}$, 那么存在收敛于 α_{11} 的递减序列 $\{\gamma_n\}$ 以及 $x_n \in N_{\gamma_n} \ominus N_{\alpha_{11}}$ 和 $f_n \in N_{\beta_{11}} \ominus (N_{\beta_{11}})_-$ 使得 $\Phi(x_n \otimes f_n) \neq 0$. 在这种情形下, 我们能找到 $\mathcal{B}(N_{\beta_{11}} \ominus N_{\beta_{10}}, K)$ 中的算子 A_{11} 和算子序列 $\{C_{11}^{(n)}\}$ 使得对满足 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 的所有 $x, f \in N_{\beta_{11}} \ominus N_{\beta_{10}}$, 有 $\Phi(x \otimes f) = \lim_{n\to\infty} A_{11} x \otimes C_{11}^{(n)} f$.

情形 3 如果 $(N_{\beta_{11}})_- = N_{\beta_{11}}$ 且 $(N_{\alpha_{11}})_+ > N_{\alpha_{11}}$, 那么存在收敛于 β_{11} 的递增序列 $\{\delta_n\}$ 以及 $x_n \in N_{(\alpha_{11})_+} \ominus N_{\alpha_{11}}$ 和 $f_n \in N_{\beta_{11}} \ominus N_{\delta_n}$ 使得 $\Phi(x_n \otimes f_n) \neq 0$. 在这种情形下, 我们可找到 $\mathcal{B}(N_{\beta_{11}} \ominus N_{\beta_{10}}, K)$ 中的算子序列 $\{A_{11}^{(n)}\}$ 和算子 C_{11} 使得对满足 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 的所有 $x, f \in N_{\beta_{11}} \ominus N_{\beta_{10}}$, 有 $\Phi(x \otimes f) = \lim_{n\to\infty} A_{11}^{(n)} x \otimes C_{11} f$.

情形 4 如果 $(N_{\beta_{11}})_- < N_{\beta_{11}}$ 且 $(N_{\alpha_{11}})_+ > N_{\alpha_{11}}$, 那么存在算子 A_{11} 和 $C_{11} \in \mathcal{B}(N_{\beta_{11}} \ominus N_{\beta_{10}}, K)$ 使得对满足 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 的所有 $x, f \in N_{\beta_{11}} \ominus N_{\beta_{10}}$ 有 $\Phi(x \otimes f) = A_{11} x \otimes C_{11} f$.

到此, 第四步的断言得证.

第五步 如果 $\beta_{11} = 1$, 则停止. 否则, 令 $\Lambda_{12} = \{\gamma > \beta_{11} \mid$ 当 $x \in N_\gamma \ominus N_{\beta_{11}}$ 时, 有 $\Phi(L_x^{\mathcal{N}}) = 0\}$. 如果 $\Lambda_{12} = \emptyset$, 令 $\alpha_{12} = \beta_{11}$; 如果 $\Lambda_{12} \neq \emptyset$, 令 $\alpha_{12} = \sup\{\gamma \mid \gamma \in \Lambda_{12}\}$. 相似于第二步的证明, 我们有 $\alpha_{12} \in \Lambda_{12}$. 所以对任意的 $x \in N_{\alpha_{12}} \ominus N_{\beta_{11}}$, 有 $\Phi(L_x^{\mathcal{N}}) = 0$. 如果 $\alpha_{12} = 1$, 则停止. 否则, 令

$$\Delta_{12} = \{\gamma > \alpha_{12} \mid 当x \in N_\gamma \ominus N_{\alpha_{12}}且f \in N_\gamma^\perp时, 有\Phi(x \otimes f) = 0\},$$

$\beta_{12} = \inf\{\gamma \mid \gamma \in \Delta_{12}\}$. 则 $\beta_{12} \in \Delta_{12}$. 类似于第四步, 我们可证明存在有界算子序列 $\{A_{12}^{(n)}\}$, $\{C_{12}^{(n)}\} \subset \mathcal{B}(N_{\beta_{12}} \ominus N_{\beta_{11}}, K)$ 使得对满

足 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 的所有 $x, f\in N_{\beta_{12}}\ominus N_{\beta_{11}}$, 有

$$\Phi(x\otimes f)=\lim_{n\to\infty}A_{12}^{(n)}x\otimes C_{12}^{(n)}f,$$

且对任意的 $x\in N_{\beta_{12}}\ominus N_{\beta_{11}}$ 及 $f\in(N_{\beta_{12}})^{\perp}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=0$.

第六步 如果 $\beta_{12}=1$, 停止. 如果 $\beta_{12}<1$, 令

$$\Lambda_{13}=\{\gamma>\beta_{12}\mid 当x\in N_{\gamma}\ominus N_{\beta_{12}}时, 有\Phi(L_x^{\mathcal{N}})=0\}.$$

如果 $\Lambda_{13}=\emptyset$, 令 $\alpha_{13}=\beta_{12}$; 如果 $\Lambda_{13}\neq\emptyset$, 令 $\alpha_{13}=\sup\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma\in\Lambda_{13}\}$, 则 $\alpha_{13}\in\Lambda_{13}$. 如果 $\alpha_{13}=1$, 我们停止; 如果 $\alpha_{13}<1$, 令

$$\Delta_{13}=\{\gamma>\alpha_{13}\mid 当x\in N_{\gamma}\ominus N_{\alpha_{13}}及f\in N_{\gamma}^{\perp}时, 有\Phi(x\otimes f)=0\}$$

且令 $\beta_{13}=\inf\{\gamma\mid\gamma\in\Delta_{13}\}$, 则 $\beta_{13}\in\Delta_{13}$. 以这种方式继续, 我们得到序列

$$0=\beta_{10}\leq\alpha_{11}<\beta_{11}\leq\alpha_{12}<\beta_{12}\leq\cdots\leq\alpha_{1k}<\beta_{1k}\leq\alpha_{1(k+1)}<\cdots$$

和 $\{A_{1k}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}, \{C_{1k}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{B}(N_{\beta_{1k}}\ominus N_{\beta_{1(k-1)}}, K)$ 使得对每个 $(1,k)$ 及对满足 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 的所有 $x, f\in N_{\beta_{1k}}\ominus N_{\beta_{1(k-1)}}$, 有

$$\Phi(x\otimes f)=\lim_{n\to\infty}A_{1k}^{(n)}x\otimes C_{1k}^{(n)}f$$

且对任意的 $x\in N_{\beta_{1k}}\ominus N_{\beta_{1(k-1)}}$ 及 $f\in(N_{\beta_{1k}})^{\perp}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=0$.

第七步 如果对某个 m, $\beta_{1m}=1$, 则停止; 如果 $\beta_{1m}<1$ 但 $\alpha_{1(m+1)}=1$, 也停止, 且在 $N_{\alpha_{1(m+1)}}\ominus N_{\beta_{1m}}$ 上, 令 $A_{1(m+1)}^{(n)}=C_{1(m+1)}^{(n)}=0$. 否则, 我们得到两个无限序列 $\{\alpha_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{\beta_{1k}\}_{k=0}^{\infty}\subset\Gamma$. 令 $\beta_{20}=\sup_k\{\alpha_{1k}\}$. 如果 $\beta_{20}=1$, 停止; 如果 $\beta_{20}<1$, 再次重复 1—6 步, 得到序列

$$\beta_{20}\leq\alpha_{21}<\beta_{21}\leq\alpha_{22}<\beta_{22}\leq\cdots\leq\alpha_{2k}<\beta_{2k}\leq\alpha_{2(k+1)}<\cdots$$

和 $\{A_{2k}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{C_{2k}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\subset B(N_{\beta_{2k}}\ominus N_{\beta_{2(k-1)}}, K)$ 使得对每个 $(2,k)$ 及对满足 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 的所有 $x, f\in N_{\beta_{2k}}\ominus N_{\beta_{2(k-1)}}$, 有

$$\Phi(x\otimes f)=\lim_{n\to\infty}A_{2k}^{(n)}x\otimes C_{2k}^{(n)}f,$$

且对于 $x \in N_{\beta_{2k}} \ominus N_{\beta_{2(k-1)}}$, $f \in (N_{\beta_{2k}})^\perp$, 有 $\Phi(x \otimes f) = 0$.

第八步 继续上面 1—7 步的过程, 因为 H 可分, 因此最后我们得到可数多个序列 $\{\alpha_{ik}\}_{k=1}^\infty$ 和 $\{\beta_{ik}\}_{k=0}^\infty \subset \Gamma$ $(i = 1, \cdots, \sigma$, 其中 σ 是一可数序数), 使得

(1) $\beta_{i0} \le \alpha_{i1} < \beta_{i1} \le \alpha_{i2} < \cdots \le \alpha_{ik} < \beta_{ik} \le \alpha_{i(k+1)} < \cdots$;

(2) $\beta_{(i+1)0} = \sup_k \{\alpha_{ik}\}$, $i = 1, 2, \cdots, \sigma$;

(3) $\sup_{i,k}\{\alpha_{ik}\} = 1$;

且存在算子序列 $\{A_{ik}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$, $\{C_{ik}^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}(N_{\beta_{ik}} \ominus N_{\beta_{i(k-1)}}, K)$ 使得对每个指标 (i,k) 及对满足 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 的所有 x, $f \in N_{\beta_{ik}} \ominus N_{\beta_{i(k-1)}}$, 有

$$\Phi(x \otimes f) = \lim_{n \to \infty} A_{ik}^{(n)} x \otimes C_{ik}^{(n)} f,$$

且对任意的 $x \in N_{\beta_{ik}} \ominus N_{\beta_{i(k-1)}}$ 及 $f \in (N_{\beta_{ik}})^\perp$, 有 $\Phi(x \otimes f) = 0$.

令 $\Omega = \{(i,k) \mid i = 1, 2, \cdots, \sigma; k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$. 对 $(i,k), (j,l) \in \Omega$, 如果 $i < j$ 或者如果 $i = j$ 但 $k < l$, 定义 $(i,k) < (j,l)$. 令 $\Lambda = \{\lambda \mid \lambda$ 是 Ω 的有限子集 $\}$. 在 Λ 中引入序 " $>$ ": $\lambda_1 > \lambda$ 当且仅当 $\lambda_1 \supset \lambda$. 于是赋予序 " $>$ ", Λ 成为一定向集.

对于 $(i,k) \in \Omega$, 令 $H_{ik} = N_{\beta_{ik}} \ominus N_{\beta_{i(k-1)}}$. 那么 $H = \bigoplus_{(i,k)\in\Omega} H_{ik}$. 对任意的 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 令 $\gamma_x = \inf\{\gamma \mid x \in N_\gamma\}$. 那么 $x \in N_{\gamma_x}$, $f \in (N_{\gamma_x})_-^\perp$. 因为 $\gamma_x \in \Gamma$, 因此存在 $(i_0, k_0) \in \Omega$ 使得 $\beta_{i_0(k_0-1)} < \gamma_x \le \beta_{i_0k_0}$, 所以

$$x \in \bigoplus_{(i,k)\le(i_0,k_0)} H_{ik}, \qquad f \in \bigoplus_{(i_0,k_0)\le(i,k)} H_{ik}.$$

第九步 存在有界算子网 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{B}(H,K)$ 和 $\{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{B}(K,H)$ 使得在算子范数拓扑下, 对所有的 $F \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有

$$\Phi(F) = \lim_\lambda A_\lambda F B_\lambda.$$

对于 $\lambda \in \Lambda$, 令 $n_\lambda = \#\lambda$ (λ 中元的个数), $t_\lambda = \max_{(i,k)\in\lambda}\{\|A_{ik}^{(n_\lambda)}\|,$

$\|C_{ik}^{(n_\lambda)}\|\}$. 定义 A_λ 和 C_λ 如下：

$$A_\lambda x = \begin{cases} \exp(\alpha_{ik} n_\lambda t_\lambda) A_{ik}^{(n_\lambda)} x, & \text{如果} x \in H_{ik}\ ((i,k) \in \lambda), \\ 0, & \text{如果} x \in (\bigoplus_{(i,k)\in\lambda} H_{ik})^\perp, \end{cases}$$

$$C_\lambda f = \begin{cases} \exp(-\alpha_{ik} n_\lambda t_\lambda) C_{ik}^{(n_\lambda)} f, & \text{如果} f \in H_{ik}\ ((i,k) \in \lambda), \\ 0, & \text{如果} f \in (\bigoplus_{(i,k)\in\lambda} H_{ik})^\perp. \end{cases}$$

则 $A_\lambda, C_\lambda \in \mathcal{B}(H,K)$. 下证对任意的 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 都有

$$\Phi(x \otimes f) = \lim_\lambda A_\lambda x \otimes C_\lambda f.$$

情形 1 存在 $(i_0, k_0) \in \Omega$ 使得 $x, f \in H_{i_0k_0}$.

在这种情形下，我们有 $\Phi(x \otimes f) = \lim_{n\to\infty} A_{i_0k_0}^{(n)} x \otimes C_{i_0k_0}^{(n)} f$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取自然数 n_0 使得当 $n > n_0$ 时，有 $\|A_{i_0k_0}^{(n)} x \otimes C_{i_0k_0}^{(n)} f - \Phi(x \otimes f)\| < \varepsilon$. 取 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得 $(i_0, k_0) \in \lambda_0$ 且 $n_{\lambda_0} = n_0$. 则对任意的 $\lambda > \lambda_0$, 有 $n_\lambda > n_{\lambda_0} = n_0$ 且

$$\begin{aligned} &\|A_\lambda x \otimes C_\lambda f - \Phi(x \otimes f)\| \\ =& \|\exp(\alpha_{i_0k_0} n_\lambda t_\lambda) A_{i_0k_0}^{(n_\lambda)} x \otimes \exp(-\alpha_{i_0k_0} n_\lambda t_\lambda) C_{i_0k_0}^{(n_\lambda)} f - \Phi(x \otimes f)\| \\ =& \|A_{i_0k_0}^{(n_\lambda)} x \otimes C_{i_0k_0}^{(n_\lambda)} f - \Phi(x \otimes f)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

情形 2 如果 $x \in H_{ik}$, $f \in H_{jl}$ 满足 $(i, k) \neq (j, l)$, 那么 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 表明 $(i, k) < (j, l)$, 因此由第八步知 $\Phi(x \otimes f) = 0$. 故我们必须证明 $\lim_\lambda A_\lambda x \otimes C_\lambda f = 0$.

对任意的 $\lambda \in \Lambda$ 使得 $(i,k), (j,l) \in \lambda$, 因为

$$\begin{aligned} A_\lambda x \otimes C_\lambda f &= \exp(\alpha_{ik} n_\lambda t_\lambda) A_{ik}^{(n_\lambda)} x \otimes \exp(-\alpha_{jl} n_\lambda t_\lambda) C_{jl}^{(n_\lambda)} f \\ &= \exp(-(\alpha_{jl} - \alpha_{ik}) n_\lambda t_\lambda) A_{ik}^{(n_\lambda)} x \otimes C_{jl}^{(n_\lambda)} f, \end{aligned}$$

因此 $\|A_\lambda x \otimes C_\lambda f\| \le \|x\| \cdot \|f\| \cdot t_\lambda^2 \exp(-(\alpha_{jl} - \alpha_{ik}) n_\lambda t_\lambda)$. 注意到 $\alpha_{jl} - \alpha_{ik} > 0$, 所以 $\lim_\lambda t_\lambda^2 \exp(-(\alpha_{jl} - \alpha_{ik}) n_\lambda t_\lambda) = 0$, 从而 $\lim_\lambda A_\lambda x \otimes C_\lambda f = 0$.

情形 3 如果 $x=\bigoplus_{(i,k)\in\lambda_1}x_{ik}$, $f=\bigoplus_{(j,l)\in\lambda_2}f_{jl}$, 其中 λ_1, $\lambda_2\in\Lambda$, 那么 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 表明对所有的 $(i,k)\in\lambda_1$ 和 $(j,l)\in\lambda_2$, 有 $(i,k)\leq(j,l)$. 因此 $\lambda_1\cap\lambda_2=\emptyset$ 或 $\lambda_1\cap\lambda_2=\{(i_0,k_0)\}$, 其中 $(i_0,k_0)=\max\{(i,k)\mid(i,k)\in\lambda_1\}$. 如果 $\lambda_1\cap\lambda_2=\{(i_0,k_0)\}$, 那么

$$x\otimes f=x_{i_0k_0}\otimes f_{i_0k_0}+\sum_{(i,k)\in\lambda_1,(j,l)\in\lambda_2,(i,k)\neq(j,l)}x_{ik}\otimes f_{jl}.$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_\lambda A_\lambda x\otimes C_\lambda f=&\lim_\lambda A_\lambda x_{i_0k_0}\otimes C_\lambda f_{i_0k_0}\\&+\sum_{(i,k)\in\lambda_1,(j,l)\in\lambda_2,(i,k)\neq(j,l)}\lim_\lambda A_\lambda x_{ik}\otimes C_\lambda f_{jl}.\end{aligned}$$

由情形 1 和 2, 容易验证

$$\lim_\lambda A_\lambda x\otimes C_\lambda f=\lim_\lambda A_\lambda x_{i_0k_0}\otimes C_\lambda f_{i_0k_0}=\Phi(x_{i_0k_0}\otimes f_{i_0k_0})=\Phi(x\otimes f).$$

如果 $\lambda_1\cap\lambda_2=\emptyset$, 相似可证 $\lim_\lambda A_\lambda x\otimes C_\lambda f=\Phi(x\otimes f)=0$.

情形 4 一般地, 设 $x,f\in H$ 使得 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 则 $x\in(\bigoplus_{(i,k)\leq(i_0,k_0)}H_{ik})$, $f\in(\bigoplus_{(i_0,k_0)\leq(i,k)}H_{ik})$. 记 $x=\bigoplus_{(i,k)\leq(i_0,k_0)}x_{ik}$, $f=\bigoplus_{(i_0,k_0)\leq(j,l)}f_{jl}$. 任给正数 $\varepsilon(<\|\Phi\|)$, 存在 λ_1, $\lambda_2\in\Lambda$ (可要求 $(i_0,k_0)\in\lambda_1\cap\lambda_2$) 使得 $\|x-x_{\lambda_1}\|<\dfrac{\varepsilon}{3\|\Phi\|(\|x\|+\|f\|)}$, $\|f-f_{\lambda_2}\|<\dfrac{\varepsilon}{3\parallel\Phi\parallel(\parallel x\parallel+\parallel f\parallel)}$, 其中 $x_{\lambda_1}=\bigoplus_{(i,k)\in\lambda_1}x_{ik}$, $f_{\lambda_2}=\bigoplus_{(j,l)\in\lambda_2}f_{jl}$. 因此

$$\|\Phi(x\otimes f)-\Phi(x_{\lambda_1}\otimes f_{\lambda_2})\|<\|\Phi\|(\|x\|+\|f\|)\frac{\varepsilon}{3\|\Phi\|(\|x\|+\|f\|)}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

由情形 3, 存在 $\lambda'\ (>\lambda_1\cup\lambda_2)$ 使得当 $\lambda>\lambda'$ 时, 有

$$\|A_\lambda x_{\lambda_1}\otimes C_\lambda f_{\lambda_2}-\Phi(x_{\lambda_1}\otimes f_{\lambda_2})\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

对任意的 $\lambda\in\Lambda$ 使得 $\lambda>\lambda_1\cup\lambda_2$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|A_\lambda(x_{\lambda_1}-x)\otimes C_\lambda f_{\lambda_2}\|\\
&=\left\|\sum_{(i,k)\in\lambda\backslash\lambda_1}\sum_{(j,l)\in\lambda_2}A_\lambda x_{ik}\otimes C_\lambda f_{jl}\right\|\\
&=\left\|\sum_{(i,k)\in\lambda\backslash\lambda_1}\sum_{(j,l)\in\lambda_2}\exp(-(\alpha_{jl}-\alpha_{ik})n_\lambda t_\lambda)A_{ik}^{(n_\lambda)}x_{ik}\otimes C_{jl}^{(n_\lambda)}f_{jl}\right\|\\
&\le\sum_{(i,k)\in\lambda\backslash\lambda_1}\sum_{(j,l)\in\lambda_2}\exp(-(\alpha_{jl}-\alpha_{ik})n_\lambda t_\lambda)\cdot t_\lambda^2\|x_{ik}\|\cdot\|f_{jl}\|\\
&<\frac{\varepsilon}{3\|\Phi\|(\|x\|+\|f\|)}\|f\|t_\lambda^2\exp(-\delta n_\lambda t_\lambda)\cdot\sum_{(i,k)\in\lambda\backslash\lambda_1}\sum_{(j,l)\in\lambda_2}1\\
&\le\frac{\varepsilon}{3\|\Phi\|(\|x\|+\|f\|)}\|f\|t_\lambda^2n_\lambda^2\exp(-\delta n_\lambda t_\lambda),
\end{aligned}$$

其中 $0<\delta=\alpha_{i_0k_0}-\alpha_{i_0(k_0-1)}\le\min\{(\alpha_{jl}-\alpha_{ik})\mid(i,k)\in\lambda\backslash\lambda_1$ 且 $(j,l)\in\lambda_2\}$. 因为 $\lim_\lambda t_\lambda^2n_\lambda^2\exp(-\delta n_\lambda t_\lambda)=0$, 因此存在 $\lambda''>\lambda_1\cup\lambda_2$ 使得当 $\lambda>\lambda''$ 时, $t_\lambda^2n_\lambda^2\exp(-\delta n_\lambda t_\lambda)<\varepsilon$. 所以当 $\lambda>\lambda''$ 时, 有 $\|A_\lambda(x_{\lambda_1}-x)\otimes C_\lambda f_{\lambda_2}\|<\dfrac{\|f\|\varepsilon^2}{3\|\Phi\|(\|x\|+\|f\|)}$.

对于 $\lambda>\lambda_1\cup\lambda_2$, 有

$$\begin{aligned}
&\|A_\lambda x\otimes C_\lambda(f_{\lambda_2}-f)\|\\
&=\left\|-\sum_{(i,k)\in\lambda}\sum_{(j,l)\in\lambda\backslash\lambda_2}A_\lambda x_{ik}\otimes C_\lambda f_{jl}\right\|\\
&=\left\|-\sum_{(i,k)\in\lambda}\sum_{(j,l)\in\lambda\backslash\lambda_2}\exp(-(\alpha_{jl}-\alpha_{ik})n_\lambda t_\lambda)A_{ik}^{(n_\lambda)}x_{ik}\otimes C_{jl}^{(n_\lambda)}f_{jl}\right\|\\
&<\sum_{(i,k)\in\lambda}\sum_{(j,l)\in\lambda\backslash\lambda_2}\exp(-(\alpha_{jl}-\alpha_{ik})n_\lambda t_\lambda)\cdot t_\lambda^2\|x\|\frac{\varepsilon}{3\|\Phi\|(\|x\|+\|f\|)}\\
&\le\frac{\varepsilon}{3\|\Phi\|(\|x\|+\|f\|)}\|x\|t_\lambda^2n_\lambda^2\exp(-\delta_1n_\lambda t_\lambda),
\end{aligned}$$

其中 $0<\delta_1=\alpha_{i_0(k_0+1)}-\alpha_{i_0k_0}=\min\{\alpha_{jl}-\alpha_{ik}\mid(i,k)\in\lambda$ 且 $(j,l)\in\lambda\backslash\lambda_2\}$. 因为 $\lim_\lambda t_\lambda^2n_\lambda^2\exp(-\delta_1n_\lambda t_\lambda)=0$, 因此存在 $\lambda^{'''}\supset\lambda_1\cup\lambda_2$ 使得当 $\lambda>\lambda^{'''}$ 时, 有 $t_\lambda^2n_\lambda^2\exp(-\delta_1n_\lambda t_\lambda)<\varepsilon$. 所以当 $\lambda>\lambda^{'''}$ 时, 有 $\|A_\lambda x\otimes C_\lambda(f_{\lambda_2}-f)\|<\dfrac{\|x\|\varepsilon^2}{3\|\Phi\|(\|x\|+\|f\|)}$, 从而当 $\lambda>\lambda^{''}\cup\lambda^{'''}$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&\|A_\lambda x_{\lambda_1}\otimes C_\lambda f_{\lambda_2}-A_\lambda x\otimes C_\lambda f\|\\
\le&\|A_\lambda(x_{\lambda_1}-x)\otimes C_\lambda f_{\lambda_2}\|+\|A_\lambda x\otimes C_\lambda(f_{\lambda_2}-f)\|\\
\le&\frac{\varepsilon}{3\|\Phi\|(\|x\|+\|f\|)}\|x\|\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3\|\Phi\|(\|x\|+\|f\|)}\|f\|\varepsilon\\
<&\frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

令 $\lambda_0=\lambda^{'}\cup\lambda^{''}\cup\lambda^{'''}$, 则对任意的 $\lambda>\lambda_0$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi(x\otimes f)-A_\lambda x\otimes C_\lambda f\|\\
&\le\|\Phi(x\otimes f)-\Phi(x_{\lambda_1}\otimes f_{\lambda_2})\|+\|A_\lambda x_{\lambda_1}\otimes C_\lambda f_{\lambda_2}-\Phi(x_{\lambda_1}\otimes f_{\lambda_2})\|\\
&\quad+\|A_\lambda x_{\lambda_1}\otimes C_\lambda f_{\lambda_2}-A_\lambda x\otimes C_\lambda f\|<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

故对每个 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=\lim_\lambda A_\lambda x\otimes C_\lambda f$.

令 $B_\lambda=C_\lambda^*$, 则对每个 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=\lim_\lambda A_\lambda(x\otimes f)B_\lambda$. 因为 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 中的每个有限秩算子都可表示为 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 中有限个秩一算子的和且 Φ 是线性的, 因此对所有的 $F\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(F)=\lim_\lambda A_\lambda FB_\lambda$. 证毕.

现在我们刻画 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 和 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 上完全秩不增的线性映射, 从而对于这两种情形肯定地回答了问题 2.2.2.

定理 7.3.11 设 $\mathcal{N}$ 是可分 Hilbert 空间 H 上的套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathcal{B}(K)$ 是有界线性映射且 k 是正整数, 则下列性质等价.

(1) Φ 完全秩不增.

(2) Φ 完全秩 k 不增.

(3) Φ 完全秩 1 不增.

(4) Φ_{k+1} 秩 k 不增.

(5) Φ_2 秩 1 不增.

(6) 存在算子网 $\{A_\lambda\} \subset \mathcal{B}(H,K)$ 和 $\{B_\lambda\} \subset \mathcal{B}(K,H)$ 使得对任意的 $F \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$,

$$\Phi(F) = \lim_\lambda A_\lambda F B_\lambda.$$

证明 由定理 7.3.10 及类似于定理 7.3.2 的证明立得. 证毕.

定理 7.3.12 设 $\mathcal{N}$ 是可分 Hilbert 空间 H 上的套. 令 Φ : $\mathrm{Alg}\mathcal{N} \to \mathcal{B}(K)$ 是有界线性映射且 k 是正整数, 则下列性质等价.

(1) Φ 完全秩不增.

(2) Φ 完全秩 k 不增.

(3) Φ 完全秩 1 不增.

(4) Φ_{k+1} 秩 k 不增.

(5) Φ_2 秩 1 不增.

(6) 存在算子网 $\{A_\lambda\} \subset \mathcal{B}(H,K)$ 和 $\{B_\lambda\} \subset \mathcal{B}(K,H)$ 使得对任意的 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $\Phi(T) = \text{s-}\lim_\lambda A_\lambda T B_\lambda$, 其中 s-lim 代表强算子拓扑极限.

进而, 如果 Φ 保单位元, 那么

(7) 存在可逆算子网 $\{C_\lambda\} \subset \mathcal{B}(H,K)$ 使得对任意的 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $\Phi(T) = \lim_\lambda C_\lambda T C_\lambda^{-1}$ (SOT 或 WOT).

证明 由定理 7.3.11 及类似于定理 7.3.3 的证明立得. 证毕.

设 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 是作用在 Hilbert 空间上的有界线性 (或共轭线性) 算子序列, 如果对每个 n, $\ker A_n \supset \ker A_{n+1}$ 且 $A_{n+1}|_{(\ker A_n)^\perp} = A_n|_{(\ker A_n)^\perp}$, 称 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 是递增的, 那么定理 7.1.4 在 Hilbert 空间的情形也可陈述如下.

定理 7.1.4′ 设 $\Phi : \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathcal{B}(K)$ 是保秩一性的有界线性映射, 则下列断言之一成立:

(1) 存在递增算子序列 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{C_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{B}(H,K)$ 使得对任意的 $M, N \in \mathcal{N}$ 及任意的 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 存在 n_T, 当 $n \geq n_T$ 时, 有 $A_n|_M$, $C_n|_{N^\perp}$ 是单射且 $\Phi(T) = A_n T C_n^*$.

(2) 存在从 H 到 K 的有界共轭线性递增算子序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得对任意的 $M, N \in \mathcal{N}$ 及任意的 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 存在 n_T, 当 $n \geq n_T$ 时, 有 $A_n|_{M_-^{\perp}}$ 和 $C_n|_N$ 是单射且 $\Phi(T) = A_n T^* C_n^*$.

(3) 存在满足在每个秩一算子上非零的有界共轭线性映射 $\lambda(\cdot)$: $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to K$ 且存在向量 $y_0 \in K$ 使得对每个 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = y_0 \otimes \lambda(T)$.

(4) 存在满足在每个秩一算子上非零的有界线性映射 $\delta(\cdot)$: $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to K$ 且存在向量 $g_0 \in K$ 使得对每个 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = \delta(T) \otimes g_0$.

证明 由定理 7.1.4, 我们只需验证 (1) 和 (2) 即可. 因为 H 可分, 因此 $\mathcal{N}$ 序同构于闭子集 $\Gamma \subset [0,1]$, 我们总假定 $0, 1 \in \Gamma$ (参考 [64]). 所以 $\mathcal{N} = \{N_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$, 其中 $N_0 = 0$ 且 $N_1 = H$.

假定引理 7.1.2 中的 (1) 成立. 分别取 Γ 中的递增序列 $\{\delta_n\}$ 和递减序列 $\{\gamma_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 1$ 且 $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, 且对任意的 $n, m \in \mathbb{N}$, 令 $\gamma_n < \delta_m$ (如果 $H_- \neq H$, 取 $\delta_n \equiv 1$; 如果 $0_+ \neq 0$, 取 $\gamma_n \equiv 0$). 对每个 n, 定义 A_n 和 C_n 如下:

$$A_n x = \begin{cases} Ax, & \text{如果} x \in N_{\delta_n}, \\ 0, & \text{如果} x \in N_{\delta_n}^{\perp}; \end{cases} \qquad C_n f = \begin{cases} Cf, & \text{如果} f \in (N_{\gamma_n})_-^{\perp}, \\ 0, & \text{如果} f \in N_{\gamma_n}. \end{cases}$$

则 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(H,K)$ 是递增序列. 对任意的 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 存在 $\gamma \in \Gamma$ 使得 $x \in N_\gamma$ 且 $f \in (N_\gamma)_-^{\perp}$. 因为对每个 n 使得 $\gamma_n \leq \gamma \leq \delta_n$, 有 $x \in N_{\delta_n}$, $f \in (N_{\gamma_n})_-^{\perp}$, 因此 $\Phi(x \otimes f) = A_n x \otimes C_n f$. 所以对任意的 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 存在 n_T 使得当 $n \geq n_T$ 时, 有 $\Phi(T) = A_n T C_n^*$. 故 (1) 成立.

如果引理 7.1.2 的 (2) 成立, 相似地, 可证明定理中的 (2) 成立. 证毕.

对于完全保秩线性映射, 我们有

推论 7.3.13 设 $\mathcal{N}$ 是可分 Hilbert 空间 H 上的套. 令 Φ : $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathcal{B}(K)$ 是有界线性映射且 k 是正整数, 则下列性质等价.

(1) Φ 完全保秩.

(2) Φ 完全保秩 k.

(3) Φ 完全保秩 1.

(4) Φ_{k+1} 保秩 k.

(5) Φ_2 保秩 1.

(6) 存在递增算子序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(H,K)$ 使得对任意的 $M, N \in \mathcal{N}$ 及每个 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 存在 n_T, 当 $n \geq n_T$ 时, 有 $A_n|_M$ 和 $C_n|_{N_-^{\perp}}$ 是单射且 $\Phi(T) = A_nTC_n^*$.

证明 显然 (6)⇒(1)⇒(3)⇒(5) 和 (1)⇒(2)⇒(4). 应用定理 7.3.11, 类似于定理 7.3.4 的证明知 (4)⇒(5) 成立. 所以我们只需证明 (5)⇒(6).

设 Φ_2 保秩一, 则 Φ 保秩一. 因此在定理 7.3.10 的证明中, $\alpha_{11} = 0$, $\beta_{11} = 1$, 且存在线性算子 W 和 V 使得对任意秩一算子 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x \otimes f) = Wx \otimes Vf \neq 0$, 这样 W 和 V 是单射. 由定理 7.1.4′ 知, 存在递增算子序列 $\{A_n\}$,$\{C_n\} \subseteq \mathcal{B}(H,K)$ 使得对任意的 M, $N \in \mathcal{N}$ 及任意的 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 存在 n_T, 当 $n \geq n_T$ 时, 有 $A_n|_M$ 和 $C_n|_{N_-^{\perp}}$ 是单射且 $\Phi(T) = A_nTC_n^*$, 所以 (6) 成立. 证毕.

推论 7.3.14 设 $\mathcal{N}$ 是可分 Hilbert 空间 H 上的套, 且与 $\mathcal{N}^{\perp}$ 不相似. 令 $\Phi : \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是有界线性满射, 则 Φ 完全保秩当且仅当 Φ 保秩一.

证明 由定理 7.1.7 及推论 7.3.13 立得. 证毕.

§7.4 保幂等性的线性映射

设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的线性子空间且 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ 是线性映射. 对于 $T \in \mathcal{A}$, 如果 $T^2 = T$ 蕴涵 $\Phi(T)^2 = \Phi(T)$, 称 Φ 保幂等性; 如果 $\mathrm{rank}(T) = 1$ 且 $T^2 = T$ 蕴涵 $\mathrm{rank}(\Phi(T)) = 1$ 且 $\Phi(T)^2 = \Phi(T)$, 称 Φ 保秩一幂等性.

设 H 是数域 $\mathbb{F}$ $(= \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 空间且 $\mathcal{N}$ 是 H 上的套. 如果 $N \in \mathcal{N}$ 满足 $N \ominus N_- \neq 0$, 称 $N \ominus N_-$ 是 $\mathcal{N}$ 的原子; 如果

H 由 $\mathcal{N}$ 的原子张成，称 $\mathcal{N}$ 是原子套；如果 $\mathcal{N}$ 不含任何原子，称 $\mathcal{N}$ 是连续套. 显然如果 $\mathcal{N}$ 是连续套，那么 $\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 中的每个有限秩算子都是幂零的，故 $\text{Alg}\mathcal{N}$ 的有限秩算子理想 $\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 不包含任何非零幂等元.

本节刻画套代数上保幂等性的线性映射. 首先刻画 Hilbert 空间 H 上的上三角算子矩阵代数上保秩一幂等性的线性映射. 令 $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$, $N_j = H_1 \oplus \cdots \oplus H_j$ $(j = 1, \cdots n)$. 则 $\mathcal{N} = \{\{0\}, N_1, \cdots, N_n = H\}$ 是 H 上的一个有限套，且 $\text{Alg}\mathcal{N}$ 是关于分解 $H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ 的上三角算子矩阵代数. H 上的每个算子都可表示为关于此分解的算子矩阵. 为确定起见，我们称之为关于有限套 $\mathcal{N}$ 的算子矩阵.

定理 7.4.1 设 $\mathcal{N} = \{\{0\}, N_1, \cdots, N_n = H\}$ 是 H 上的有限套. 令 $\Phi : \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是有界线性双射，则 Φ 保秩一幂等性当且仅当下列性质之一成立:

(1) 存在可逆算子 $A \in \text{GL}(\text{Alg}\mathcal{N})$ 和关于 $\mathcal{N}$ 的严格上三角算子矩阵 R 使得对每个 $F \in \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(F) = AF(A^{-1} + R)$.

(2) 存在满足 $A(N_i^{\perp}) = N_{n-i}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 的 H 上的有界可逆共轭线性算子 A 和关于 $\mathcal{N}$ 的严格右下三角算子矩阵 R 使得对每个 $F \in \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(F) = AF^*(A^{-1} + R)$.

证明 显然只需证必要性. 首先证明 Φ 保秩一性. 令 F 是秩一算子. 如果 F 是秩一幂等元的倍数，那么结论成立. 现在设 F 是秩一幂零算子. 记 $F = x \otimes f$, 那么 $\langle x, f\rangle = 0$. 令 $i = \min\{j \mid x \in N_j\ (j = 1, \cdots, n)\}$. 则 $x \in N_i$, $f \in N_{i-1}^{\perp}$ 且 $x_1 = P_{H_i}x \neq 0$. 因 $x = x_1 \oplus x_2$, 故 $\langle x, x_1\rangle = \langle x_1, x_1\rangle \neq 0$ 且对任意的 $\varepsilon > 0$, $T_\varepsilon = x \otimes (\varepsilon x_1 + f) \in \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 由于 Φ 连续，且当 $\varepsilon \to 0$ 时，有 $T_\varepsilon \to x \otimes f$, 于是 $\Phi(x \otimes f)$ 是秩一算子的极限. 所以 $\text{rank}(\Phi(x \otimes f)) \leq 1$. 现在 Φ 的单射性表明 $\text{rank}(\Phi(x \otimes f)) = 1$.

于是 Φ 满足定理 7.1.11 的条件. 假定 Φ 具有定理 7.1.11 中的形式 (1), 即对每个 $F \in \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(F) = AFC$, 其中 $A, C \in \text{GL}(\text{Alg}\mathcal{N})$. 下证对每个 $x \otimes f \in \text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\langle Ax, C^*f\rangle = \langle x, f\rangle$.

如果 $\langle x, f\rangle = \alpha \neq 0$, 因为 Φ 是保秩一幂等性的线性映射, 因此 $\langle Ax, C^*f\rangle = \langle x, f\rangle$. 假定 $\langle x, f\rangle = 0$, 令 $i = \min\{j \mid x \in N_j\ (j = 1, \cdots, n)\}$. 取 $x_i \in H_i = N_i \ominus N_{i-1}$ 使得 $\langle x, x_i\rangle \neq 0$, 那么 $x \otimes x_i$, $x \otimes (x_i + f) \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 且 $\langle x, x_i + f\rangle = \langle x, x_i\rangle \neq 0$, 所以

$$\begin{aligned}\langle Ax, C^*f\rangle &= \langle Ax, C^*(x_i + f)\rangle - \langle Ax, C^*x_i\rangle \\ &= \langle x, x_i + f\rangle - \langle x, x_i\rangle = \langle x, f\rangle = 0.\end{aligned}$$

下证 $C = A^{-1} + R$, 其中 $R \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是关于 $\mathcal{N}$ 的严格上三角算子矩阵. 令 $CA = (W_{ij})_{i,j=1}^n$, 则当 $i > j$ 时, 有 $W_{ij} = 0$. 对任意的 $x, f \in H_i\ (i = 1, \cdots, n)$, 因为 $\langle CAx, f\rangle = \langle x, f\rangle$, 因此 $W_{ii} = I|_{H_i}$, 所以 $W = V + I$, 其中 I 代表 H 上的恒等算子且 $V \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是关于 $\mathcal{N}$ 的严格上三角算子矩阵. 由于 A 可逆, 于是 $C = (I + V)A^{-1} = A^{-1} + VA^{-1}$. 令 $R = VA^{-1}$, 那么 R 是关于 $\mathcal{N}$ 的严格上三角算子矩阵.

如果定理 7.1.11 的情形 (2) 发生, 相似地可证明定理中的陈述 (2) 成立. 证毕.

引理 7.4.2 设 $\mathcal{N} = \{\{0\}, N_1, \cdots, N_n = H\}$ 是 H 上的有限套. 令 $\Phi: \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是 Jordan 同构, 那么 Φ 保秩一幂等性.

证明 显然 Φ 双边保幂等性. 设 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是秩一幂等元, 则 $\Phi(x \otimes f) = P \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是非零幂等元. 如果 $\mathrm{rank}(P) = n > 1$, 那么存在 $y_i \otimes g_i \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\ (i = 1, \cdots, n)$ 使得 $P = \sum_{i=1}^n y_i \otimes g_i$, 其中 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{g_i\}_{i=1}^n$ 是两个线性无关的集合. 因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n y_i \otimes g_i = \left(\sum_{i=1}^n y_i \otimes g_i\right)^2 &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle y_j, g_i\rangle (y_i \otimes g_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle y_i, g_i\rangle (y_i \otimes g_i) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \langle y_j, g_i\rangle (y_i \otimes g_j),\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{i=1}^n y_i \otimes \left[(1 - \overline{\langle y_i, g_i\rangle}) g_i - \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \overline{\langle y_j, g_i\rangle} g_j\right] = 0.$$

从而

$$(1-\overline{\langle y_i,g_i\rangle})g_i-\sum_{1\le j\le n,j\ne i}\overline{\langle y_j,g_i\rangle}g_j=0.$$

所以 $\langle y_i,g_i\rangle=1$ 且 $\langle y_j,g_i\rangle=0$ $(i\ne j)$, 即 $y_i\otimes g_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 是 n 个相互正交的幂等元. 对于 $i=1,\cdots,n$, 令 $P_i=\Phi^{-1}(y_i\otimes g_i)$. 因 Φ^{-1} 保幂等性, 因此 $x\otimes f=\sum_{i=1}^{n}P_i$ 且 P_i $(i=1,\cdots,n)$ 是两两正交的幂等元, 故 $\mathrm{rank}(x\otimes f)\ge\sum_{i=1}^{n}\mathrm{rank}(P_i)=n>1$, 矛盾. 证毕.

定理 7.4.3 设 $\mathcal{N}=\{\{0\},N_1,\cdots,N_n=H\}$ 是 H 上的有限套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是有界 Jordan 同构, 则下列断言之一成立:

(1) 存在可逆算子 $A\in\mathrm{GL}(\mathrm{Alg}\mathcal{N})$ 使得对所有的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$.

(2) 存在满足 $A(N_i^{\perp})=N_{n-i}$ $(i=1,\cdots,n)$ 的 H 上的有界可逆共轭线性算子 A 使得对所有的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$.

证明 充分性是显然的, 下证必要性. 假定 Φ 是 Jordan 同构. 由引理 7.4.2 知, Φ 保秩一幂等性. 所以 Φ 具有定理 7.4.1 中的形式. 设 Φ 取形式 (1), 即对每个 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(T)=AT(A^{-1}+R)$. 因为 Φ 是 Jordan 同构且 A 和 $(A^{-1}+R)^*$ 是单射, 所以对所有的 T, 有 $TRAT=0$. 特别地, 当 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 时, 有 $\langle RAx,f\rangle=0$. 对任意的 x, $f\in H$, 令 N_{i_1} 是 $\{N_i\mid 1\le i\le n\}$ 中包含 x 的最小元, N_{i_2} 是正交补包含 f 的 $\{N_i\mid 1\le i\le n\}$ 中的最大元. 如果 $x\otimes f\notin\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 那么 N_{i_2+1} 是 N_{i_1} 的真子空间. 取 $y\in N_{i_2+1}$ 及 $g\in N_{i_1-1}^{\perp}$, 那么 $x\otimes g$, $y\otimes f$, $y\otimes g\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 所以

$$\begin{aligned}0&=(x\otimes g+y\otimes f)RA(x\otimes g+y\otimes f)\\&=\langle RAx,g\rangle x\otimes g+\langle RAy,g\rangle x\otimes f+\langle RAx,f\rangle y\otimes g+\langle RAy,f\rangle y\otimes f\\&=\langle RAx,f\rangle y\otimes g,\end{aligned}$$

从而 $\langle RAx, f\rangle = 0$, 故 $R = 0$.

如果 Φ 取定理 7.4.1 中的形式 (2), 相似于上面的讨论, 我们可证明定理中的陈述 (2) 将成立. 证毕.

定理 7.4.4 设 $\mathcal{A}$ 是数域 $\mathbb{F}$ $(= \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R})$ 上的任一代数且设 $\mathcal{N} = \{\{0\}, N_1, \cdots, N_n = H\}$ 是 H 上的有限套. 令 $\Phi: \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathcal{A}$ 是线性映射, 则 Φ 是 Jordan 同态当且仅当 Φ 保幂等性.

证明 显然只需证充分性. 假设 Φ 保幂等性, 我们将证明对所有的 $x\otimes f, y\otimes g \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有

$$\begin{aligned}&\Phi[(x\otimes f)(y\otimes g)+(y\otimes g)(x\otimes f)]\\=&\Phi(x\otimes f)\Phi(y\otimes g)+\Phi(y\otimes g)\Phi(x\otimes f).\end{aligned} \tag{7.4.1}$$

因为 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 中的每个元都可表示为 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 中秩一元的和并且 Φ 是线性的, 因此对任意的 $A, B \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 我们有

$$\Phi(AB+BA) = \Phi(A)\Phi(B) + \Phi(B)\Phi(A),$$

即 Φ 是 Jordan 同态.

对任意的 $x\otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 存在 N_s 使得 $x \in N_s$, $f \in N_{s-1}^{\perp}$. 因为 $N_s = \bigoplus_{j=1}^{s} H_j$, 因此 x 和 f 可以写为 $x = \bigoplus_{1\le i\le s} x_i$, $f = \bigoplus_{s\le j\le n} f_j$, 其中 $x_i \in H_i$, $f_j \in H_j$, 所以 $x\otimes f = \sum\limits_{i\le s}\sum\limits_{j\ge s} x_i\otimes f_j$. 对于 $y\otimes g \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 存在 t 使得 $y\otimes g = \sum\limits_{k\le t}\sum\limits_{l\ge t} y_k\otimes g_l$, 这样

$$\begin{aligned}&(x\otimes f)(y\otimes g)+(y\otimes g)(x\otimes f)\\=&\sum_{i\le s}\sum_{j\ge s}\sum_{k\le t}\sum_{l\ge t}[(x_i\otimes f_j)(y_k\otimes g_l)+(y_k\otimes g_l)(x_i\otimes f_j)].\end{aligned}$$

故只需证明, 对于 $x\in H_i$, $f\in H_j$, $y\in H_k$ 和 $g\in H_l$ $(1\le i,j,k,l\le n)$, (7.4.1) 式成立即可.

情形 1 $H_i = H_j = H_k = H_l$. 令

$$\mathcal{A}_{H_i} = P_{H_i}\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}P_{H_i} = \{T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \mid P_{H_i}TP_{H_i} = T\} \subset \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}.$$

则 $\Phi|_{\mathcal{A}_{H_i}}: \mathcal{A}_{H_i} \to \mathcal{A}$ 保幂等性. 因为 $\mathcal{A}_{H_i}$ 同构于 $\mathcal{F}(H_i)$, 因此由 [28; 定理 3.2] 知, $\Phi|_{\mathcal{A}_{H_i}}$ 是 Jordan 同态. 所以对任意的 $x, y, f, g \in H_i$, (7.4.1) 式成立.

以后，我们总假定 H_i, H_j, H_k 和 H_l 不全相同. 于是 x, y, f, g 中至少有两个是正交的. 对于两个向量，例如 x 和 y, 如果它们不正交但线性无关，则存在 $\alpha \in \mathbb{F}$ 使得 $y = \alpha x + y_1$, 其中 $\langle x, y_1 \rangle = 0$; 如果它们线性相关，不失一般性，可要求它们相等. 所以问题简化到下面的情形，即这些向量中的任意两个要么正交要么相等. 进而还可假定它们均为单位向量. 再由对称性，我们只需考虑下面的几种情形.

情形 2 $x = y$ 且 $\langle x, g \rangle = 0$. 因为 $x \otimes x$ 是幂等元，因此

$$\Phi(x \otimes x)^2 = \Phi(x \otimes x). \tag{7.4.2}$$

1° $f = g$. 对任意的 $\alpha \in \mathbb{F}$, 由于 $x \otimes x + \alpha x \otimes g$ 是幂等元，所以

$$\Phi(x \otimes x + \alpha x \otimes g)^2 = \Phi(x \otimes x + \alpha x \otimes g), \tag{7.4.3}$$

(7.4.3) 式与 (7.4.2) 式及 $\alpha \in \mathbb{F}$ 的任意性一起蕴涵 (7.4.1) 式成立，即

$$\Phi(x \otimes f)^2 = 0. \tag{7.4.4}$$

2° $x = f$. 由 (7.4.3) 式知，

$$\begin{aligned} &\Phi[(x \otimes x)(x \otimes g) + (x \otimes g)(x \otimes x)] \\ =\ &\Phi(x \otimes x)\Phi(x \otimes g) + \Phi(x \otimes g)\Phi(x \otimes x), \end{aligned} \tag{7.4.5}$$

所以在这种特殊情形下， (7.4.1) 式成立.

3° $\langle x, f \rangle = 0$. 因为 $x \otimes x + x \otimes f + x \otimes g$ 是幂等元，因此 $\Phi(x \otimes x + x \otimes f + x \otimes g)^2 = \Phi(x \otimes x + x \otimes f + x \otimes g)$. 现在由 (7.4.2) 式、 (7.4.4) 式和 (7.4.5) 式，容易验证 (7.4.1) 式成立.

情形 3 $x = f$ 且 $\langle x, y \rangle = 0$.

1° 如果 $y = g$, 那么 $x \otimes x$ 和 $y \otimes y$ 是正交幂等元. 因为 Φ 保幂等性，因此 $\Phi(x \otimes x)$ 和 $\Phi(y \otimes y)$ 也是正交幂等元，现在显然有 (7.4.1) 式成立.

2° 如果 $\langle y,g\rangle=0$, 那么 $x\otimes x+y\otimes y+y\otimes g$ 是幂等元. 利用 (7.4.2) 式, (7.4.4) 式, (7.4.5) 式和情形 3 的 1°, 且考虑等式

$$\Phi(x\otimes x+y\otimes y+y\otimes g)^2=\Phi(x\otimes x+y\otimes y+y\otimes g),$$

可得 (7.4.1) 式.

情形 4 $x=g$. 显然 $\langle y,f\rangle=0$. 在这种情形下, 我们只需考虑 $\langle x,f\rangle=0$ 及 $\langle y,x\rangle=0$. 因为 $x\otimes x+x\otimes f+y\otimes x+y\otimes f$ 是幂等元, 使用 (7.4.3) 式、(7.4.4) 式和情形 2 的对称情形, 且考虑等式

$$\begin{aligned}&\Phi(x\otimes x+x\otimes f+y\otimes x+y\otimes f)^2\\=&\Phi(x\otimes x+x\otimes f+y\otimes x+y\otimes f),\end{aligned}$$

可得 (7.4.1) 式.

情形 5 向量 x,y,f 和 g 两两正交. 因为 $x\otimes x+y\otimes y+x\otimes f+y\otimes g$ 是幂等元, 使用 (7.4.2) 式、(7.4.4) 式、(7.4.5) 式、情形 3 和情形 3 的对称情形, 可验证 (7.4.1) 式成立. 证毕.

定理 7.4.5 设 $\mathcal{N}=\{\{0\},N_1,\cdots,N_n=H\}$ 是 H 上的有限套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\rightarrow\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是有界线性映射, 则下列性质等价.

(1) Φ 是保幂等的双射.

(2) Φ 是 Jordan 同构.

(3) Φ 是自同构或反自同构.

(4) 要么 (i) 存在可逆算子 $A\in\mathrm{GL}(\mathrm{Alg}\mathcal{N})$ 使得对所有的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$; 要么 (ii) 存在满足 $A(N_i^{\perp})=N_{n-i}$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 的 H 上的有界可逆共轭线性算子 A 使得对所有的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$.

证明 由定理 7.4.3 和 7.4.4 立得. 证毕.

为得到 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 上类似于上面的结论, 我们需要 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 中秩一幂等元的刻画.

引理 7.4.6 设 $\mathcal{N}=\{\{0\},N_1,\cdots,N_n=H\}$ 是 H 上的有限套. 令 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是幂等元, 则下列断言成立.

(1) T 具有秩 1 当且仅当对任意的 $S \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $STS=0$ 蕴涵 $ST=0$ 或 $TS=0$.

(2) T 的秩大于 1 当且仅当存在秩一算子 $S \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 使得 $STS=0$ 但 $TST\neq 0$.

证明 算子 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 具有秩一当且仅当对任意的 $S, W\in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $STW=0$ 蕴涵 $ST=0$ 或者 $TW=0$ (参见命题 1.4.3). 因此, 如果 (2) 成立, 那么 (1) 将成立. 所以我们只需证明 (2) 的必要性部分.

记 $\mathcal{N}=\{\{0\},N_1,\cdots,N_n=H\}$. 假定 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是秩大于 1 的幂等元, 令 $s=\max\{i\mid \mathrm{rank}(TP_{N_i})\leq 1\ (1\leq i\leq n)\}$. 则有 $\mathrm{rank}(TP_{N_s})\leq 1$, $N_s\neq H$ 且当 $s<i\leq n$ 时, $\mathrm{rank}(TP_{N_i})\geq 2$.

情形 1 $TP_{N_s}\neq 0$. 关于空间分解 $H=N_s\oplus N_s^{\perp}$, $T=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12}\\ 0 & T_{22}\end{pmatrix}$, 其中 T_{11} 是秩一幂等元. 因为 T 是幂等元且 $\mathrm{rank}(T)\geq 2$, 因此 $T_{22}\neq 0$. 所以存在 $x\in N_s$ 及 $f\in N_s^{\perp}$ 使得 $Tx\neq 0$ 且 $T^*f\neq 0$. 令 $S=x\otimes f$, 那么 $S\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$. 由于 $Tx\perp f$, 于是 $STS=\langle Tx,f\rangle x\otimes f=0$, 但 $TST=Tx\otimes T^*f\neq 0$.

情形 2 $TP_{N_s}=0$. 关于分解 $N_{s+1}=N_s\oplus H_{s+1}$, 我们有 $T|_{N_{s+1}}=\begin{pmatrix} 0 & T_{12}\\ 0 & T_{22}\end{pmatrix}$. 因为 $T|_{N_{s+1}}$ 是秩大于 1 的幂等元, 显然 $\mathrm{rank}(T_{22})\geq 2$ 且 $(T_{22})^2=T_{22}$. 取 $x\in H_{s+1}$ 使得 $T_{22}x\neq 0$. 因为 $\dim(\ker T_{22}^*)^{\perp}\geq 2$, 因此存在 $f\in(\ker T_{22}^*)^{\perp}$ 使得 $\langle T_{22}x,f\rangle=0$. 令 $S=x\otimes f$, 那么 $S\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 显然 $STS=\langle Tx,f\rangle x\otimes f=\langle T_{22}x,f\rangle x\otimes f=0$, 而 $TST\neq 0$. 证毕.

引理 7.4.7 设 $\mathcal{N}=\{\{0\},N_1,\cdots,N_n=H\}$ 是 H 上的有限套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是 Jordan 同构, 那么 Φ 保秩一幂等性.

证明 设 T 是 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 中的任一秩一幂等元. 由条件, $\Phi(T)$ 是幂等元. 如果 $\mathrm{rank}(\Phi(T))\geq 2$, 则由引理 7.4.6 知, 存在 $W\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 使得 $W\Phi(T)W=0$, 同时 $\Phi(T)W\Phi(T)\neq 0$. 令 $S=\Phi^{-1}(W)$, 我们有 $\Phi(STS)=W\Phi(T)W=0$. 由于 Φ 是 Jordan 同构, 于是 $STS=0$,

从而 $ST=0$ 或 $TS=0$. 所以 $\Phi(T)W\Phi(T)=\Phi(TST)=0$, 矛盾. 证毕.

设 $\mathcal{N}=\{\{0\},N_1,\cdots,N_n=H\}$ 是有限套. 令 π 是 Alg$\mathcal{N}$ 的反自同构, 如果存在满足 $A(N_i^{\perp})=N_{n-i}$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$ 的 H 上的有界可逆共轭线性算子 A, 使得对所有的 T, $\pi(T)=AT^*A^{-1}$, 称 π 是内反自同构. 现在我们准备证明本节的主要结论之一.

定理 7.4.8 设 $\mathcal{N}=\{\{0\},N_1,\cdots,N_n=H\}$ 是 H 上的有限套. 令 Φ :Alg$\mathcal{N}\to$Alg$\mathcal{N}$ 是弱连续的线性映射, 则下列性质等价.

(1) Φ 是保幂等的双射.

(2) Φ 是 Jordan 同构.

(3) Φ 是内自同构或内反自同构.

证明 显然 (3)⇒(2)⇒(1). 注意到 Φ 是有界的.

(1)⇒(2). 假定 (1) 成立, 由定理 7.4.4 知, $\Phi:$ Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to$Alg$\mathcal{N}$ 是 Jordan 同态. 因为 Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 在 Alg$\mathcal{N}$ 中弱稠且 Φ 弱连续, 容易验证 Φ 也是 Alg$\mathcal{N}$ 上的 Jordan 同态.

(2)⇒(3). 由引理 7.4.7, 我们有 Φ 和 Φ^{-1} 保秩一幂等性, 所以由定理 7.4.1 的证明可知, 它们也保秩一性, 从而 Φ :Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to$Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是双射. 现在应用定理 7.4.1 和定理 7.4.5 及 Φ 的弱连续性完成证明. 证毕.

下面讨论与一般原子套相应的套代数上保幂等性的线性映射. 在本节的剩余部分, 我们总假定 $\mathcal{N}$ 是 H 上的一般的原子套, Alg$\mathcal{N}$ 是相应的套代数.

定理 7.4.9 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套. 令 $\Phi:$ Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to$Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是有界线性双射, 那么 Φ 保秩一幂等性当且仅当下列断言之一成立:

(1) 存在保维序同构 $\theta:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ 和满足 A 和 $A^{-1}+W$ 可逆的算子 A, $W\in\mathcal{B}(H)$ 使得对每个 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N)^{\perp}=\theta(N)^{\perp}=((A^{-1})^*+W^*)(N^{\perp})$, $W(\theta(N))\subseteq N_-$, 且对所有的 T $\in$Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(T)=AT(A^{-1}+W)$.

(2) 存在保维序同构 $\theta:\mathcal{N}^{\perp}\to\mathcal{N}$ 以及满足 A 和 $A^{-1}+W$ 可

逆的 H 上的有界共轭线性算子 A 和 W 使得对任意的 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N^{\perp})=(\theta(N))^{\perp}=(((A^{*})^{-1}+W^{*})(N))^{\perp}$, $W(\theta(N_{-}^{\perp}))\subseteq N^{\perp}$, 且对所有的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(T)=AT^{*}(A^{-1}+W)$. 在这种情形下, $\mathcal{N}^{\perp}$ 和 $\mathcal{N}$ 相似.

证明 显然, 只需证明必要性. 首先证明 Φ 保算子的秩一性. 令 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 如果 $\langle x,f\rangle\neq 0$, 那么 $x\otimes f$ 是秩一幂等元的倍数, 所以由 Φ 的线性, $\Phi(x\otimes f)$ 具有秩一. 现在假定 $\langle x,f\rangle=0$. 令 $M=\bigwedge\{N\in\mathcal{N}\mid x\in N\}$, 那么 $x\in M$, $f\in M_{-}^{\perp}$.

情形 1 $M_{-}\neq M$. 显然 $x_1=P_{M\ominus M_{-}}x\neq 0$. 记 $x=x_1\oplus x_2$, 那么 $\langle x,x_1\rangle=\langle x_1,x_1\rangle\neq 0$. 对任意的 $\varepsilon>0$, 由于 $T_{\varepsilon}=x\otimes(\varepsilon x_1+f)\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是秩一幂等元的倍数, 且当 $\varepsilon\to 0$ 时, $T_{\varepsilon}\to x\otimes f$, 再由 Φ 的连续性, 我们有 $\Phi(x\otimes f)$ 是秩一算子的极限, 所以 $\mathrm{rank}(\Phi(x\otimes f))\leq 1$. 因为 Φ 是单射, 故 $\mathrm{rank}(\Phi(x\otimes f))=1$.

情形 2 $M_{-}=M$. 显然 $M=M_{-}=\bigoplus_{N\subset M}(N\ominus N_{-})$. 对任意的 $N\subset M$, 令 $x_N=P_{N\ominus N_{-}}x$. 由于 $x\in M$ 且 $\mathcal{N}$ 是原子的, 因此 $x=\bigoplus_{N\subset M}x_N$. 显然存在序列 $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使得 $\bigvee_{i=1}^{\infty}\{N_i\}=M$ 且 $x_{N_i}\neq 0$. 令 $y_{N_i}=P_{N_i}x$, 则当 $i\to\infty$ 时, 有 $y_{N_i}\to x$. 因为 $y_{N_i}\otimes(x_{N_i}+f)\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 且 $\langle y_{N_i},(x_{N_i}+f)\rangle=\|x_{N_i}\|^2\neq 0$, 因此 $\Phi(y_{N_i}\otimes(x_{N_i}+f))$ 具有秩一. 又因为 $\Phi(y_{N_i}\otimes(x_{N_i}+f))\to\Phi(x\otimes f)$ 且 Φ 是单射, 故 $\mathrm{rank}(\Phi(x\otimes f))=1$.

所以 Φ 满足定理 7.1.7 的条件. 假定 Φ 具有定理 7.1.7 中的形式 (1), 即存在保维序同构 $\theta:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ 和单射稠值域算子 $A,B\in\mathcal{B}(H)$ 使得对 $N_{-}\neq H$ 及 $N\neq 0$ 的任意 $N\in\mathcal{N}$, 有 $A(N)=\theta(N)$, $B^{*}(N_{-}^{\perp})=\theta(N)_{-}^{\perp}$, 且对任意的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 都有 $\Phi(T)=ATB$ 成立. 令 $C=B^{*}$, 那么对所有的 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$. 因为 $C(N^{\perp})=\theta(N)^{\perp}$, 所以 $C^{*}(\theta(N))\subseteq N$. 故对所有的 $N\in\mathcal{N}$, 有 $C^{*}A(N)\subseteq N$, 即 $C^{*}A\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$. 下证对每个 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 都有 $\langle Ax,Cf\rangle=\langle x,f\rangle$.

秩一算子 $x\otimes f$ 是幂等元当且仅当 $\langle x,f\rangle=1$. 因为 Φ 保秩一幂等性, 因此当 $\langle x,f\rangle\neq 0$ 时, 有 $\langle Ax,Cf\rangle=\langle x,f\rangle$. 设 $\langle x,f\rangle=0$, 如

果 x 具有上面情形 1° 中的形式, 那么 $\langle Ax, C(x_1+f)\rangle = \langle x, x_1+f\rangle$ 和 $\langle Ax, Cx_1\rangle = \langle x, x_1\rangle$ 表明 $\langle Ax, Cf\rangle = 0 = \langle x, f\rangle$; 如果 x 取上面情形 2° 中的形式, 那么 $\langle Ay_{N_i}, C(x_{N_i}+f)\rangle = \langle y_{N_i}, (x_{N_i}+f)\rangle$ 且 $\langle Ay_{N_i}, Cx_{N_i}\rangle = \langle y_{N_i}, x_{N_i}\rangle$, 因此 $\langle Ay_{N_i}, Cf\rangle = \langle y_{N_i}, f\rangle = 0$. 令 $i \to \infty$, 则有 $\langle Ax, Cf\rangle = 0 = \langle x, f\rangle$. 特别地, 对满足 $N \ominus N_- \neq 0$ 的任意 $N \in \mathcal{N}$ 及对任意的 $x, f \in N \ominus N_-$, 有 $\langle C^*Ax, f\rangle = \langle x, f\rangle$, 所以 $P_{N\ominus N_-}C^*A|_{N\ominus N_-} = I_{N\ominus N_-}$, 故 $C^*A = I + R$, 其中 $R \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$. 由于 $\mathcal{N}$ 是原子的, 于是对每个 $N \in \mathcal{N}$, 都有 $P_{N\ominus N_-}R|_{N\ominus N_-} = 0$. 因此 C^*A 可逆, 从而 A 左可逆. 注意到 A 具有稠值域, 所以 A 和 C 可逆且 $B = C^* = A^{-1} + RA^{-1}$. 令 $W = RA^{-1}$, 那么对每个 $N \in \mathcal{N}$, 有 $W(\theta(N)) = RA^{-1}(A(N)) = R(N) \subseteq N_-$, 完成情形 (1) 的证明.

现在假定 Φ 具有定理 7.1.7 中的形式 (2), 即存在保维序同构 $\theta: \mathcal{N}^{\perp} \to \mathcal{N}$ 及 H 上的单射稠值域有界共轭线性算子 A 和 B 使得对 $N \neq 0$ 的任意 $N \in \mathcal{N}$, 有 $A(N^{\perp}) = \theta(N^{\perp}) = B^*(N)^{\perp}$, 且对每个 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 都有 $\Phi(T) = AT^*B$ 成立. 令 $C = B^*$, 那么对所有的 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x\otimes f) = Af \otimes Cx$. 相似于形式 (1) 的证明, 对任意的 $x, f \in N \ominus N_-$, 我们有 $\langle Af, Cx\rangle = \langle x, f\rangle$. 因为 C 共轭线性, 因此 $\langle x, C^*Af\rangle = \langle x, f\rangle$, 所以 $P_{N\ominus N_-}C^*A|_{N\ominus N_-} = I_{N\ominus N_-}$. 由于 $C(N) = \theta(N^{\perp})^{\perp}$, 我们有 $C^*(\theta(N^{\perp})) \subseteq N^{\perp}$. 从而对每个 $N \in \mathcal{N}$, 有 $C^*A(N^{\perp}) \subseteq N^{\perp}$, 即 $C^*A \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}^{\perp}$. 这表明 $C^*A = I + R$, 其中 $R \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}^{\perp}$ 且对每个 $N \in \mathcal{N}$, 有 $P_{N\ominus N_-}R|_{N\ominus N_-} = 0$, 因此 C^*A 可逆. 又因为 A 是单射且具有稠值域, 故 A 和 C 可逆. 令 $W = RA^{-1}$, 则 $B = C^* = A^{-1} + W$ 且对每个 $N \in \mathcal{N}$, 有 $W(\theta(N_-^{\perp})) = RA^{-1}(A(N_-^{\perp})) = R(N_-^{\perp}) \subseteq N^{\perp}$. 证毕.

引理 7.4.10 设 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 是 H 上的原子套. 如果 $\Phi: \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{M}$ 是 Jordan 同构, 那么 Φ 保秩一幂等性.

证明 类似于引理 7.4.2 可证. 证毕.

定理 7.4.11 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套. 令 $\Phi: \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是有界 Jordan 同构, 则下列断言之一成立:

(1) 存在满足 $A(\mathcal{N})=\mathcal{N}$ 的可逆算子 $A\in\mathcal{B}(H)$ 使得对所有的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(T)=ATA^{-1}$.

(2) 存在满足 $A(\mathcal{N}^{\perp})=\mathcal{N}$ 的 H 上的有界可逆共轭线性算子 A 使得对每个 $N\in\mathcal{N}$, $A(N^{\perp})=[(A^*)^{-1}(N)]^{\perp}$, 且对所有的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$. 在这种情形下, $\mathcal{N}^{\perp}$ 和 $\mathcal{N}$ 相似.

证明 假定 Φ 是有界 Jordan 同构, 那么由引理 7.4.10 知, Φ 保秩一幂等性. 所以 Φ 满足定理 7.4.9 的条件. 假定 Φ 具有定理 7.4.9 中的形式 (1), 即对所有的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=AT(A^{-1}+W)$. 由于 Φ 是 Jordan 的且 A 和 $(A^{-1}+W)^*$ 可逆, 于是对所有的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $TWAT=0$. 特别地, 当 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 时, 有 $\langle WAx,f\rangle=0$. 对任意的 $x\in\mathcal{D}_1(\mathcal{N})$ 及 $f\in\mathcal{D}_2(\mathcal{N})$, 令 N 是 $\mathcal{N}$ 中包含 x 的最小元, M 是正交补包含 f 的 $\mathcal{N}$ 中的最大元. 如果 $x\otimes f\notin\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 那么 M_+ 是 N 的真子空间. 取 $y\in M_+$, $g\in N_-^{\perp}$, 则 $x\otimes g, y\otimes f, y\otimes g\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 这样

$$
\begin{aligned}
0&=(x\otimes g+y\otimes f)WA(x\otimes g+y\otimes f)\\
&=\langle WAx,g\rangle x\otimes g+\langle WAy,g\rangle x\otimes f\\
&\quad+\langle WAx,f\rangle y\otimes g+\langle WAy,f\rangle y\otimes f\\
&=\langle WAx,f\rangle y\otimes g,
\end{aligned}
$$

因此 $\langle WAx,f\rangle=0$, 故必有 $W=0$.

如果 Φ 取定理 7.4.9 中的形式 (2), 如情形 (1) 的讨论表明 (2) 将成立. 证毕.

定理 7.4.12 设 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数且设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathcal{A}$ 是有界线性映射, 则 Φ 是 Jordan 同态当且仅当 Φ 保幂等性.

证明 必要性部分是显然的, 下证充分性. 设 Φ 保幂等性, 如果我们能证明对所有的 $x\otimes f, y\otimes g\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有

$$
\begin{aligned}
&\Phi[(x\otimes f)(y\otimes g)+(y\otimes g)(x\otimes f)]\\
&=\Phi(x\otimes f)\Phi(y\otimes g)+\Phi(y\otimes g)\Phi(x\otimes f),
\end{aligned}
\tag{7.4.6}
$$

则对所有的 $A, B \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 都有

$$\Phi(AB+BA)=\Phi(A)\Phi(B)+\Phi(B)\Phi(A),$$

即 Φ 是 Jordan 同态.

令 Γ 是与 $\mathcal{N}$ 序同构的全序集. 记 $\mathcal{N}=\{N_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\}$. 因为 $\mathcal{N}$ 是原子的, 因此 $H=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}(N_\gamma\ominus(N_\gamma)_-)$. 对任意的 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 存在 $N_{\gamma_0}\in\mathcal{N}$ 使得 $x\in N_{\gamma_0}$, $f\in(N_{\gamma_0})_-^{\perp}$. 由于 $N_{\gamma_0}=\bigoplus_{\gamma\leq\gamma_0}(N_\gamma\ominus(N_\gamma)_-)$, 于是 $x=\bigoplus_{\gamma\leq\gamma_0}x_\gamma$, $f=\bigoplus_{\lambda\geq\gamma_0}f_\lambda$, 其中 $x_\gamma\in N_\gamma\ominus(N_\gamma)_-$, $f_\lambda\in N_\lambda\ominus(N_\lambda)_-$, 因此 $x\otimes f=\sum\limits_{\gamma\leq\gamma_0}\sum\limits_{\lambda\geq\gamma_0}x_\gamma\otimes f_\lambda$. 相似地, 对任意的 $y\otimes g\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 存在 δ_0 使得 $y\otimes g=\sum\limits_{\delta\leq\delta_0}\sum\limits_{\sigma\geq\delta_0}y_\delta\otimes g_\sigma$. 所以

$$\begin{aligned}&(x\otimes f)(y\otimes g)+(y\otimes g)(x\otimes f)\\ =&\sum_{\gamma\leq\gamma_0}\sum_{\lambda\geq\gamma_0}\sum_{\delta\leq\delta_0}\sum_{\sigma\geq\delta_0}[(x_\gamma\otimes f_\lambda)(y_\delta\otimes g_\sigma)+(y_\delta\otimes g_\sigma)(x_\gamma\otimes f_\lambda)].\end{aligned}$$

因为 Φ 有界, 故只需证明对满足 $N_i\neq(N_i)_-$, $M_i\neq(M_i)_-$ $(i=1,2)$ 的某个 N_i, $M_i\in\mathcal{N}$ 及 $x\in N_1\ominus(N_1)_-$, $f\in M_1\ominus(M_1)_-$, $y\in N_2\ominus(N_2)_-$ 和 $g\in M_2\ominus(M_2)_-$, 有 (7.4.6) 式成立即可.

情形 1 $N_1=M_1=N_2=M_2=N\in\mathcal{N}$. 令

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{N\ominus N_-}&=P_{N\ominus N_-}\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}P_{N\ominus N_-}\\ &=\{T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\mid P_{N\ominus N_-}TP_{N\ominus N_-}=T\}\subset\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N},\end{aligned}$$

那么 $\Phi|_{\mathcal{A}_{N\ominus N_-}}:\mathcal{A}_{N\ominus N_-}\to\mathcal{A}$ 保幂等性. 因为 $\mathcal{A}_{N\ominus N_-}$ 同构于 $\mathcal{F}(N\ominus N_-)$, 因此由 [28; 定理 3.2] 知, $\Phi|_{\mathcal{A}_{N\ominus N_-}}$ 是 Jordan 同态. 故对任意的 $x,y,f,g\in N\ominus N_-$, (7.4.6) 式成立.

现在由类似于定理 7.4.4 证明中的讨论知, 结论成立. 证毕.

下面的定理是定理 7.4.11 和定理 7.4.12 的直接推论, 证明从略.

推论 7.4.13 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是有界线性映射, 则下列等价.

(1) Φ 是保幂等的双射.

(2) Φ 是 Jordan 同构.

(3) Φ 是自同构或反自同构. 在后一种情形下, $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}^{\perp}$ 相似.

(4) 要么 (i) 存在满足 $A(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ 的可逆算子 $A \in \mathcal{B}(H)$ 使得对所有的 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$; 或者 (ii) $\mathcal{N}^{\perp}$ 和 $\mathcal{N}$ 相似且存在满足 $A(\mathcal{N}^{\perp}) = \mathcal{N}$ 的 H 上的有界可逆共轭线性算子 A 使得对每个 $N \in \mathcal{N}$, 有 $A(N^{\perp}) = [(A^*)^{-1}(N)]^{\perp}$, 且对所有的 $T \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = AT^*A^{-1}$.

下面的引理给出了原子套代数中秩一幂等元的刻画.

引理 7.4.14 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套. 令 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是幂等元, 则下列断言成立.

(1) T 具有秩一当且仅当对任意的 $S \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $STS = 0$ 蕴涵要么 $ST = 0$ 要么 $TS = 0$.

(2) T 的秩大于 1 当且仅当存在秩一算子 $S \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 使得 $STS = 0$ 但 $TST \neq 0$.

证明 由命题 1.4.3 知, $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 具有秩一当且仅当对任意的 $S, W \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $STW = 0$ 蕴涵 $ST = 0$ 或者 $TW = 0$. 因此如果 (2) 成立, 那么 (1) 将成立. 故我们只需证明 (2) 的必要性部分.

设 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是秩大于 1 的幂等元. 令 $N_0 = \bigvee\{N \mid N \in \mathcal{N}$ 且 $\mathrm{rank}(TP_N) \leq 1\}$. 容易验证 $\mathrm{rank}(TP_{N_0}) \leq 1$, $N_0 \neq H$ 且当 $N \supset N_0$ 时, $\mathrm{rank}(TP_N) \geq 2$.

情形 1 $TP_{N_0} \neq 0$.

关于空间分解 $H = N_0 \oplus N_0^{\perp}$, 令 $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$, 其中 T_{11} 是秩一幂等元. 因为 $\mathrm{rank}(T) \geq 2$, 因此 $T_{22} \neq 0$. 所以存在 $x \in N_0$ 及 $f \in N_0^{\perp}$ 使得 $Tx \neq 0$ 且 $T^*f \neq 0$. 令 $S = x \otimes f$, 那么 $S \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$. 由于 $Tx \perp f$, 于是 $STS = \langle Tx, f\rangle x \otimes f = 0$, 但 $TST = Tx \otimes T^*f \neq 0$.

情形 2 $TP_{N_0} = 0$ 且 $N_0 \neq (N_0)_+$.

为书写简单，记 $N=(N_0)_+$. 关于分解 $N=N_0\oplus(N\ominus N_0)$，令 $T|_N=\begin{pmatrix}0 & T_{12}\\ 0 & T_{22}\end{pmatrix}$. 因为 $T|_N$ 是秩大于 1 的幂等元，显然 $\operatorname{rank}(T_{22})\geq 2$ 且 $(T_{22})^2=T_{22}$. 取 $x\in(N\ominus N_0)$ 使得 $T_{22}x\neq 0$. 因为 $\dim(\ker T_{22}^*)^{\perp}\geq 2$, 因此存在 $f\in(\ker T_{22}^*)^{\perp}$ 使得 $\langle T_{22}x,f\rangle=0$. 令 $S=x\otimes f$, 由于 $N\ominus N_0$ 是原子，因此 $S\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$. 显然 $STS=\langle Tx,f\rangle x\otimes f=\langle T_{22}x,f\rangle x\otimes f=0$, 但 $TST\neq 0$.

情形 3 $TP_{N_0}=0$ 且 $N_0=(N_0)_+$. 因为 $\mathcal{N}$ 是原子的，因此存在序列 $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{N}$ 使得 $N_{i+1}=(N_i)_-$ $(i=1,2,\cdots)$ 且 $\cap_{i=1}^{\infty}N_i=N_0$. 注意到

$$\operatorname{rank}(P_{N_1\ominus N_0}TP_{N_1\ominus N_0})\geq 2$$

且

$$\text{s-}\lim_{i\to\infty}P_{N_1\ominus N_i}TP_{N_1\ominus N_i}=P_{N_1\ominus N_0}TP_{N_1\ominus N_0},$$

因此存在 r 使得 $\operatorname{rank}(P_{N_1\ominus N_r}TP_{N_1\ominus N_r})\geq 2$. 令

$$\mathcal{M}=\{0,\ N_{r-1}\ominus N_r,\ N_{r-2}\ominus N_r,\ \cdots,\ N_2\ominus N_r,\ N_1\ominus N_r\},$$

则 $\mathcal{M}$ 是 $N_1\ominus N_r$ 上的套且

$$\pi: P_{N_1\ominus N_r}SP_{N_1\ominus N_r}\longmapsto P_{N_1\ominus N_r}S|_{N_1\ominus N_r}$$

是从 $P_{N_1\ominus N_r}(\mathrm{Alg}\mathcal{N})P_{N_1\ominus N_r}$ 到 $\mathrm{Alg}\mathcal{M}$ 上的同构. 所以 $T_0=P_{N_1\ominus N_r}T|_{N_1\ominus N_r}$ 是 $\mathrm{Alg}\mathcal{M}$ 中秩大于 1 的幂等元. 关于分解

$$N_1\ominus N_r=\bigoplus_{j=1}^{r-1}(N_{r-j}\ominus N_{r-j+1}),$$

$T_0=(T_{jk})_{(r-1)\times(r-1)}$ 是上三角算子矩阵. 因此至少存在一个 j 使得 $T_{jj}\neq 0$, 即

$$P_{N_{r-j}\ominus N_{r-j+1}}TP_{N_{r-j}\ominus N_{r-j+1}}\neq 0.$$

令 $N=N_{r-j}$, 那么 $P_{N\ominus N_-}TP_{N\ominus N_-}\neq 0$. 因为 $\operatorname{rank}(TP_{N_-})\geq 2$, 所以存在 $x\in N_-$ 使得 $Tx\neq 0$. 取 $f\in N\ominus N_-$ 使得 $P_{N\ominus N_-}T^*P_{N\ominus N_-}f\neq 0$, 那么 $S=x\otimes f\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 就具有所期望的性质. 证毕.

引理 7.4.15 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套. 令 $\Phi : \text{Alg}\mathcal{N} \to \text{Alg}\mathcal{N}$ 是 Jordan 同构, 则 Φ 保秩一幂等性.

证明 令 $T \in \text{Alg}\mathcal{N}$ 是任意的秩一幂等元, 那么 $\Phi(T)$ 是幂等元. 如果 $\text{rank}(\Phi(T)) \geq 2$, 那么由引理 7.4.14 知, 存在 $W \in \text{Alg}\mathcal{N}$ 使得 $W\Phi(T)W = 0$, 但 $\Phi(T)W\Phi(T) \neq 0$. 令 $S = \Phi^{-1}(W)$, 则 $\Phi(STS) = W\Phi(T)W = 0$, 从而 $STS = 0$, 所以要么 $ST = 0$ 要么 $TS = 0$. 然而, 这表明 $\Phi(T)W\Phi(T) = \Phi(TST) = 0$, 矛盾. 证毕.

现在我们能够证明下面的定理, 它是本节的另一主要结论.

定理 7.4.16 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套且设 $\Phi : \text{Alg}\mathcal{N} \to \text{Alg}\mathcal{N}$ 是弱连续的线性映射, 则下列性质等价.

(1) Φ 是保幂等的双射.

(2) Φ 是 Jordan 同构.

(3) Φ 是自同构或反自同构. 在后一种情形, $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}^{\perp}$ 相似.

(4) 要么 (i) 存在满足 $A(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ 的可逆算子 $A \in \mathcal{B}(H)$ 使得对所有的 $T \in \text{Alg}\mathcal{N}$, $\Phi(T) = ATA^{-1}$; 要么 (ii) $\mathcal{N}^{\perp}$ 和 $\mathcal{N}$ 相似且存在满足 $A(\mathcal{N}^{\perp}) = \mathcal{N}$ 的 H 上的有界可逆共轭线性算子 A 使得对每个 $N \in \mathcal{N}$, 有 $A(N^{\perp}) = [(A^*)^{-1}(N)]^{\perp}$, 且对所有的 $T \in \text{Alg}\mathcal{N}$, $\Phi(T) = AT^*A^{-1}$.

证明 (4)⇒(3)⇒(2)⇒(1) 显然. 也注意到 Φ 是有界的.

(1)⇒(2). 假定 (1) 成立. 由定理 7.4.12, Φ 是从 $\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 到 $\text{Alg}\mathcal{N}$ 的 Jordan 同态. 因为 $\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 在 $\text{Alg}\mathcal{N}$ 中弱稠且 Φ 弱连续, 因此不难验证 Φ 也是 $\text{Alg}\mathcal{N}$ 的 Jordan 同构.

(2)⇒(3) 或 (2)⇒(4). 由引理 7.4.10, Φ 和 Φ^{-1} 保秩一幂等性, 从而由定理 7.4.9 的证明知, 它们保秩一性. 所以 Φ 是从 $\text{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 到其自身上的双射. 现在应用定理 7.4.13 和 Φ 的弱连续性完成证明. 证毕.

§7.5 保零积的线性和可加映射

设 H 和 K 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 Hilbert 空间, 其中 $\mathbb{F}$ 代表复数域 $\mathbb{C}$

或实数域 $\mathbb{R}$, 符号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 代表 H 上的内积. 若不特别申明，本节我们总假定 $\mathcal{N}$ 是作用在 H 上的原子套. 映射 $\Phi:\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 称为保零积 (或双边保零积) 的，如果对任意的 $A,B\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $AB=0$ 蕴涵 $\Phi(A)\Phi(B)=0$ (或 $AB=0$ 当且仅当 $\Phi(A)\Phi(B)=0$). 本节讨论套代数上保零积的线性或可加映射.

定理 7.5.1 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是有界线性映射，则下列性质等价.

(1) Φ 保单位元且是双边保零积的满射.

(2) Φ 保单位元且是保零积的双射.

(3) Φ 是自同构.

证明 (3)$\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的. 下证 (2)$\Rightarrow$(3).

设 (2) 成立. 首先证明 Φ 保秩一幂等性. 由假定，Φ 保幂等性. 故由引理 7.4.12 知 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是 Jordan 同态. 令 P 是秩一幂等元，记

$$X_1=P\mathrm{Alg}\mathcal{N}P,\quad X_2=P\mathrm{Alg}\mathcal{N}(I-P),$$

$$X_3=(I-P)\mathrm{Alg}\mathcal{N}P,\quad X_4=(I-P)\mathrm{Alg}\mathcal{N}(I-P);$$

且

$$Y_1=Q\mathrm{Alg}\mathcal{N}Q,\quad Y_2=Q\mathrm{Alg}\mathcal{N}(I-Q),$$

$$Y_3=(I-Q)\mathrm{Alg}\mathcal{N}Q,\quad Y_4=(I-Q)\mathrm{Alg}\mathcal{N}(I-Q).$$

则 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}=X_1\dot{+}X_2\dot{+}X_3\dot{+}X_4=Y_1\dot{+}Y_2\dot{+}Y_3\dot{+}Y_4$. 易证 $\Phi(X_i)\subseteq Y_i$ $(i=1,\cdots,4)$. 例如，我们证明 $\Phi(X_2)\subseteq Y_2$. 对任意的 $T\in X_2$, 有 $T^2=0$, $TP=0$ 且 $(P+T)^2=P+T$. 因此 $\Phi(T)Q=\Phi(T)^2=0$, $(Q+\Phi(T))^2=Q+\Phi(T)$. 从而

$$\Phi(T)=Q\Phi(T)=Q\Phi(T)(I-Q)\in Y_2.$$

因为 Φ 是满射，所以 $\Phi(X_i)=Y_i$ $(i=1,\cdots,4)$. 注意到 $X_1=\mathbb{F}P$ 是一维的且 Φ 是从 X_1 到 Y_1 上的线性双射，故 Y_1 是一维的. 因此 $Q=\Phi(P)$ 是秩一幂等元.

下证 Φ 保秩一性. 令 $x\otimes f \in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 如果 $\langle x,f\rangle\neq 0$, 那么 $x\otimes f$ 是秩一幂等元的倍数, 所以由 Φ 的线性, $\Phi(x\otimes f)$ 也是秩一幂等元的倍数, 故 $\mathrm{rank}(\Phi(x\otimes f))=1$. 假定 $\langle x,f\rangle=0$. 令 $M=\bigwedge\{N\in\mathcal{N}\mid x\in N\}$, 则 $x\in M$ 且 $f\in M_{-}^{\perp}$.

情形 1 $M_{-}\neq M$. 在这种情形下, $x_1=P_{M\ominus M_{-}}x\neq 0$. 记 $x=x_1\oplus x_2$, 那么 $\langle x,x_1\rangle=\langle x_1,x_1\rangle\neq 0$. 对任意的 $\varepsilon>0$, $T_\varepsilon=x\otimes(\varepsilon x_1+f)\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是秩一幂等元的倍数且当 $\varepsilon\to 0$ 时, $T_\varepsilon\to x\otimes f$. 因为 Φ 连续, 因此 $\Phi(x\otimes f)$ 是秩一算子的极限, 从而秩至多是 1. 又因为 Φ 是单射, 故 $\mathrm{rank}(\Phi(x\otimes f))=1$.

情形 2 $M_{-}=M$. 此时 $M=M_{-}=\bigoplus_{N\subset M}(N\ominus N_{-})$. 对任意的 N ($\subset M$), 令 $x_N=P_{N\ominus N_{-}}x$. 因为 $\mathcal{N}$ 是原子的, 因此 $x=\bigoplus_{N\subset M}x_N$. 显然存在序列 $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使得 $\bigvee_{i=1}^{\infty}\{N_i\}=M$ 且 $x_{N_i}\neq 0$. 令 $y_{N_i}=P_{N_i}x$. 则当 $i\to\infty$ 时, 有 $y_{N_i}\to x$. 由于 $y_{N_i}\otimes(x_{N_i}+f)\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 且 $\langle y_{N_i},(x_{N_i}+f)\rangle=\|x_{N_i}\|^2\neq 0$, 所以 $\mathrm{rank}(\Phi(y_{N_i}\otimes(x_{N_i}+f)))=1$. 因为 Φ 连续, 故当 $i\to\infty$ 时, $\Phi(y_{N_i}\otimes(x_{N_i}+f))\to\Phi(x\otimes f)$. 现在 Φ 的单射性表明 $\mathrm{rank}(\Phi(x\otimes f))=1$. 故 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 保秩一性.

因为 Φ 的值域包含秩大于 1 的元, 所以 Φ 具有定理 7.1.4 中的形式 (1) 或 (2). 假定 Φ 具有形式 (1), 即对每个 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$. 首先证明对任意的 $x\in\mathcal{D}_1(\mathcal{N})$ 和 $f\in\mathcal{D}_2(\mathcal{N})$, 有 $\langle Ax,Cf\rangle=\langle x,f\rangle$.

对任意的 $x\in\mathcal{D}_1(\mathcal{N})$ 及 $f\in\mathcal{D}_2(\mathcal{N})$, 存在 $N,M\in\mathcal{N}$ 使得 $N=\bigwedge\{L\in\mathcal{N}\mid x\in L\}$, $M=\bigvee\{L\in\mathcal{N}\mid f\in L_{-}^{\perp}\}$. 如果 $N\subseteq M$, 那么 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 因为 Φ 保秩一幂等元, 所以当 $\langle x,f\rangle\neq 0$ 时, 有 $\langle Ax,Cf\rangle=\langle x,f\rangle$. 现在假定 $\langle x,f\rangle=0$. 如果 x 具有上面情形 1° 中的形式, 那么 $\langle Ax,C(x_1+f)\rangle=\langle x,x_1+f\rangle$ 且 $\langle Ax,Cx_1\rangle=\langle x,x_1\rangle$, 从而 $\langle Ax,Cf\rangle=\langle x,f\rangle$; 如果 x 具有上面情形 2° 中的形式, 那么 $\langle Ay_{N_i},C(x_{N_i}+f)\rangle=\langle y_{N_i},(x_{N_i}+f)\rangle$ 且 $\langle Ay_{N_i},Cx_{N_i}\rangle=\langle y_{N_i},x_{N_i}\rangle$, 因此 $\langle Ay_{N_i},Cf\rangle=\langle y_{N_i},f\rangle=0$. 令 $i\to\infty$, 则 $\langle Ax,Cf\rangle=\langle x,f\rangle$. 如果 $N\supset M$, 那么 $x\otimes f\notin\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. 取 $y\in M$, $g\in N^{\perp}$, 则 $\langle y,g\rangle=0$.

因为 Φ 保零积, 因此 $(x\otimes g)(y\otimes f)=0$ 表明 $\Phi(x\otimes g)\Phi(y\otimes f)=0$. 现在 Φ 的 Jordan 性蕴涵 $\Phi((y\otimes f)(x\otimes g))=\Phi(y\otimes f)\Phi(x\otimes g)$, 即 $\langle x,f\rangle Ay\otimes Cg=\langle Ax,Cf\rangle Ay\otimes Cg$, 从而 $\langle x,f\rangle=\langle Ax,Cf\rangle$. 故对任意的 $x\in\mathcal{D}_1(\mathcal{N})$ 及 $f\in\mathcal{D}_2(\mathcal{N})$, 都有 $\langle x,f\rangle=\langle Ax,Cf\rangle$.

现在任取 $T\in$Alg$\mathcal{N}$. 对任意的 $N\in\mathcal{N}$ 满足 $N\ominus N_-\neq\{0\}$ 及任意的非零向量 $x\in N\ominus N_-$, 存在 $f\in N\ominus N_-$ 使得 $\langle x,f\rangle=1$. 令 $y=Tx$, 那么 $y\in N$ 且 $(T-y\otimes f)(x\otimes f)=0$. 因为 Φ 保零积, 因此 $(\Phi(T)-Ay\otimes Cf)(Ax\otimes Cf)=0$. 所以对任意的 $x\in N\ominus N_-$, 都有 $\Phi(T)Ax=ATx$, 故 $\Phi(T)A|_{\mathcal{D}_1(\mathcal{N})}=AT|_{\mathcal{D}_1(\mathcal{N})}$. 对任意的 $z\in\mathcal{D}_1(\mathcal{N})$, 取 $g\in H$ 使得 $z\otimes g\in$Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$. Φ 的满射性表明存在 $T\in$Alg$\mathcal{N}$ 使得 $\Phi(T)=z\otimes g$. 所以 $\langle x,A^*g\rangle z=ATx$, 因此 $z\in$rng(A), 故 $\mathcal{D}_1(\mathcal{N})\subseteq$rng$(A)$, $A:\mathcal{D}_1(\mathcal{N})\to\mathcal{D}_1(\mathcal{N})$ 是双射, 且

$$\Phi(T)|_{\mathcal{D}_1(\mathcal{N})}=ATA^{-1}|_{\mathcal{D}_1(\mathcal{N})},\quad \Phi^{-1}(T)|_{\mathcal{D}_1(\mathcal{N})}=A^{-1}TA|_{\mathcal{D}_1(\mathcal{N})}.$$

易知 Φ^{-1} 也保秩一性, 因此 Φ : Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to$Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是保秩一性的有界线性双射. 应用定理 7.1.7 知 A 有界, 从而 A 能够延拓为 H 上的有界线性双射, 仍然用 A 表示, 所以 $A\in$GL$(\mathcal{B}(H))$. 故对所有的 $T\in$Alg$\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$, 即 Φ 是 Alg$\mathcal{N}$ 的自同构.

假定 Φ 满足定理 7.1.4 中的形式 (2). 如果 $x\otimes f\in$Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 且 $\langle x,f\rangle\neq 0$, 那么由于 Φ 保秩一幂等元, 因此 $\langle Af,Cx\rangle=\langle x,f\rangle$. 取 $x\otimes f, y\otimes g\in$Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 使得 $y\otimes f\in$Alg$_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 且 $\langle y,f\rangle=0$ 但 $\langle x,g\rangle\neq 0$, 则 $(x\otimes f)(y\otimes g)=0$. 因为 Φ 保零积, 因此 $0=\Phi(x\otimes f)\Phi(y\otimes g)=\langle Ag,Cx\rangle Af\otimes Cy=\langle x,g\rangle Af\otimes Cy\neq 0$, 矛盾. 故这种情形不可能发生. 证毕.

定理 7.5.2 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套且设 Φ : Alg$\mathcal{N}\to$Alg$\mathcal{N}$ 是线性映射, 则下列性质等价.

(1) Φ 双边保零积且是弱连续的满射.

(2) Φ 保零积且是弱连续的双射.

(3) Φ 是自同构的非零常数倍.

证明 显然只需证明 (2)⇒(3). 假定 (2) 成立, 则 Φ 有界.

令 Q 是幂等算子，Φ 的保零积性表明 $\Phi(Q)\Phi(I)=\Phi(I)\Phi(Q)$. 注意到 Alg$\mathcal{N}$ 中每个秩一算子都可表示为 Alg$\mathcal{N}$ 中至多四个幂等算子的和 (见文献 [86]) 且由命题 1.4.4, Alg$\mathcal{N}$ 中每个有限秩算子都能表示为 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 中有限个秩一算子的和，现在 Φ 的弱连续性和 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 在 Alg$\mathcal{N}$ 中的弱稠性一起蕴涵对所有的 $T\in$Alg$\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)\Phi(I)=\Phi(I)\Phi(T)$. 因为 Φ 是双射且套代数的换位是平凡的，故存在非零数 $\lambda\in\mathbb{F}$ 使得 $\Phi(I)=\lambda I$. 令 $\Psi=\lambda^{-1}\Phi$, 则 $\Psi(I)=I$. 现在由定理 7.5.1 知，Ψ 是自同构. 证毕.

定义 7.5.1 令 $\Phi:$ Alg$\mathcal{N}\to$Alg$\mathcal{N}$ 是线性映射. 如果对任意的 $T, S, R\in$Alg$\mathcal{N}$, $TSR=0$ 当且仅当 $\Phi(T)\Phi(S)\Phi(R)=0$, 则称 Φ 双边保 3- 零积.

接下来我们讨论作用在 Banach 空间套代数上双边保 3- 零积的线性映射. 为此，首先证明下面的引理.

引理 7.5.3 设 $\mathcal{N}$ 是作用在 Banach 空间 X 上的套，满足对任意的 $N\in\mathcal{N}$, 若 $N_-=N$, 则 N 在 X 中可补. 那么 Alg$\mathcal{N}$ 的有限秩算子理想包含在这个代数中幂等元全体张成的线性子空间中.

证明 由命题 1.4.4 知，套代数的有限秩算子理想在套代数中强稠且由它所包含的秩一算子张成，所以我们只需证明 Alg$\mathcal{N}$ 中的每个秩一算子是幂等元的线性组合.

一个秩一算子要么是幂等算子的倍数要么其平方等于 0. 假定 $x\otimes f\in$Alg$\mathcal{N}$ 是幂零算子，由命题 1.4.2 知，存在 $N\in\mathcal{N}$ 使得 $x\in N$ 且 $f\in N_-^{\perp}$. 令 $N_x=\bigwedge\{N\in\mathcal{N}\mid x\in N\}$, 那么 $x\in N_x$ 且 $f\in(N_x)_-^{\perp}$.

情形 1 $(N_x)_-\neq N_x$. 在此情形下，存在 $g\in(N_x)_-^{\perp}$ 使得 $\langle x,g\rangle\neq 0$. 因为 $x\otimes g$ 和 $x\otimes(g-f)$ 是幂等元的倍数且 $x\otimes f=x\otimes g-x\otimes(g-f)$, 因此 $x\otimes f$ 是幂等元的线性组合.

情形 2 $(N_x)_-=N_x$. 由假定，存在幂等元 $P\in\mathcal{B}(X)$ 使得 $\mathrm{rng}(P)=N_x$. 容易验证 $P\in$Alg$\mathcal{N}$. 因为 $f\in(N_x)_-^{\perp}=(N_x)^{\perp}=(\mathrm{rng}(P))^{\perp}=\ker P^*$, 因此 $P^*f=0$. 所以 $x\otimes f$ 是幂等元 $P+x\otimes f$

和 $P - x\otimes f$ 的线性组合. 证毕.

定理 7.5.4 设 $\mathcal{N}$ 是作用在 Banach 空间 X 上的套满足对每个 $N\in\mathcal{N}$, 如果 $N_- = N$, 则 N 在 X 中可补. 假定 X 自反或套 $\mathcal{N}$ 满足 $0_+\neq 0$. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是弱连续的线性满射, 则 Φ 双边保 3- 零积当且仅当 Φ 是自同构的非零常数倍.

证明 只需证必要性. 由于 Φ 双边保 3- 零积, 故 Φ 是单射. 假定 P 是 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 中的幂等算子, 那么 $PI(I-P)=(I-P)IP=0$ 蕴涵 $\Phi(I)^2\Phi(P)=\Phi(P)\Phi(I)^2$. 由引理 7.5.3, 类似于定理 7.5.2 的证明, 存在 $\alpha\neq 0$ 使得 $\Phi(I)^2=\alpha I$. 于是 $\Phi(I)$ 可逆, 从而 Φ 保零积, 故存在非零数 $\lambda\in\mathbb{F}$ 使 $\Phi(I)=\lambda I$. 不失一般性, 我们可假定 $\Phi(I)=I$.

下证 Φ 双边保秩一性. 令 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是秩一算子. 由命题 1.4.3, 对任意的 $S, R\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $STR=0$ 蕴涵 $ST=0$ 或者 $TR=0$. 因为 Φ 双边保 3- 零积且是满射, 因此 $\mathrm{rank}(\Phi(T))=1$. 类似可证 Φ^{-1} 保秩一性. 所以 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是保秩一性的有界线性双射, 从而满足定理 7.1.7 的条件.

假定 Φ 具有定理 7.1.7 中的形式 (2). 因为 Φ 弱连续, 故对每个 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=AT^*C^*|_X$. 由于 $\Phi(I)=I$, 于是 $AC^*|_X=I$, 因此 A 可逆且 $C^*|_X=A^{-1}$. 所以对每个 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=AT^*A^{-1}$. 从而对任意的算子 $S, T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, $TS=0$ 当且仅当 $ST=0$, 这是不可能的, 故这种情形不发生. 所以 Φ 只能取定理 7.1.7 中的形式 (1), 于是对任意的 $T\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=ATC^*|_X$. 如果 X 自反, 那么 $C^*|_X\in\mathcal{B}(X)$, 因此对所有的 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=ATB$, 其中 $B=C^*|_X$. 如果 $0_+\neq 0$, 令 $f_\lambda, f\in X^*$ 使得 $f_\lambda\overset{wk^*}{\to}f$, 即对任意的 $y\in X$, $\langle y,f_\lambda\rangle\to\langle y,f\rangle$. 因为对任意的 $x\in 0_+$, 都有 $x\otimes f_\lambda$, $x\otimes f\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 因此对任意的 $y\in X$ 及 $g\in X^*$, 有 $\langle(x\otimes f_\lambda)y,g\rangle\to\langle(x\otimes f)y,g\rangle$, 即 $x\otimes f_\lambda\overset{wk}{\to}x\otimes f$, 从而 $\Phi(x\otimes f_\lambda)\overset{wk}{\to}\Phi(x\otimes f)$. 所以对任意的 $y\in X$, $\langle f_\lambda,C^*y\rangle Ax=\Phi(x\otimes f_\lambda)y\overset{wk}{\to}\Phi(x\otimes f)y=\langle f,C^*y\rangle Ax$, 即 C^*y 弱 $*$ 连续, 故 $C^*y\in X$. 令 $B=C^*|_X$, 那么 $B\in\mathcal{B}(X)$ 且对所有的 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有

$\Phi(T)=ATB$. 因为 $AB=\Phi(I)=I$, 故 A 可逆且 $B=A^{-1}$. 从而对每个 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$. 证毕.

§5.1 中定理 5.1.2 证明了 $\mathcal{B}(H)$ 上双边保零积的可加满射是自同构或共轭自同构的常数倍, 其中 H 是 Hilbert 空间. 对于原子套代数上的保零积可加映射则有下列结论.

定理 7.5.5 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是可加映射, 则下列性质等价.

(1) Φ 保单位元且是双边保零积的连续满射.

(2) Φ 保单位元且是保零积的连续双射.

(3) Φ 是自同构或共轭自同构, 即存在可逆算子 $A\in\mathrm{GL}(\mathcal{B}(H))$ 或有界可逆共轭线性算子 $A:H\to H$ 使得对所有的 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 都有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$.

证明 只需证 (2)⇒(3). 设 (2) 成立, 显然 Φ 保幂等性. 因为 Φ 连续, 故 Φ 是实线性的. 任取一秩幂等算子 $P\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 如同定理 7.5.1 的证明中那样分解 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$. 注意到 $X_1=\mathbb{F}P$ 是一维的, 因此 Φ 是从 X_1 到 Y_1 的实线性双射. 如果 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, 则 Y_1 是 2 维的实线性空间, 故 Y_1 是 1 维的线性空间; 如果 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, 则 Y_1 是 1 维的实线性空间. 故总有 Y_1 是 1 维的线性空间, 所以 $Q=\Phi(P)$ 是秩一幂等元, 即 Φ 保秩一幂等性.

断言 1 存在环同态 $\tau:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 使得对任意的 $\lambda\in\mathbb{F}$ 及任意的秩一算子 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(\lambda x\otimes f)=\tau(\lambda)\Phi(x\otimes f)$.

情形 1 设 $x\otimes f\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 使得 $x\in N\ominus N_-\neq\{0\}$ 且 $f\in M\ominus M_-\neq\{0\}$, 其中 $N,M\in\mathcal{N}$. 令 $x_1=\frac{x}{\|x\|}$ 且 $f_1=\frac{f}{\|f\|}$, 则存在秩一幂等元 $u\otimes h$ 和 $v\otimes l$ 使得 $\Phi(x_1\otimes x_1)=u\otimes h$, $\Phi(f_1\otimes f_1)=v\otimes l$. 因为 Φ 是保零积的可加映射, 因此

$$\Phi(\lambda x\otimes f)=\Phi(x_1\otimes x_1)\Phi(\lambda x\otimes f)\Phi(f_1\otimes f_1)=\tau_1(\lambda)u\otimes l,$$

其中 $\tau_1(\lambda)=\langle\Phi(\lambda x\otimes f)v,h\rangle$. 注意到 $\Phi(x\otimes f)=\tau_1(1)u\otimes l$. 令 $\tau(\lambda)=\tau_1(\lambda)/\tau_1(1)$, 则 $\Phi(\lambda x\otimes f)=\tau(\lambda)\Phi(x\otimes f)$. 下证 $\tau:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 与 x 和 f 的选择无关.

令 $y \in L \ominus L_- \neq \{0\}$ 使得 $x \otimes f, y \otimes f \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$. 对任意的数 $\lambda \in \mathbb{F}$, 令 η 和 σ 是 $\mathbb{F}$ 上的映射使得 $\Phi(\lambda y \otimes f) = \eta(\lambda)\Phi(y \otimes f)$ 且 $\Phi(\lambda(x+y) \otimes f) = \sigma(\lambda)\Phi((x+y) \otimes f)$. 如果 $\langle x, y\rangle = 0$, 则由 Φ 的保零积性和可加性，有

$$\tau(\lambda)\Phi(x_1 \otimes x_1)\Phi(x \otimes f) = \sigma(\lambda)\Phi(x_1 \otimes x_1)\Phi(x \otimes f),$$

并且

$$\eta(\lambda)\Phi(y_1 \otimes y_1)\Phi(y \otimes f) = \sigma(\lambda)\Phi(y_1 \otimes y_1)\Phi(y \otimes f).$$

注意到 $\Phi(x_1 \otimes x_1)\Phi(x \otimes f) = \Phi(x \otimes f) \neq 0$, 因此 $\tau(\lambda) = \sigma(\lambda)$. 同样可证 $\eta(\lambda) = \sigma(\lambda)$, 从而 $\eta(\lambda) = \tau(\lambda)$; 如果 $\langle x, y\rangle \neq 0$, 在 $\mathcal{N}$ 的某个原子中取非零向量 z 使得 $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle = 0$ 且 $z \otimes f \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$. 类似于如上的讨论，我们有 $\eta(\lambda) = \tau(\lambda)$, 故 τ 与 x 的选择无关. 类似可证 τ 也与 f 的选择无关.

情形 2 令 $x = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i$, $f = \bigoplus_{j=1}^{m} f_j$, 其中 $x_i \in N_i \ominus (N_i)_- \neq \{0\}$, $f_j \in M_j \ominus (M_j)_- \neq \{0\}$. 那么 $x \otimes f \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 当且仅当对任意的 i, j, 有 $N_i \subseteq M_j$. 因此 $x \otimes f = \sum\limits_{i,j} x_i \otimes f_j$ 且 $x_i \otimes f_j \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$. 现在由情形 1 知，断言 1 成立.

情形 3 对任意的 $x, f \in H$, $x \otimes f \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 当且仅当 $x = \bigoplus_\lambda x_\lambda$, $f = \bigoplus_\gamma f_\gamma$, 其中 $x_\lambda \in N_\lambda \ominus (N_\lambda)_- \neq \{0\}$, $f_\gamma \in M_\gamma \ominus (M_\gamma)_- \neq \{0\}$ 且对任意的 λ, γ, 有 $N_\lambda \subseteq M_\gamma$. 这样 $x \otimes f = \sum\limits_{\lambda,\gamma} x_\lambda \otimes f_\gamma$ 且 $x_\lambda \otimes f_\gamma \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$. 因为非零向量 x_λ 和 f_γ 至多可数，因此不妨记 $x = \bigoplus_{i=1}^{\infty} x_i$, $f = \bigoplus_{j=1}^{\infty} f_j$. 令 $y_n = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i$, $g_n = \bigoplus_{j=1}^{n} f_j$, 那么当 $n \to \infty$ 时， $y_n \to x$, $g_n \to f$. 所以由情形 2 及 Φ 的连续性知，

$$\Phi(\lambda x \otimes f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\lambda y_n \otimes g_n) = \tau(\lambda) \lim_{n\to\infty} \Phi(y_n \otimes g_n) = \tau(\lambda)\Phi(x \otimes f).$$

显然 τ 是可加的. 容易验证 τ 也是可乘的，所以 τ 是环同态.

断言 2 $\tau:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 要么是恒等映射要么是共轭映射，即对任意的 $\lambda\in\mathbb{F}$, 要么 $\tau(\lambda)\equiv\lambda$ 要么 $\tau(\lambda)\equiv\bar{\lambda}$.

因为 Φ 连续，所以 τ 连续. 由于实数域上的连续环同态是恒等映射且复数域上的连续环同态要么是恒等映射要么是共轭映射，故断言成立.

现在我们已经证明了 $\Phi:\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 是保零积的有界线性 (或共轭线性) 双射且 $\Phi(I)=I$. 如果 $\Phi|_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}}$ 是线性的，那么由定理 7.5.1 及其证明知 $\Phi:\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是自同构；如果 $\Phi|_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}}$ 是共轭线性的，类似于线性情形的讨论，我们能证明 Φ 是共轭自同构. 因此 (3) 成立. 证毕.

§7.6 保多项式零化元的线性映射

本节我们总假定 H 和 K 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 Hilbert 空间，$\mathcal{N}$ 是作用在 H 上的原子套. 设 f 为一多项式，符号 $\mathcal{Z}(f)$, $\mathcal{G}(f)$ 和 $\mathcal{P}_0$ 见第六章介绍.

设 $\{e_i\}_{i\in\Delta}$ 是 Hilbert 空间 H 的一组标准正交基，共轭线性等距映射 $J:H\to H$ 定义为 $Jx=\sum\limits_{i\in\Delta}\bar{\xi}_ie_i$, 其中 $x=\sum\limits_{i\in\Delta}\xi_ie_i$. 显然 $J^2=I$ 且对所有的 $x,y\in H$, 有 $\langle Jx,y\rangle=\langle Jy,x\rangle$. 对于 $T\in\mathcal{B}(H)$, 令 T^{tr} 代表 T 关于基 $\{e_i\}_{i\in\Delta}$ 的转置，那么对任何向量 $x=\sum\limits_{i\in\Delta}\xi_ie_i$, $y=\sum\limits_{i\in\Delta}\eta_ie_i\in H$, 我们有

$$\begin{aligned}\langle T^{tr}x,y\rangle&=\sum_{i,j\in\Delta}\xi_i\bar{\eta}_j\langle T^{tr}e_i,e_j\rangle=\sum_{i,j\in\Delta}\xi_i\bar{\eta}_j\langle Te_j,e_i\rangle\\&=\langle TJy,x\rangle=\langle JT^*Jx,y\rangle,\end{aligned}$$

故 $T^*=JT^{tr}J$.

下面是本节的主要结论.

定理 7.6.1 设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套. 令 $\Phi:\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是弱连续的线性双射，多项式 $f\in\mathcal{P}_0$, 则下列性质等价.

(1) Φ 与 f 交换.

(2) Φ 保多项式 f 的零化元.

(3) 存在数 1 的根 λ 满足 $\lambda \in \mathcal{G}(f)$ 且要么存在自同构 Ψ 使得对所有的 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = \lambda\Psi(T)$; 要么存在反自同构 Ψ 使得对所有的 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = \lambda\Psi(T)$.

证明 (3)$\Rightarrow$(1). 假定 (3) 成立. 由定理 6.1.3 的 (1), 易证 $f(\lambda T) = \lambda f(T)$. 如果 Ψ 是自同构, 那么存在可逆算子 $A \in \mathcal{B}(H)$ 使得对所有的 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = \lambda ATA^{-1}$. 这样 $\Phi(f(T)) = \lambda Af(T)A^{-1} = f(\lambda ATA^{-1}) = f(\Phi(T))$. 如果 Ψ 是反自同构, 因为 $T^* = JT^{tr}J$, 故存在有界可逆共轭线性算子 A 使得 $\Phi(T) = \lambda AJT^{tr}JA^{-1}$, 其中 J 正如定理前所定义. 于是

$$\begin{aligned}\Phi(f(T)) &= \lambda AJf(T)^{tr}JA^{-1} = \lambda AJf(T^{tr})JA^{-1} \\ &= f(\lambda AJT^{tr}JA^{-1}) = f(\Phi(T)).\end{aligned}$$

故 (1) 成立.

(1)$\Rightarrow$(2) 是显然的. 下证 (2)$\Rightarrow$(3).

设 (2) 成立. 我们断言, 存在满足 $\lambda\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$ 的非零数 λ 及满足 $\lambda^k = 1$ 的整数 $k \geq 1$ 使得 $\Phi(I) = \lambda I$. 事实上, 取定理 6.1.3 (3) 中的 k, 则对任意的幂等元 $A \in$Alg$\mathcal{N}$, 有 $\Phi(A)^{k+1} = \Phi(A)$ 且 $\Phi(A)\Phi(I) = \Phi(I)\Phi(A)$. 类似于定理 7.5.2 的证明知, 对所有的 $S \in$Alg$\mathcal{N}$, 我们有 $\Phi(S)\Phi(I) = \Phi(I)\Phi(S)$. 因为 Φ 是双射, 故 $\Phi(I)$ 是恒等算子的非零常数倍, 即存在满足 $\lambda^k = 1$ 的非零数 λ 使得 $\Phi(I) = \lambda I$. 由引理 6.1.3 的 (2) 和 (4), 有 $\lambda\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$, 所以 $\lambda \in \mathcal{G}(f)$.

令 $\Psi = \lambda^{-1}\Phi$. 因为 $\lambda^{-1}\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$, 因此 $\Psi :$ Alg$\mathcal{N} \to$Alg$\mathcal{N}$ 保单位元且是保多项式 f 的零化元的弱连续线性双射. 由定理 6.1.1 知 Ψ 保幂等性. 现在由定理 7.4.16, 结论成立. 证毕.

下面的定理给出了从原子套代数到 $\mathcal{B}(K)$ 的任意弱闭算子代数的所有弱连续且保 $\mathcal{P}_0$ 中多项式零化元的线性映射的完全刻画.

定理 7.6.2 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}(K)$ 中包含单位元的弱闭子代数且设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套. 令 $\Phi : \mathrm{Alg}\mathcal{N} \to \mathcal{B}$ 是弱连续的线性映射且 $f \in \mathcal{P}_0$, 则下列性质等价.

(1) Φ 与 f 交换.

(2) Φ 保 f 的零化元.

(3) 存在 k- 幂等元 $B \in \mathcal{B}$ 满足其谱包含在 $\mathcal{G}(f)$ 内及 Jordan 同态 $\Psi : \mathrm{Alg}\mathcal{N} \to \mathcal{B}$ 使得对所有的 $T \in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = B\Psi(T) = \Psi(T)B$.

证明 (1)$\Rightarrow$ (2) 显然.

(3)$\Rightarrow$(1). 假定 (3) 成立. 设 $\sigma(B) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$, 则存在 $\mathcal{B}$ 中的正交幂等元族 $P_1, \cdots, P_l$ 使得 $B = \sum\limits_{s=1}^{l} \lambda_s P_s$. 因为对每个 λ_s, 都有 $\lambda_s \mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$, 因此 $B^k = B$, 其中整数 k (≥ 1) 同定理 6.1.3 中所示. 显然 $P_s\Psi(T) = \Psi(T)P_s$. 设 $T \in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 任意. 因为 Ψ 是 Jordan 同态, 因此

$$
\begin{aligned}
f(\Phi(T)) &= \sum_{s=1}^{l} f(\lambda_s \Psi(T) P_s) = \sum_{s=1}^{l} \lambda_s f(\Psi(T)) P_s \\
&= \sum_{s=1}^{l} \lambda_s P_s \Psi(f(T)) = \Phi(f(T)).
\end{aligned}
$$

故 (1) 成立.

(2)$\Rightarrow$(3). 假定 (2) 成立. 由定理 6.1.3, 存在 $\mathcal{B}$ 中的正交幂等元族 $P_1, \cdots, P_{k-1}$, 使得当 $A^2 = A$ 时, 就有 P_s 与 $\Phi(A)$ 交换且 $\Phi(A) = \Phi(A)\sum\limits_{s=1}^{k-1} P_s$, $\Phi(I) = \sum\limits_{s=1}^{k-1} e^{\frac{2\pi s i}{k-1}} P_s$. 令 $P = \sum\limits_{s=1}^{k-1} P_s$ 且 $B = \Phi(I) + I - P$, 则 $P^2 = P$, $B^{k-1} = I$ 且当 $A^2 = A$ 时, 有 $B\Phi(A) = \Phi(A)B = \Phi(I)\Phi(A)$. 相似于定理 7.5.2 证明中的讨论, 对所有的 $S \in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 我们有

$$\Phi(S) = \Phi(S)P = P\Phi(S) \text{ 且 } B\Phi(S) = \Phi(S)B = \Phi(I)\Phi(S).$$

令 $\mathcal{B}_1 = P\mathcal{B}P$, $\Psi = B^{-1}\Phi$. 显然 $\Psi: \mathrm{Alg}\mathcal{N} \to \mathcal{B}$ 是满足 $\mathrm{rng}(\Psi) \subseteq \mathcal{B}_1$ 的弱连续线性映射且保多项式 f 的零化元. 因为 $\mathcal{B}_1$ 是具有单位元 P 的弱闭算子代数且 $\Psi(I) = P$, 由定理 6.1.1 知 Ψ 保幂等性. 利用定理 7.4.4, $\Psi: \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N} \to \mathcal{B}_1$ 是 Jordan 同态. 因为 Φ, 从而 Ψ 弱连续且 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 在 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 中弱稠, 因此不难证明 $\Psi: \mathrm{Alg}\mathcal{N} \to \mathcal{B}$ 是 Jordan 同态. 证毕.

设 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 且 $\mathcal{C}'$ 表示 $\mathcal{C}$ 的换位, 即 $\mathcal{C}' = \{S \in \mathcal{B}(H) \mid$ 对所有的 $T \in \mathcal{C}, ST = TS\}$. 令 $\mathcal{P}_\mathcal{C} = \{P \in \mathcal{B}(H) \mid P^2 = P$ 且对所有的 $C \in \mathcal{C}, PCP = C\}$, 那么 $\mathcal{P}_\mathcal{C}$ 具有极小元 $P_\mathcal{C}$. 事实上, 令

$$M = \bigvee\{\mathrm{rng}(C) \mid C \in \mathcal{C}\}, \quad N = \bigvee\{(\ker C)^\perp \mid C \in \mathcal{C}\},$$

$$M_0 = \bigvee\{M, N\},$$

那么具有值域 M_0 的 H 上的每个幂等元 P, 都有 $P \in \mathcal{P}_\mathcal{C}$. 如果

$$\mathcal{C}' = \{\lambda P_\mathcal{C} + D \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ 且 } D \in \mathcal{B}(H) \text{ 使得 } P_\mathcal{C} D = DP_\mathcal{C} = 0\},$$

那么我们说 $\mathcal{C}$ 具有性质 (B).

推论 7.6.3 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}(K)$ 中包含单位元的闭子代数且设 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套. 令 $\Phi: \mathrm{Alg}\mathcal{N} \to \mathcal{B}$ 是弱连续的线性映射, 多项式 $f \in \mathcal{P}_0$. 假定 Φ 的值域具有性质 (B), 则下列性质等价.

(1) Φ 与 f 交换.

(2) Φ 保多项式 f 的零化元.

(3) 存在满足 $\lambda\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$ 的数 1 的根 λ 以及 Jordan 同态 $\Psi: \mathrm{Alg}\mathcal{N} \to \mathcal{B}$ 使得 $\Phi = \lambda\Psi$.

证明 (3)⇒(1)⇒ (2) 显然. 下证 (2)⇒(3).

假定 (2) 成立. 因为 Φ 的值域具有性质 (B), 所以由定理 7.6.2 的证明知, 在 $\Phi(I)$ 的表达式中, 除一个 P_s 外, 其余都为零. 因此存在满足 $\lambda\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$ 的非零数 λ 及满足 $\lambda^k = 1$ 的整数 $k(\geq 1)$ 使得 $\Phi(I) = \lambda P$. 令 $\Psi = \lambda^{-1}\Phi$, 那么 $\Psi: \mathrm{Alg}\mathcal{N} \to \mathcal{B}$ 保幂等性. 故由定理 7.6.2 的证明知, Ψ 是 Jordan 同态. 证毕.

推论 7.6.4 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{B}(K)$ 中包含单位元的弱闭子代数且 $\mathcal{N}$ 是 H 上的原子套. 假定 $\Phi: \mathrm{Alg}\mathcal{N} \to \mathcal{B}$ 是弱连续的线性满射且多项式 $f \in \mathcal{P}_0$. 如果 $\mathcal{B}$ 是因子, 那么下列等价.

(1) Φ 与 f 交换.

(2) Φ 保多项式 f 的零化元.

(3) 存在满足 $\lambda\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(f)$ 的数 1 的根 λ 及 Jordan 同态 $\Psi: \mathrm{Alg}\mathcal{N} \to \mathcal{B}$ 使得 $\Phi = \lambda\Psi$.

证明 略.

§7.7 保数值域闭包的线性映射

设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的套, 如果 $\mathcal{N}$ 是原子套且 $\mathcal{N}$ 的每个原子都是一维的, 称 $\mathcal{N}$ 是极大原子套. 本节我们讨论极大原子套代数或者原子套代数的对角代数上保数值域闭包的线性映射. 用 $\overline{\Omega}$ 代表集合 Ω 的闭包. 正如通常一样, 用 $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$ 分别表示复数域, 自然数集和整数集. 回顾一下, 算子 $A \in \mathcal{B}(H)$ 的数值域和数值半径分别为 $W(A) = \{\langle Ax, x\rangle \mid x \in H, \|x\| = 1\}$ 和 $w(A) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in W(A)\}$.

在证明主要结论之前, 先证明下面的几个引理.

引理 7.7.1 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的原子套. 令 $A \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是正算子. 则 A 是秩一投影的倍数当且仅当下列成立: 对任意正算子 $B, C \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 使得 $A = B + C$, 有 B 和 C 是 A 的倍数.

证明 首先证明必要性. 设 $A \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是秩一投影的倍数, 那么存在 $N \in \mathcal{N}$ 和单位向量 $x \in N \ominus N_-$ 使得对某个非负实数 r, 有 $A = rx \otimes x$. 显然可假定 $r > 0$. 设 $B, C \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是正算子. 如果 $A = B + C$, 那么对任意与 x 正交的向量 $y \in H$, 有

$$0 = \langle Ay, y\rangle = \langle By, y\rangle + \langle Cy, y\rangle,$$

所以 $\langle By, y\rangle = \langle Cy, y\rangle = 0$. 故存在 $u, v \in H$ 使得 $B = u \otimes x$, $C = v \otimes x$. 现在 B 和 C 的正性表明存在非负实数 s 和 t 使得 $u = sx$, $v = tx$. 因此 B 和 C 是 A 的倍数.

下证充分性. 假定 A 不是秩一投影的倍数.

情形 1 设 A 是秩大于 1 的投影 P 的严格正数倍 (包括 $P=I$). 令 $P=Q+R$, 其中 Q 和 R 是非零投影. 则 $A=rP=rQ+rR$. 由假定, rQ 和 rR 是 A 的倍数. 因此存在 α 和 β 使得 $rQ=\alpha A$ 且 $rR=\beta A$, 于是 $R=0$ 或 $Q=0$, 矛盾.

情形 2 设 A 不是投影的倍数. 那么 A 至少包含两个严格正的谱点 r 和 s. 假定 $0<r<s$. 令 P 是 A 相对于区间 $[0,r]$ 的谱投影, 那么 $B=AP$ 和 $C=A(I-P)$ 是和为 A 的非零正算子. 因此由假定, 存在数 t 使得 $C=tA$ 且

$$tC=tA(I-P)=C(I-P)=C,$$

故 $t=1$. 所以 $C=A$. 从而 $B=0$, 与 B 非零矛盾. 证毕.

设 P 和 Q 是两个投影, 如果 $PQ=QP=0$, 称 P 和 Q 不交. 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的原子套, 令 $\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$ 代表 Alg$\mathcal{N}$ 的对角代数, 即 $\mathcal{D}_{\mathcal{N}}=\text{Alg}\mathcal{N}\cap(\text{Alg}\mathcal{N})^*$.

引理 7.7.2 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的原子套且 $\Phi:\text{Alg}\mathcal{N}\to\text{Alg}\mathcal{N}$ (或 $\Phi:\mathcal{D}_{\mathcal{N}}\to\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$) 是线性满射. 如果 Φ 保数值域闭包, 那么 Φ 双边保不交的秩一投影.

证明 因为 Φ 保数值域闭包, 因此 Φ 是单射. 令 $P\in\text{Alg}\mathcal{N}$ 是秩一投影, 注意到对任意的有限秩算子 F 都有 $W(F)=\overline{W(F)}$, 因此 $[0,1]=W(P)=W(\Phi(P))$, 所以 $\Phi(P)\geq 0$. 令 $\Phi(P)=B+C$, 其中 B 和 C 是 Alg$\mathcal{N}$ 中的正算子, 那么 $P=\Phi^{-1}(B)+\Phi^{-1}(C)$, 其中 $\Phi^{-1}(B)$ 和 $\Phi^{-1}(C)$ 是正算子. 由引理 7.7.1 知, 存在实数 $r\in[0,1]$ 使得 $\Phi^{-1}(B)=rP$ 且 $\Phi^{-1}(C)=(1-r)P$. 所以由 Φ 的线性知 $B=r\Phi(P)$, $C=(1-r)\Phi(P)$. 再次利用引理 7.7.1, 我们有 $\Phi(P)$ 是秩一投影的正数倍. 由于 $W(\Phi(P))=[0,1]$, 故 $\Phi(P)$ 是秩一投影.

假定秩一投影 $P, Q\in\text{Alg}\mathcal{N}$ 不交. 令 $\Phi(P)=x\otimes x$, $\Phi(Q)=y\otimes y$. 如果 x, y 属于套 $\mathcal{N}$ 的不同原子, 显然 $\Phi(P)$ 和 $\Phi(Q)$ 不交; 否则, 存在满足 $\dim(N\ominus N_-)\geq 2$ 的 $N\in\mathcal{N}$ 使得 $x,y\in N\ominus N_-$.

因为

$$\begin{aligned}&\{|\langle z,x\rangle|^2-|\langle z,y\rangle|^2 \mid \| z \|=1\}\\ =&W(\Phi(P-Q))=W(P-Q)=[-1,1],\end{aligned}$$

且只有当 z 和 x 线性相关，同时 $z\perp y$ 时，$|\langle z,x\rangle|^2-\langle z,y\rangle|^2$ 取最大值 1, 因此必须有 $\langle x,y\rangle=0$, 即 $\Phi(P)$ 和 $\Phi(Q)$ 不交. 因为 Φ^{-1} 保数值域闭包，相似地 Φ^{-1} 也保不交的秩一投影，所以 Φ 双边保不交的秩一投影.

对于情形 $\Phi:\mathcal{D}_{\mathcal{N}}\to\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$, 证明类似. 证毕.

设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的原子套且 $\{H_i \mid i\in\mathcal{J}\}$ 是 $\mathcal{N}$ 的所有原子的集合，那么 $H=\bigoplus_{i\in\mathcal{J}}H_i$. 显然在这种情形下 $\mathcal{D}_{\mathcal{N}}=\bigoplus_{i\in\mathcal{J}}\mathcal{B}(H_i)$.

引理 7.7.3 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的原子套且 $\{H_i \mid i\in\mathcal{J}\}$ 是 $\mathcal{N}$ 的所有原子的集合. 假定 $\Phi:\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ (或 $\Phi:\mathcal{D}_{\mathcal{N}}\to\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$) 是线性满射. 如果 Φ 保数值域闭包，那么存在一对一且到上的映射 $\theta:\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ 使得对每个 $i\in\mathcal{J}$, 都有 $\Phi(\mathcal{B}(H_i))=\mathcal{B}(H_{\theta(i)})$.

证明 令 $i\in\mathcal{J}$. 由引理 7.7.2, 只需考虑 H_i 的维数大于 1 的情形. 任取相互正交的单位向量 $u,v\in H_i$ 及 $\lambda\in\mathbb{C}$. 由引理 7.7.2, 存在正交的单位向量 x 和 y 使得 $\Phi(u\otimes u)=x\otimes x$, $\Phi(v\otimes v)=y\otimes y$. 令

$$\Phi((u+\lambda v)\otimes(u+\lambda v))=y_\lambda\otimes y_\lambda,$$

其中对某个 $j\in\mathcal{J}$, $y_\lambda\in H_j$ 且 $\| y_\lambda \|^2=|\lambda|^2+1$. 如果 $\dim H=2$, 那么 y_λ 是向量 x 和 y 的线性组合，从而 x 和 y 属于 H_j. 否则存在套 $\mathcal{N}$ 的某个原子中的非零向量 z 使得 z 与 x 和 y 都正交. 因为 Φ 是满射且双边保不交的秩一投影，因此在套 $\mathcal{N}$ 的某个原子中，存在与 u 和 v 正交的非零向量 w 使得 $\Phi(w\otimes w)=z\otimes z$. 由于 w 和 $u+\lambda v$ 正交，因此 $z\perp y_\lambda$, 所以 y_λ 是 x 和 y 的线性组合，从而 x 和 y 一定属于某个相同的原子 H_j, 即 Φ 把 $\mathcal{B}(H_i)$ 中不交的秩一投影映成 $\mathcal{B}(H_j)$ 中不交的秩一投影. 令 $\theta(i)=j$. 因为 Φ^{-1} 保数值域闭包，因此 θ 是 $\mathcal{J}$ 到其自身的一对一映射. 我们断

言 $\Phi(\mathcal{B}(H_i))\subseteq \mathcal{B}(H_{\theta(i)})$.

设 $A\in\mathcal{B}(H_i)$ 是任意的正算子. 如果 $\Phi(A)\notin\mathcal{B}(H_{\theta(i)})$, 那么存在 $i_1\neq i$ 使得 $P_{\theta(i_1)}\Phi(A)P_{\theta(i_1)}\neq 0$, 其中 P_i 代表到 H_i 上的投影. 因此存在单位向量 $x\in H_{\theta(i_1)}$ 和正数 r 使得 $P_{\theta(i_1)}\Phi(A)P_{\theta(i_1)}\geq rx\otimes x$. 由引理 7.7.2, 存在单位向量 $u\in H_{i_1}$ 使得 $\Phi(u\otimes u)=x\otimes x$. 因为 $A\in\mathcal{B}(H_i)$ 且 $u\in H_{i_1}$, 因此 $\overline{W(A-ru\otimes u)}\cap(-\infty,0)\neq\emptyset$. 然而由于 $\Phi(A)-rx\otimes x\geq 0$, 我们有 $\overline{W(\Phi(A-ru\otimes u))}\subset[0,+\infty)$, 与假设 Φ 保数值域闭包矛盾. 所以 $\Phi(A)\in\mathcal{B}(H_{\theta(i)})$, 即 $\Phi(\mathcal{B}(H_i))\subseteq\mathcal{B}(H_{\theta(i)})$. 相似可证 $\Phi^{-1}(\mathcal{B}(H_{\theta(i)}))\subseteq\mathcal{B}(H_i)$. 故结论成立. 证毕.

设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的原子套. 如果 K 是由 $\mathcal{N}$ 的某些原子张成的 H 的闭子空间, 那么对每个 $T\in\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$, 有 $P_KT=TP_K$, 即 K 是 T 的约化子空间.

定理 7.7.4 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的原子套且 $\Phi:\mathcal{D}_{\mathcal{N}}\to\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$ 是线性满射. 则 Φ 保数值域闭包当且仅当存在空间分解 $H=L_1\oplus L_2=K_1\oplus K_2$, 且存在酉算子 $U_l\in\mathcal{B}(L_l,K_l)$ $(l=1,2)$ 使得对每个 $T\in\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$, $\Phi(T)=U_1T_1U_1^*\oplus U_2T_2^{tr}U_2^*$, 其中 L_l, K_l $(l=1,2)$ 由 $\mathcal{N}$ 的某些原子张成, $T_l=P_{L_l}T$ $(l=1,2)$ 且 T_2^{tr} 表示 T_2 关于 L_2 所含原子的任意但预先固定的标准正交基组成的 L_2 基的转置.

证明 显然只需证必要性. 因为 Φ 保数值域闭包, 因此 $\Phi:\mathcal{D}_{\mathcal{N}}\to\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$ 是线性双射. 由引理 7.7.3, 存在一对一且到上的映射 $\theta:\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ 使得对每个 $i\in\mathcal{J}$, $\Phi_i=\Phi|_{\mathcal{B}(H_i)}:\mathcal{B}(H_i)\to\mathcal{B}(H_{\theta(i)})$ 是保数值半径的线性双射. 由文献 [37] 知, 对每个 $i\in\mathcal{J}$, 存在模为 1 的数 c_i 和酉算子 $U_i:H_i\to H_{\theta(i)}$ 使得要么对每个 $T_i\in\mathcal{B}(H_i)$, 有 $\Phi_i(T_i)=c_iU_iT_iU_i^*$; 要么对每个 $T_i\in\mathcal{B}(H_i)$, 有 $\Phi_i(T_i)=c_iU_iT_i^{tr}U_i^*$, 其中 T_i^{tr} 是 T_i 相对于 H_i 的任意但预先固定的标准正交基的转置. 注意到 Φ_i 是正映射, 因此 $c_i=1$. 令

$$\mathcal{J}_1=\{i\in\mathcal{J}\mid \text{对每个}T_i\in\mathcal{B}(H_i),\ \Phi_i(T_i)=U_iT_iU_i^*\},$$

$$\mathcal{J}_2=\{i\in\mathcal{J}\mid \text{对每个}T_i\in\mathcal{B}(H_i),\ \Phi_i(T_i)=U_iT_i^{tr}U_i^*\}.$$

那么 $\mathcal{J}=\mathcal{J}_1\cup\mathcal{J}_2$ 且对任意的 $T\in\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$, $T=T_1\oplus T_2$, 其中 $T_1=\sum\limits_{s\in\mathcal{J}_1}^{\oplus}T_s\in\sum\limits_{s\in\mathcal{J}_1}^{\oplus}\mathcal{B}(H_s)$, $T_2=\sum\limits_{t\in\mathcal{J}_2}^{\oplus}T_t\in\sum\limits_{t\in\mathcal{J}_2}^{\oplus}\mathcal{B}(H_t)$. 令 $U_1=\sum\limits_{s\in\mathcal{J}_1}^{\oplus}U_s$, $U_2=\sum\limits_{t\in\mathcal{J}_2}^{\oplus}U_t$, 则 $U=U_1\oplus U_2\in\mathcal{B}(H)$ 是酉算子且

$$\Phi(T)=\left(\sum_{s\in\mathcal{J}_1}^{\oplus}U_sT_sU_s^*\right)\bigoplus\left(\sum_{t\in\mathcal{J}_2}^{\oplus}U_tT_t^{tr}U_t^*\right)=U_1T_1U_1^*\oplus U_2T_2^{tr}U_2^*.$$

证毕.

接下来我们证明本节的另一主要结论, 它刻画了与极大原子套相应的套代数上保数值域闭包的线性映射. 极大原子套是常见的一类套. 例如, 令 H 是可分无限维的 Hilbert 空间, $\{e_i\mid i\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\{u_k\mid k\in\mathbb{N}\}$ 是其两组标准正交基. 令 $N_i=\bigvee\{e_j\mid j\leq i\}$ 且 $M_k=\bigvee\{u_j\mid j\leq k\}$, 那么 $\mathcal{N}=\{0,N_i\ (i\in\mathbb{Z}),H\}$, $\mathcal{M}=\{0,M_k\ (k\in\mathbb{N}),H\}$ 和 $\mathcal{L}=\{0,M_k^{\perp}\ (k\in\mathbb{N}),H\}$ 是无限维空间上最简单的极大原子套.

定理 7.7.5 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的极大原子套且 Φ: $\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是弱连续的线性满射, 则 Φ 保数值域闭包当且仅当下列断言之一成立:

(1) 存在满足 $U(\mathcal{N})=\mathcal{N}$ 的酉算子 $U\in\mathcal{B}(H)$ 使得对每个 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=UTU^*$.

(2) 存在满足 $U(\mathcal{N}^{\perp})=\mathcal{N}$ 的共轭酉算子 $U\in\mathcal{B}(H)$ 使得对每个 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=UT^*U^*$. 在此情形下, $\mathcal{N}^{\perp}$ 和 $\mathcal{N}$ 酉相似.

证明 显然只需证必要性. 令 $\{H_i\mid i\in\mathcal{J}\}$ 是 $\mathcal{N}$ 的所有原子的集合. 对每个 $i\in\mathcal{J}$, 取单位向量 $e_i\in H_i$. 因为 $\mathcal{N}$ 是极大原子套, 因此 $\{e_i\mid i\in\mathcal{J}\}$ 是 H 的一组标准正交基. 令 $i,j\in\mathcal{J}$. 对任意的 $N\in\mathcal{N}$, 如果 $e_j\in N$ 蕴涵 $e_i\in N$, 则称 $i<j$. 于是 $\mathcal{J}$ 是全序集. 令 $H_{i,j}$ 是由 e_i 和 e_j 张成的二维子空间且 $P_{i,j}$ 是到 $H_{i,j}$ 上的投影. 设 $T\in\mathcal{B}(H)$, 用 $\langle Te_j,e_i\rangle$ 代表 T 在位置 (i,j) 处的值.

由引理 7.7.2, Φ 保不交的秩一投影. 因此对任意的 $p\in\mathcal{J}$, 我们都有 $\Phi(e_p\otimes e_p)=e_{\theta(p)}\otimes e_{\theta(p)}$, 其中 $\theta:\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ 是一对一且到上的映射.

对任意的 $i\in\mathcal{J}$, 令

$$V_i=\{T\in \mathrm{Alg}\mathcal{N}\mid \text{对任意的}\alpha\in\mathcal{J},\langle Te_i,e_\alpha\rangle=\langle Te_\alpha,e_i\rangle=0\},$$

那么 V_i 是 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 的子空间.

断言 1 对满足 $i<k$ 的任意 $i,k\in\mathcal{J}$, 存在满足 $|\alpha_{ik}|=1$ 的 $\alpha_{ik}\in\mathbb{C}$ 使得 $\Phi(e_i\otimes e_k)=\alpha_{ik}e_{\theta(i)}\otimes e_{\theta(k)}$ 或 $\Phi(e_i\otimes e_k)=\alpha_{ik}e_{\theta(k)}\otimes e_{\theta(i)}$.

首先证明对任意的 $p\in\mathcal{J}$ 及任意的 $e_s\otimes e_t\in V_p$, 有 $\Phi(e_s\otimes e_t)\in V_{\theta(p)}$. 设 $\mu\in\mathbb{C}$ 且 $|\mu|=1$. 令 $A(\mu)=e_p\otimes e_p+\mu e_s\otimes e_t$, 则 $1=w(A(\mu))=w(\Phi(A(\mu)))$. 如果 $\langle[\Phi(e_s\otimes e_t)]e_{\theta(p)},e_{\theta(p)}\rangle\neq 0$, 那么取 $\mu\in\mathbb{C}$ 使得 $|\mu|=1$ 且

$$\langle[\Phi(e_p\otimes e_p+\mu e_s\otimes e_t)]e_{\theta(p)},e_{\theta(p)}\rangle>1,$$

则得 $w(\Phi(A(\mu)))>1$, 矛盾. 故 $\langle[\Phi(e_s\otimes e_t)]e_{\theta(p)},e_{\theta(p)}\rangle=0$. 现在不妨假定 $\theta(p)<\theta(k)$, 则

$$B=P_{H_{\theta(p),\theta(k)}}\Phi(e_p\otimes e_p+\mu e_s\otimes e_t)\mid_{H_{\theta(p),\theta(k)}}=\begin{pmatrix}1&b\\0&a\end{pmatrix},$$

其中 a 和 b 分别是 $\Phi(e_p\otimes e_p+e_s\otimes e_t)$ 在位置 $(\theta(k),\theta(k))$ 和 $(\theta(p),\theta(k))$ 处的表值. 如果 $\Phi(e_s\otimes e_t)\notin V_{\theta(p)}$, 那么对某个 $k\neq p$, 我们有 $b\neq 0$. 由命题 1.1.25, $W(B)$ 是以 1 和 a 为焦点的非退化椭圆盘, 所以

$$w(\Phi(e_p\otimes e_p+e_s\otimes e_t))=1<w(B)\leq w(\Phi(e_p\otimes e_p+e_s\otimes e_t)),$$

矛盾. 于是对每个秩一算子 $e_s\otimes e_t\in V_p$, 都有 $\Phi(e_s\otimes e_t)\in V_{\theta(p)}$.

现在容易看出 $\Phi(e_s\otimes e_t)$ 仅在位置 $(\theta(s),\theta(s))$, $(\theta(t),\theta(t))$ 和 $(\theta(s),\theta(t))$ 或 $(\theta(t),\theta(s))$ 具有非零值. 不失一般性, 我们可假定

$\theta(s) < \theta(t)$, 所以对某个 α, β 及 $\delta \in \mathbb{C}$,

$$\Phi(e_s \otimes e_t) = \alpha e_{\theta(s)} \otimes e_{\theta(s)} + \beta e_{\theta(t)} \otimes e_{\theta(t)} + \delta e_{\theta(s)} \otimes e_{\theta(t)}.$$

再次由命题 1.1.25, $W(e_s \otimes e_t)$ 是以 0 为中心, $\frac{1}{2}$ 为半径的圆盘且 $W(\Phi(e_s \otimes e_t))$ 是以 α 和 β 为焦点, 短轴长为 $|\delta|$ 的椭圆盘与 $\{0\}$ 生成的凸包. 由于 $W(e_s \otimes e_t) = W(\Phi(e_s \otimes e_t))$, 于是 $\alpha = \beta = 0$ 且 $|\delta| = 1$. 故断言成立.

断言 2 $\theta : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ 要么是序同构要么是反序同构.

否则, 存在 $l, j, k \in \mathcal{J}$ 使得 $l < j, l < k$ 同时 $\theta(k) < \theta(l) < \theta(j)$.

假定 $l < k < j$. 令 $S = e_k \otimes e_k + e_l \otimes e_k + e_l \otimes e_j + e_k \otimes e_j$. 由断言 1 及引理 7.7.2, $\Phi(S) = e_{\theta(k)} \otimes e_{\theta(k)} + \alpha e_{\theta(k)} \otimes e_{\theta(l)} + \beta e_{\theta(l)} \otimes e_{\theta(j)} + \gamma e_{\theta(k)} \otimes e_{\theta(j)}$, 其中 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$. 容易验证 $S + S^*$ 具有特征值 $-1, 0$ 和 3. 因为 $W(S) = W(\Phi(S))$, 由命题 1.1.28, $\Phi(S) + \Phi(S)^*$ 分别以 -1 和 3 作为最小和最大特征值. 设 M 是由 $\{e_{\theta(k)}, e_{\theta(l)}, e_{\theta(j)}\}$ 张成的线性子空间. 因为 $\det((\Phi(S) + \Phi(S)^* + I)|_M) = 0$ 且 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$, 所以 $\alpha\beta\bar{\gamma} = 1$, 其中 $\det(T)$ 代表矩阵 T 的行列式. 令

$$T = (1 + i)e_l \otimes e_k + ie_l \otimes e_j + (1 - i)e_k \otimes e_j,$$

其中 i 是虚数单位, 那么

$$\Phi(T) = (1 + i)\alpha e_{\theta(k)} \otimes e_{\theta(l)} + i\beta e_{\theta(l)} \otimes e_{\theta(j)} + \gamma(1 - i)e_{\theta(k)} \otimes e_{\theta(j)}.$$

因为 $-\sqrt{5}, 0$ 和 $\sqrt{5}$ 是 $T + T^*$ 的特征值且 $W(T) = W(\Phi(T))$, 因此由命题 1.1.28, $\Phi(T) + \Phi(T)^*$ 分别以 $-\sqrt{5}$ 和 $+\sqrt{5}$ 作为最小和最大特征值. 然而 $\alpha\beta\bar{\gamma} = 1$ 蕴涵 $\det((\Phi(T) + \Phi(T)^* - \sqrt{5}I)|_M) = -4 \neq 0$, 矛盾.

现在假定 $l < j < k$ 同时 $\theta(k) < \theta(l) < \theta(j)$. 令

$$S = e_l \otimes e_j + e_l \otimes e_k + e_j \otimes e_k + e_j \otimes e_j.$$

那么对满足 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ 的某些 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, 有

$$\Phi(S) = e_{\theta(j)} \otimes e_{\theta(j)} + \alpha e_{\theta(k)} \otimes e_{\theta(l)} + \beta e_{\theta(l)} \otimes e_{\theta(j)} + \gamma e_{\theta(k)} \otimes e_{\theta(j)}.$$

相似于上面的讨论，我们有 $\alpha\beta\bar{\gamma}=1$. 再令

$$T=(1+i)e_l\otimes e_j+ie_l\otimes e_k+(1-i)e_j\otimes e_k,$$

那么 $T+T^*$ 具有特征值 $-\sqrt{5}, 0$ 和 $\sqrt{5}$ 且

$$\Phi(T)=i\alpha e_{\theta(k)}\otimes e_{\theta(l)}+(1+i)\beta e_{\theta(l)}\otimes e_{\theta(j)}+\gamma(1-i)e_{\theta(k)}\otimes e_{\theta(j)},$$

易验证 $\det((\Phi(T)+\Phi(T)^*-\sqrt{5}I)|_M)=-4\neq 0$, 矛盾. 所以断言 2 成立.

断言 3 设 α_{ij} 正如断言 1 所述，则对满足 $i<k<j$ 的任意 $i,k,j\in\mathcal{J}$, 有 $\alpha_{ij}=\alpha_{ik}\alpha_{kj}$.

假定 $\theta:\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ 是序同构. 令 $A=e_i\otimes e_k+e_k\otimes e_j+e_i\otimes e_j$, 那么由断言 1,

$$\Phi(A)=\alpha_{ik}e_{\theta(i)}\otimes e_{\theta(k)}+\alpha_{kj}e_{\theta(k)}\otimes e_{\theta(j)}+\alpha_{ij}e_{\theta(i)}\otimes e_{\theta(j)},$$

其中 $|\alpha_{ik}|=|\alpha_{kj}|=|\alpha_{ij}|=1$. 易验证 $A+A^*$ 分别以 -1 和 2 作为最小和最大特征值. 因为 $W(A)=W(\Phi(A))$, 因此 $\Phi(A)+\Phi(A)^*$ 分别以 -1 和 2 作为最小和最大特征值. 令 L 是由 $\{\theta_{\theta(i)},\theta_{\theta(j)},\theta_{\theta(k)}\}$ 张成的线性子空间, 由于 $\det((\Phi(A)+\Phi(A)^*+I)|_L)=0$ 及 $|\alpha_{ik}\alpha_{kj}\overline{\alpha_{ij}}|=1$, 因此 $\alpha_{ik}\alpha_{kj}\overline{\alpha_{ij}}=1$, 于是 $\alpha_{ij}=\alpha_{ik}\alpha_{kj}$. 所以断言成立.

假定 $\theta:\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ 是反序同构，那么相似于上面的证明，也有 $\alpha_{ij}=\alpha_{ik}\alpha_{kj}$.

下证定理中的陈述 (1) 或 (2) 成立.

固定某个 $i_0\in\mathcal{J}$. 定义算子 $U\in\mathcal{B}(H)$ 如下:

$$Ue_i=\begin{cases}\alpha_{ii_0}e_{\theta(i)}, & \text{如果} i\leq i_0,\\ \overline{\alpha_{i_0i}}e_{\theta(i)}, & \text{如果} i>i_0.\end{cases}$$

显然 U 是酉算子.

如果 $\theta:\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ 是序同构，那么 $U(\mathcal{N})=\mathcal{N}$ 且对每个 $e_i\otimes$

$e_j \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 因为

$$\Phi(e_i \otimes e_j) = \alpha_{ij} e_{\theta(i)} \otimes e_{\theta(j)}$$

$$= \begin{cases} \alpha_{ii_0}\overline{\alpha_{ji_0}} e_{\theta(i)} \otimes e_{\theta(j)}, & \text{如果} i \le j \le i_0, \\ \alpha_{ii_0}\alpha_{i_0 j} e_{\theta(i)} \otimes e_{\theta(j)}, & \text{如果} i \le i_0 \le j, \\ \overline{\alpha_{i_0 i}}\alpha_{i_0 j} e_{\theta(i)} \otimes e_{\theta(j)}, & \text{如果} i_0 \le i \le j, \end{cases}$$

因此 $\Phi(e_i \otimes e_j) = Ue_i \otimes Ue_j$.

对任意秩一算子 $x \otimes y \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 存在 i_0 使得 $x = \sum\limits_{i \le i_0} \xi_i e_i$, $y = \sum\limits_{j \ge i_0} \eta_j e_j$, 因此

$$x \otimes y = \left(\sum_{i \le i_0} \xi_i e_i\right) \otimes \left(\sum_{j \ge i_0} \eta_j e_j\right) = \sum_{i \le i_0}\sum_{j \ge i_0} \xi_i \overline{\eta_j} e_i \otimes e_j.$$

由于 $w(\cdot)$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的范数且这个范数等价于通常的算子范数 (见 [84]), 所以 Φ 有界. 于是由断言 1 和引理 7.7.2,

$$\Phi(x \otimes y) = \sum_{i \le i_0 \le j} \xi_i \bar{\eta}_j \alpha_{ij} e_{\theta(i)} \otimes e_{\theta(j)}$$

$$= \sum_{i \le i_0 \le j} \xi_i \bar{\eta}_j Ue_i \otimes Ue_j = Ux \otimes Uy.$$

故对每个 $F \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(F) = UFU^*$. (注, 到现在为止, 我们还没有用到 Φ 的弱连续性假定). 因为 Φ 弱连续且 $\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$ 在 $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 中弱稠, 因此对每个 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = UTU^*$.

如果 $\theta : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ 是反序同构, 显然 $U(\mathcal{N}^{\perp}) = \mathcal{N}$, 所以 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}^{\perp}$ 酉相似. 由断言 3 知, $\Phi(e_i \otimes e_j) = \alpha_{ij} e_{\theta(j)} \otimes e_{\theta(i)} = Ue_j \otimes Ue_i$. 所以

$$\Phi(x \otimes y) = \sum_{i \le i_0 \le j} \xi_i \bar{\eta}_j \alpha_{ij} e_{\theta(j)} \otimes e_{\theta(i)}$$

$$= \sum_{i \le i_0 \le j} \xi_i \bar{\eta}_j Ue_j \otimes Ue_i = UJy \otimes UJx,$$

其中 J 是 7.6 节中定理 7.6.1 前所述共轭线性算子. 因此对所有的 $F\in\mathrm{Alg}_{\mathcal{F}}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(F)=UJF^*JU^*$. 令 $V=UJ$, 则 V 是共轭酉算子, $V(\mathcal{N}^{\perp})=\mathcal{N}$. 由于 Φ 和 $*$ 运算是弱连续的, 因此对所有的 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=VT^*V^*$, 即定理中 (2) 成立. 注意, 若令 T^{tr} 代表 T 关于 H 的标准正交基 $\{e_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ 的转置, 则 $JT^*J=T^{tr}$, 故也有 $\Phi(T)=UT^{tr}U^*$ 对所有 T 成立. 证毕.

注 7.7.1 如果 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}^{\perp}$ 不酉相似, 特别地, 如果它们不序同构, 那么定理 7.7.5 中的情形 (2) 不出现.

§7.8 保数值半径的线性映射

作为第 7.7 节结论的应用, 本节我们刻画与极大原子套相应的套代数或原子套代数的对角代数上保数值半径的线性映射. 下面的结论是定理 7.7.5 的直接推论.

定理 7.8.1 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的极大原子套且 Φ: $\mathrm{Alg}\mathcal{N}\to\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是弱连续的线性满射, 则 Φ 保数值域当且仅当下列断言之一成立:

(1) 存在满足 $U(\mathcal{N})=\mathcal{N}$ 的酉算子 $U\in\mathcal{B}(H)$ 使得对每个 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=UTU^*$.

(2) 存在满足 $U(\mathcal{N}^{\perp})=\mathcal{N}$ 的共轭酉算子 $U\in\mathcal{B}(H)$ 使得对每个算子 $T\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T)=UT^*U^*$. 在这种情形下, $\mathcal{N}^{\perp}$ 和 $\mathcal{N}$ 酉相似.

令 $\mathcal{T}_n$ 代表 $n\times n$ 上三角复矩阵代数.

推论 7.8.2 设 $\Phi:\mathcal{T}_n\to\mathcal{T}_n$ 是线性映射, 则 Φ 保数值域当且仅当下列断言之一成立:

(1) 存在对角酉矩阵 U 使得对每个 $T\in\mathcal{T}_n$, $\Phi(T)=UTU^*$.

(2) 存在反对角酉矩阵 U 使得对每个 $T\in\mathcal{T}_n$, $\Phi(T)=UT^{tr}U^*$, 其中反对角矩阵指仅在满足 $i+j=n+1$ $(1\le i,j\le n)$ 的位置 (i,j) 具有非零值的矩阵.

证明 因为 $\mathcal{J}=\{1,\cdots,n\}$, 因此惟一的序同构 $\theta:\mathcal{J}\to\mathcal{J}$

是恒等映射 $\theta(i)=i$ 且惟一的反序同构 $\theta:\mathcal{J}\to\mathcal{J}$ 是映射 $i\mapsto n-i+1$. 所以定理 7.7.5 中形式 (1) 中的酉矩阵 U 是对角矩阵且在形式 (2) 中的反酉矩阵是反对角矩阵, 从而结论成立. 证毕.

本节的剩余部分刻画原子套代数上保数值半径的线性映射. 下面的引理利用数值半径刻画了恒等算子的倍数. 记

$$\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{C}\ \mid\ |\lambda|=1\}.$$

引理 7.8.3 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的原子套. 则 $A\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ 是恒等算子 I 的倍数当且仅当对每个 $B\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 存在 $\lambda\in\Lambda$ 使得 $w(A+\lambda B)=w(A)+w(B)$.

证明 显然, 如果 A 是 I 的倍数, 那么 A 满足引理的条件, 即必要性成立.

下证充分性. 假定对每个 $B\in\mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 存在 $\lambda\in\Lambda$ 使得 $w(A+\lambda B)=w(A)+w(B)$. 令 $\{H_i\mid i\in\mathcal{J}\}$ 是 $\mathcal{N}$ 的所有原子的集合. 我们将证明 A 是 I 的倍数.

断言 1 对每个 H_i 及满足 $\|x\|=1$ 的 $x\in H_i$, 有 $|\langle Ax,x\rangle|=w(A)$.

相反地, 假定存在 H_i 和单位向量 $x\in H_i$ 使得 $|\langle Ax,x\rangle|<w(A)$. 令 $B=x\otimes x$, 显然 $w(B)=1$. 取 r 使得 $|\langle Ax,x\rangle|<r<w(A)$, 则存在 $\varepsilon>0$ 使得当 $|y-x|<\varepsilon$ 时, 有 $|\langle Ay,y\rangle|<r$. 因此如果存在 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $\|y-\alpha x\|<\varepsilon$, 那么 $|\langle Ay,y\rangle|<r$, 且当 $\|y\|=1$ 时, 有

$$|\langle(A+\lambda B)y,y\rangle|<|\langle Ay,y\rangle|+|\langle By,y\rangle|<r+|\langle x,y\rangle|^2\leq r+1.$$

假定 $y\in H$ 是单位向量使得对每个 $\alpha\in\Lambda$, 有 $\|y-\alpha x\|\geq\varepsilon$. 则对任意的 $\alpha\in\Lambda$,

$$\varepsilon^2\leq\langle y-\alpha x,y-\alpha x\rangle=2-2\mathrm{Re}\langle y,\alpha x\rangle,$$

所以 $|\langle y,x\rangle|\leq 1-\frac{1}{2}\varepsilon^2$. 令 $k=\min\{r+1,w(A)+1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\}$, 那么对

每个 $\lambda \in \Lambda$ 及满足 $\| y \|=1$ 的 $y \in H$, 有

$$|\langle (A+\lambda B)y, y\rangle| \leq |\langle Ay, y\rangle| + |\langle y, x\rangle| \leq k.$$

于是 $w(A+\lambda B) < w(A)+w(B)$, 矛盾.

因此对任意的 $i \in \mathcal{J}$, $W(P_iA|_{H_i}) \subset \{\lambda \mid |\lambda| = w(A)\}$. 由命题 1.1.25 知, 数值域是凸集, 故 $W(P_iA|_{H_i})$ 是单点集. 所以由命题 1.1.26, 存在满足 $|\alpha_i| = w(A)$ 的某个 $\alpha_i \in \mathbb{C}$ 使得 $P_iA|_{H_i} = \alpha_i I_i$.

断言 2 $A = \sum\limits_{i \in \mathcal{J}}^{\oplus} \alpha_i I_i$.

假定存在某个 $i, j \in \mathcal{J}$ 使得 $i < j$ 且 $B_0 = P_iA|_{H_j} \neq 0$, 那么存在单位向量 $e \in H_i$ 和 $u \in H_j$ 使得 $b = \langle B_0u, e\rangle \neq 0$. 令

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_i I_i & B_0 \\ 0 & \alpha_j I_j \end{pmatrix}.$$

因为 $W(\begin{pmatrix} \alpha_i & b \\ 0 & \alpha_j \end{pmatrix}) \subset W(B)$ 且 $W(\begin{pmatrix} \alpha_i & b \\ 0 & \alpha_j \end{pmatrix})$ 是以 α_i 和 α_j 为焦点, 短半轴长为 $|b|$ 的椭圆盘, 因此 $w(A) = |\alpha_i| < w(B) \leq w(A)$, 矛盾. 故断言成立.

断言 3 存在 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使得对每个 $i \in \mathcal{J}$, 有 $\alpha_i = \alpha$.

对于 $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{N}$, 令

$$S_T = \{x \in H \mid \ |\langle Tx, x\rangle| = w(T), \| x \| = 1\}.$$

对满足 $i < j$ 的任意 $i, j \in \mathcal{J}$, 令 $B = x \otimes y$, 其中 $x \in H_i$ 和 $y \in H_j$ 是单位向量. 我们有

$$S_B = \left\{ \mu x + \delta y \mid \ |\mu| = |\delta| = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \neq \emptyset.$$

对某个 $\lambda \in \Lambda$, 条件 $w(A+\lambda B) = w(A) + w(B)$ 表明 $S_A \cap S_B \neq \emptyset$, 所以

$$\frac{|\alpha_i + \alpha_j|}{2} = w(A) = |\alpha_i| = |\alpha_j|,$$

从而 $\alpha_i = \alpha_j$. 即存在满足 $|\alpha| = w(A)$ 的某个 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使得 $A = \alpha I$. 证毕.

下面是本节的主要结论之一.

定理 7.8.4 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的极大原子套. 令 Φ : Alg$\mathcal{N}$ →Alg$\mathcal{N}$ 是弱连续的线性满射, 则 Φ 保数值半径当且仅当下列断言之一成立:

(1) 存在满足 $U(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ 的酉算子 $U \in \mathcal{B}(H)$ 和满足 $|\xi| = 1$ 的复数 ξ 使得对每个 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = \xi UTU^*$.

(2) 存在满足 $U(\mathcal{N}^\perp) = \mathcal{N}$ 的共轭酉算子 $U \in \mathcal{B}(H)$ 和满足 $|\xi| = 1$ 的复数 ξ 使得对每个 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, 有 $\Phi(T) = \xi UT^*U^*$, 在这种情形下, $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{N}^\perp$ 酉相似.

证明 设 Φ 保数值半径, 显然 Φ 是单射. 易证 Φ^{-1} 也保数值半径. 令 $A = \Phi(I)$. 于是对任意的 $B \in$Alg$\mathcal{N}$, 存在 $\lambda \in \Lambda$, 使得

$$w(A+\lambda B) = w(I+\lambda\Phi^{-1}(B)) = w(I)+w(\Phi^{-1}(B)) = w(A)+w(B).$$

由引理 7.8.3 知, 存在某个 $\xi \in \mathbb{C}$ 使得 $\Phi(I) = \xi I$. 因为 Φ 保数值半径, 因此 $|\xi| = 1$. 令 $\Psi(\cdot) = \xi^{-1}\Phi(\cdot)$, 那么 $\Psi(I) = I$ 且 Ψ 保数值半径.

我们断言 Ψ 保数值域闭包, 即对所有的 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, 有 $\overline{W(\Psi(T))} = \overline{W(T)}$.

对任意的 $T \in$Alg$\mathcal{N}$, 因为 $W(T)$ 是有界凸集, 因此 $\overline{W(T)}$ 是复平面的紧凸子集. 假定存在 $\mu \in \mathbb{C}$ 使得 $\mu \in W(\Psi(T))\backslash\overline{W(T)}$, 那么存在以 $\mathbb{C}$ 中的某个点 λ 为中心, 半径充分大的圆使得 $\overline{W(T)}$ 包含在这个圆内, 但 μ 在这个圆的外部. 所以对任意的 $z \in W(T)$, 我们有 $|z-\lambda| < |\mu-\lambda|$. 于是

$$w(T-\lambda I) < |\mu-\lambda| \le w(\Psi(T)-\lambda I) = w(\Psi(T-\lambda I)) = w(T-\lambda I),$$

矛盾. 因此 $W(\Psi(T)) \subseteq \overline{W(T)}$, 从而 $\overline{W(\Psi(T))} \subseteq \overline{W(T)}$. 相同的讨论用于 Ψ^{-1}, 我们也有 $\overline{W(T)} \subseteq \overline{W(\Psi(T))}$, 因此断言成立.

现在由定理 7.7.5 知, 结论成立. 证毕.

推论 7.8.5 设 $\Phi:\mathcal{T}_n\to\mathcal{T}_n$ 是线性映射，则 Φ 保数值半径当且仅当下列断言之一成立：

(1) 存在对角酉矩阵 U 和满足 $|\xi|=1$ 的复数 ξ 使得对每个 $T\in\mathcal{T}_n$, $\Phi(T)=\xi UTU^*$.

(2) 存在反对角酉矩阵 U 和满足 $|\xi|=1$ 的复数 ξ 使得对每个 $T\in\mathcal{T}_n$, $\Phi(T)=\xi UT^{tr}U^*$, 其中 T^{tr} 代表 T 的转置矩阵.

对于原子套代数的对角代数上保数值半径的映射，我们有下列刻画.

定理 7.8.6 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 H 上的原子套且 $\Phi:\mathcal{D}_{\mathcal{N}}\to\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$ 是线性满射，则 Φ 保数值半径当且仅当存在空间分解 $H=L_1\oplus L_2=K_1\oplus K_2$ 且存在酉算子 $A\in\mathcal{Z}(\mathcal{D}_{\mathcal{N}})$ 及酉算子 $U_l\in\mathcal{B}(L_l,K_l)$ $(l=1,2)$ 使得对每个 $T\in\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$, $\Phi(T)=A_1U_1T_1U_1^*\oplus A_2U_2T_2^{tr}U_2^*$, 其中 L_l, K_l $(l=1,2)$ 由 $\mathcal{N}$ 的某些原子张成， $T_l=P_{L_l}T$, $A_l=P_{K_l}A$ $(l=1,2)$ 且 T_2^{tr} 代表 T_2 关于 L_2 中原子的任意但预先固定基组成的 L_2 基的转置.

证明 令 $A=\Phi(I)$, 则 $w(A)=1$. 设对任意的 $B\in\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$, 存在 $\lambda\in\Lambda$ 使得 $w(A+\lambda B)=w(A)+w(B)$. 如果用 $\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$ 代替 Alg$\mathcal{N}$, 那么引理 7.8.3 证明中的断言 1 和断言 2 仍然成立. 所以对满足 $|\alpha_i|=w(A)=1$ 的每个 $i\in\mathcal{J}$, 我们有 $A=\oplus_{i\in\mathcal{J}}\alpha_iI_i\in\mathcal{Z}(\mathcal{D}_{\mathcal{N}})$. 对任意的 $T\in\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$, 令 $\Psi(T)=A^{-1}\Phi(T)$. 因为 $\Phi(T)=\bigoplus_{i\in\mathcal{J}}S_i$, 因此 $\Psi(T)=\bigoplus_{i\in\mathcal{J}}{\alpha_i}^{-1}S_i$ 且

$$w(\Psi(T))=\sup_{i\in\mathcal{J}}\{w({\alpha_i}^{-1}S_i)\}=w(\Phi(T))=w(T),$$

所以 $\Psi:\mathcal{D}_{\mathcal{N}}\to\mathcal{D}_{\mathcal{N}}$ 保单位元且保数值半径. 相似于定理 7.8.4 的证明可知， Ψ 保数值域闭包. 现在应用定理 7.7.4 即可. 证毕.

令 $\mathcal{D}_n$ 代表 $n\times n$ 复对角矩阵代数. 注意到如果 $T\in\mathcal{D}_n$, 那么 $T^{tr}=T$.

推论 7.8.7 设 $\Phi:\mathcal{D}_n\to\mathcal{D}_n$ 是线性映射，则 Φ 保数值域当且仅当存在置换矩阵 U 使得对所有的 $T\in\mathcal{D}_n$, 有 $\Phi(T)=UTU^{tr}$.

推论 7.8.8 设 $\Phi:\mathcal{D}_n\to\mathcal{D}_n$ 是线性映射，则 Φ 保数值半径当且仅当存在置换矩阵 U 和酉矩阵 $A\in\mathcal{D}_n$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{D}_n$，有 $\Phi(T)=AUTU^{tr}$.

§7.9 注　记

由于套代数是非半单代数，这使得其上线性保持问题的研究变得更为困难，迄今只有少数几篇文章开始进行讨论，且大多局限于上三角矩阵代数情形. (例如参见文献 [21], [47], [96], [136], [166] 和 [200]). 本章内容是第一次对无限维空间套代数上的线性保持问题进行了较系统的研究.

§7.1 和 §7.2 的内容包含在 Cui, Hou, Li [53] 和 Hou, Cui [110] 中. 从前面几章的讨论可见，保秩问题在标准算子代数保持问题的研究中有着基本的重要性，因为许多保持问题可转化到保秩映射的讨论 (也可参见文献 [18—19], [21—22], [26], [30], [46], [82—83] [86], [97—98], [107], [117], [119], [124], [145—146], [152], [163], [166], [169], [183], [193],[197—199])，因此有理由相信保秩映射的刻画对于研究套代数上的其他保持问题也是基本重要的. 但是对于套代数上的保秩映射，在 Hou 和 Cui 的工作之前，只有少数几篇文章进行了初步探讨，而且主要局限于上三角矩阵代数的情形 (参见文献 [21], [47] 和 [166])，而对于无限维空间上的套代数来说，只有 Wei, Hou [200] 一篇文章对特殊套进行了一些讨论. 引理 7.1.1 和 7.1.2 的证明技巧本质上来源于 [200].

在文献 [96] 中，C.-J. Hou 和 D.-G. Han 证明了作用在 Banach 空间上套代数的每个同构都是空间的. 应用 7.1 节的定理 7.1.7, 定理 7.2.1 证明了不仅套代数的每个同构，而且每个反同构也是空间的，从而也得到了两个套代数同构 (或反同构) 的充分必要条件.

关于算子代数上局部自同构的刻画，在 1990 年， Larson 和 Sourour [141] 证明了如果 X 是有限维的复空间，那么 $\mathcal{B}(X)$ 上的每个局部自同构的线性映射是自同构或者是反自同构；如果 X 是

无限维的复 Banach 空间，则 $\mathcal{B}(X)$ 上的每个局部自同构的线性满射是自同构. 1993 年，Brešar 和 Šemrl [26] 证明了这一结论对无限维实 Banach 空间的情形也成立. 当 H 是可分无限维的 Hilbert 空间时，Brešar 和 Šemrl [28] 在 1995 年证明了 $\mathcal{B}(H)$ 的每个局部自同构线性映射是自同构，从而去掉满值域性的假设条件.

在文献 [136] 中，Kezlan 证明了上三角矩阵代数的每个自同构都是内的，定理 7.2.5 把这个结论推广到上三角算子矩阵代数的情形.

§7.3 分别取自 [53] 和 [109]. 上三角矩阵代数上完全秩不增线性映射的刻画问题首先是由 Hadwin 提出的，后来被 Cui, Hou, Li [53] 所解决. 对于一般套代数的情形，问题 2.2.2 仍未解决.

§7.4, §7.5 和 §7.6 取材于 Cui, Hou [55] 和 [60]. 由文献 [85] 知，Hilbert 空间上的每个套代数中，有限秩算子理想都包含在幂等元全体生成的线性子空间中. 引理 7.5.3 把这个结论推广到 Banach 空间套代数的情形.

在 1996 年，Šemrl [189] 证明了 $\mathcal{B}(H)$ 上保单位元且双边保多项式 f 的零化元的线性满射是自同构或反自同构，其中 H 是无限维的希尔伯特空间，f 是次数大于 1 的复多项式. 一个自然的问题是在比较弱的假定下，比如仅假定映射是单边保持的并且去掉保单位性的假定，是否可得出类似的结论？§6.1—§6.2 在多项式满足常数项为零，没有重根且次数大于 1 的条件下，分别对复 Banach 空间上的标准算子代数，vN 代数及 $\mathcal{B}(H)$ 上的线性映射回答了这一问题. §7.6 则在套代数的情形给出这一问题的回答.

§7.7 和 §7.8 来源于 Cui, Hou [57]. 由于数值域和数值半径的概念与许多不同领域有着广泛的联系并且广泛地应用于这些领域(参见文献 [95] 第一章)，因此它们被深入地研究. 所以研究算子代数上保数值域或数值半径的线性映射也引起了人们相当大的兴趣 (参见文献 [36—37], [76], [143], [146], [170], [177]). 在 1990 年 Omladič [170] 证明了 $\mathcal{B}(H)$ 上保数值域的线性满射是 *- 自同构或 *- 反自同构. 在 1995 年，Chan [36] 证明了 $\mathcal{B}(H)$ 上保数值半

径的线性满射是 *- 自同构或 *- 反自同构的模为 1 的常数倍. 在 2001 年, Li, Šemrl 和 Soares [146] 在上三角矩阵代数及上三角矩阵代数的对角代数上讨论了相关的问题, 利用归纳法证明了本节的推论 7.8.2, 7.8.5 和 7.8.7.

第八章　初等算子的刻画

初等算子是算子代数上一类重要的线性映射，是连结算子理论和算子代数理论的桥梁. 本章借助线性保持问题研究的技巧，讨论正初等算子，完全正初等算子，保谱初等算子的刻画以及一般初等算子的抽象刻画问题.

第一节给出保自伴性初等算子和完全正初等算子的一般形式. 第二节利用局部线性组合概念建立正初等算子的整体结构定理，在某种意义下，正初等算子的刻画有助于我们理解这三类初等算子之间的联系与差异所在. 第三节讨论算子的线性组合与局部线性组合之间的关系. 第四节则应用这些关系给出正初等算子何时完全正的几个简单的判断准则. 第五节探讨初等算子的插值性质，给出有限秩初等算子的刻画，得到有限秩线性映射成为初等算子的充分必要条件是它按弱算子拓扑连续且把有限秩算子映为有限秩算子，进而证明了 $\mathcal{B}(X)$ 上的线性映射是初等算子当且仅当它是初等算子的局部线性组合. 第六节利用算子的秩给出初等算子的抽象刻画，证明了 $\mathcal{B}(X)$ 上的线性映射是初等算子当且仅当它 σ- 弱连续且完全 k- 秩不增. 第七节则给出保谱 (或保点谱) 正 (或完全正) 初等算子的刻画以及长度为 2 的保谱 (保点谱) 初等算子的刻画.

§8.1　自伴和完全正初等算子

设 X 和 Y 是数域 $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的 Banach 空间， $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(Y)$ 是线性映射. 如果存在 $\mathcal{B}(X,Y)$ 中的有限个算子 $A_1,\cdots,A_n$ 以及 $\mathcal{B}(Y,X)$ 中的有限个算子 $B_1,\cdots,B_n$ 使得

$$\Phi(T)=\sum_{i=1}^{n}A_iTB_i\qquad\forall T\in\mathcal{B}(X),$$

称 Φ 是初等算子. 我们有时也把初等算子记为 $\Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{n}A_i(\cdot)B_i$, 而非负整数

$$l(\Phi)=\min\{m \mid \text{存在 } C_1,\cdots,C_m,D_1,\cdots,D_m\in\mathcal{B}(X)$$
$$\text{使得 } \Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{m}C_i(\cdot)D_i\}$$

称之为初等算子 Φ 的长度. 设 H,K 为 Hilbert 空间, 如果对每个正算子 $P\in\mathcal{B}(H)$ (即对任意的 $x\in H$ 都有 $\langle Px,x\rangle=\langle x,Px\rangle\geq 0$), 其像 $\Phi(P)$ 也是正的, 则称 Φ 为 $\mathcal{B}(H)$ 上的 (保) 正初等算子; 设 k 为正整数, 如果 $\Phi_k:\mathcal{B}(H)\otimes M_k(\mathbb{F})\to\mathcal{B}(H)\otimes M_k(\mathbb{F})$ (由 $\Phi_k((T_{ij})_{k\times k})=(\Phi(T_{ij}))_{k\times k}$ 确定) 是 (保) 正的, 则称 Φ 是 k- 正的; 如果对每个正整数 k, Φ_k 都是 (保) 正的, 则称 Φ 是完全正的; 如果对每个自伴算子 $A\in\mathcal{B}(H)$, $\Phi(A)$ 也是自伴的, 称 Φ 是保自伴的.

以下设 Φ 是由算子组 $\{A_i\}_{i=1}^n$, $\{B_i\}_{i=1}^n\subset\mathcal{B}(H)$ 导出的 $\mathcal{B}(H)$ 上的初等算子, 即对任意的 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T)=\sum_{i=1}^{n}A_iTB_i$.

定理 8.1.1 初等算子 Φ 为保自伴映射的充分必要条件是存在 $\{D_i\}_{i=1}^m\subset\mathcal{B}(H)$, $m\leq n$, 使得

$$\Phi(T)=\sum_{j=1}^{l}D_jTD_j^*-\sum_{j=l+1}^{m}D_jTD_j^*.$$

证明 由 Φ 的保自伴性得对任意的 $T\in\mathcal{B}(H)$, 有下面恒等式成立:

$$\sum_{i=1}^{n}A_iTB_i=\sum_{i=1}^{n}B_i^*TA_i^*. \tag{8.1.1}$$

不失一般性, 可设 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{B_i\}_{i=1}^n$ 是线性无关组, 即 $l(\Phi)=n$.

那么存在满秩的 n 阶对称矩阵 $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ 使得

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_j^*. \tag{8.1.2}$$

取 n 阶酉矩阵 $U=(u_{ij})$, 正数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 及整数 l $(0\le l\le n)$ 使得

$$U^*(a_{ij})U = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_l,-\lambda_{l+1},\cdots,-\lambda_n),$$

令 $(C_1,\cdots,C_n)=(A_1,\cdots,A_n)U$, 则 $C_i\in\mathcal{B}(H)$ 是 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 的线性组合. 由 (8.1.2) 式, 有

$$\begin{aligned}
\Phi(T) &= \sum_{i=1}^{n} A_i T\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_j^*\right)\\
&= (A_1,\cdots,A_n)\begin{pmatrix} T & 0 & \cdots & 0\\ 0 & T & \cdots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & T\end{pmatrix}(a_{ij})\begin{pmatrix} A_1^*\\ \vdots\\ A_n^*\end{pmatrix}\\
&= (C_1,\cdots,C_n)\begin{pmatrix} T & 0 & \cdots & 0\\ 0 & T & \cdots & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & T\end{pmatrix}U^*(a_{ij})U\begin{pmatrix} C_1^*\\ \vdots\\ C_n^*\end{pmatrix}\\
&= \sum_{i=1}^{l}\lambda_i C_i T C_i^* - \sum_{i=l+1}^{n}\lambda_i C_i T C_i^*.
\end{aligned} \tag{8.1.3}$$

现在只要取 $D_i=\sqrt{\lambda_i}C_i$ 即可. 证毕.

定理 8.1.2 初等算子 Φ 为完全正的充要条件是存在 $\{D_j\}_{j=1}^m$, 使得

$$\Phi(\cdot)=\sum_{j=1}^{m} D_j(\cdot)D_j^*.$$

证明 设 $\Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{n}A_i(\cdot)B_i$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的初等算子，记

$$H^{(k)}=\overbrace{H\oplus\cdots\oplus H}^{k},\qquad A^{(k)}=\overbrace{A\oplus\cdots\oplus A}^{k},$$

则 $\Phi_k(\cdot)=\sum_{i=1}^{n}A_i^{(k)}(\cdot)B_i^{(k)}$ 是 $\mathcal{B}(H^{(k)})$ 上的初等算子. 注意到 $D^{*(k)}=(D^{(k)})^*$, 而形如 $\sum_{j=1}^{m}D_j(\cdot)D_j^*$ 的初等算子是正的，故条件的充分性显然.

下证必要性. 仍不妨设 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{B_i\}_{i=1}^n$ 都是线性无关组，因此时 Φ 也是保自伴的, 由定理 8.1.1 有 $\Phi_k(\cdot)=\sum_{i=1}^{l}D_i^{(k)}(\cdot)D_i^{*(k)}-\sum_{i=l+1}^{n}D_i^{(k)}(\cdot)D_i^{*(k)}$. 注意到 $\{D_i\}_{i=1}^n$ 是线性无关的. 下面证明 $l=n$. Φ_k 的保正性蕴涵对任意的 $f,g\in H^{(k)}$ 有

$$\sum_{i=1}^{l}|\langle D_i^{(k)}f,g\rangle|^2-\sum_{i=l+1}^{n}|\langle D_i^{(k)}f,g\rangle|^2\geq 0. \tag{8.1.4}$$

如果 $l<n$, 因 D_n 不属于 $\{D_i\}_{i=1}^l$ 张成的线性子空间, 故存在 k 及 $\{x_j\}_{j=1}^k$ 和 $\{y_j\}_{j=1}^k\subset H$ 使得 $\sum_{j=1}^{k}\langle D_ix_j,y_j\rangle=0\ (i=1,\cdots,l)$, 而 $\sum_{j=1}^{k}=\langle D_nx_j,y_j\rangle\neq 0$. 只要令 $f=x_1\oplus\cdots\oplus x_k$, $g=y_1\oplus\cdots\oplus y_k\in H^{(k)}$, 并代入 (8.1.4) 式，则可得矛盾. 证毕.

注意，算子组 $\{D_1,\cdots,D_m\}$ 可选择使其线性无关.

§8.2 正初等算子的刻画

本节给出正初等算子的刻画. 在陈述主要定理之前，我们先给出几个定义.

定义 8.2.1 设 $l, k \in \mathbb{N}$. 令 $A_1, \cdots, A_k$, $C_1, \cdots, C_l \in \mathcal{B}(H, K)$. 如果对每个 $x \in H^{(n)}$, 存在 $l \times k$ 复矩阵 $(\alpha_{ij}(x))$ (依赖于 x) 使得

$$C_i^{(n)}x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(x) A_j^{(n)} x, \qquad i = 1, 2, \cdots, l.$$

称 $(C_1, \cdots, C_l)$ 是 $(A_1, \cdots, A_k)$ 的 n- 局部线性组合， $\alpha_{ij}(x)$ 称为在 x 点的局部系数矩阵. 进而, 如果存在常数 $M > 0$, 而任意点 $x \in H^{(n)}$ 的局部系数矩阵可选择使其范数 $\|(\alpha_{ij}(x))\|$ 以 M 为界, 称 $(C_1, \cdots, C_l)$ 是 $(A_1, \cdots, A_k)$ 的 n- 正则局部线性组合; 如果 $M \leq 1$, 称 $(C_1, \cdots, C_l)$ 是 $(A_1, \cdots, A_k)$ 的 n- 压缩局部线性组合; 如果存在矩阵 (α_{ij}) 使得对任意的 i, 都有 $C_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} A_j$, 称 $(C_1, \cdots, C_l)$ 是 $(A_1, \cdots, A_k)$ 的具有系数矩阵 (α_{ij}) 的线性组合.

在 $n = 1$ 的情形, 我们将省略 " n ". 有时我们也把 $\{A_i\}_{i=1}^k$ 记为 $(A_1, \cdots, A_k)$.

令 $\mathcal{B}_M(H, K) = \{X \in \mathcal{B}(H, K) \mid \|X\| \leq M\}$. 显然 $(C_1, \cdots, C_l)$ 是 $(A_1, \cdots, A_k)$ 的 n- 局部线性组合 (或压缩局部线性组合) 当且仅当存在映射 $\Omega : H^{(n)} \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^{(k)}, \mathbb{C}^{(l)})$ (或 $H^{(n)} \to \mathcal{B}_1(\mathbb{C}^{(k)}, \mathbb{C}^{(l)})$) 使得

$$(C_1^{(n)}x \cdots C_l^{(n)}x)^T = \Omega(x)(A_1^{(n)}x \cdots A_k^{(n)}x)^T.$$

其中当 (λ_{ij}) 是数量矩阵时, 我们用 $(\lambda_{ij})(T_{ij})$ 代表两个算子矩阵的乘积 $((\lambda_{ij}) \otimes I)(T_{jk}) = (\lambda_{ij} I)(T_{jk})$.

本节我们将在更一般的情况下展开讨论.

对于无限序列 $\mathbf{A} = (A_1, \cdots, A_n, \cdots)$, 我们用 $\mathbf{A}^T$ 代表 $\mathbf{A}$ 的限制性转置, 即

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

(注意，如果 A_i 为数值矩阵或 Hilbert 空间上的算子，则通常意义下的转置应为 $\mathbf{A}^{tr}=(A_1^{tr},\cdots,A_n^{tr},\cdots)^T$.) 如果 $A_i\in\mathcal{B}(H,K)$, 并且如果 $\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i^*A_i\right\|$ 和 $\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_iA_i^*\right\|$ 都有限，那么 $\mathbf{A}:H^{(\infty)}\to K$ 和 $\mathbf{A}^T:H\to K^{(\infty)}$ 均为有界算子. 下面的引理对于本节的目的起着关键性的作用.

引理 8.2.1 设 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty},\{C_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathcal{B}(H,K)$ 使得 $\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i^*A_i\right\|<\infty$, $\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_iA_i^*\right\|<\infty$, $\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}C_j^*C_j\right\|<\infty$ 和 $\left\|\sum\limits_{i=1}^{\infty}C_jC_j^*\right\|<\infty$. 那么下列陈述等价:

(i) 对所有的正算子 $P\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_iPA_i^*\geq\sum\limits_{i=1}^{\infty}C_jPC_j^*$.

(ii) 对所有的一秩投影 $P\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_iPA_i^*\geq\sum\limits_{i=1}^{\infty}C_jPC_j^*$.

(iii) 存在映射 $\Omega:H\to\mathcal{B}_1(l_2)$ 使得对任意的 $x\in H$, 有

$$\mathbf{C}^Tx=\Omega(x)\mathbf{A}^Tx.$$

(iv) 对所有的正算子 $P\in\mathcal{B}(H)$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i^*PA_i\geq\sum\limits_{i=1}^{\infty}C_j^*PC_j$.

(v) 存在映射 $\Gamma:K\to\mathcal{B}_1(l_2)$ 使得对任意的 $y\in K$, 有

$$\mathbf{C}^*y=\Gamma(y)\mathbf{A}^*y.$$

证明 (i)⇒(ii) 显然.

(ii)⇒(iii). 任意给定 $x\in H$, 不失一般性，可假定 $\|x\|=1$, 那么 $P_x=x\otimes x$ 是一秩投影. 由 (ii) 知,

$$\sum_{i=1}^{\infty}A_iP_xA_i^*\geq\sum_{j=1}^{\infty}C_jP_xC_j^*. \tag{8.2.1}$$

令

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} A_1P_x & \cdots & A_iP_x & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} C_1P_x & \cdots & C_jP_x & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

是从 $H^{(\infty)}$ 到 $K^{(\infty)}$ 的算子. 不等式 (8.2.1) 表明 $\mathbf{TT}^*\geq\mathbf{SS}^*$. 由文献 [69], 存在惟一的压缩算子 $\mathbf{X}=(X_{ij})\in\mathcal{B}(H^{(\infty)})$ 使得 $\ker\mathbf{X}^*\supseteq\ker\mathbf{T}$ 并且 $\mathbf{S}=\mathbf{TX}$. 对每个 $x_i\in\ker A_iP_x$, 因为 $(0\ \cdots\ 0\ x_i\ 0\ \cdots)^T\in\ker\mathbf{T}$, 因此对所有的 $j=1,2,\cdots$, 有 $X_{ij}^*x_i=0$. 所以对所有的 i, j, $\ker X_{ij}^*\supseteq\ker A_iP_x$. 故 X_{ij} 是秩至多为 1 的算子, 从而存在向量 $y_{ij}\in H$ 使得

$$X_{ij}=x\otimes y_{ij},\qquad i,j=1,2,\cdots.$$

现在 $\mathbf{S}=\mathbf{TX}$ 导致

$$\begin{aligned}(C_1x\ \cdots\ C_jx\ \cdots)^T&=(C_1P_xx\ \cdots\ C_jP_xx\ \cdots)^T\\ &=\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_iP_xX_{i1}x\ \cdots\ \sum_{i=1}^{\infty}A_iP_xX_{ij}x\ \cdots\right)^T\\ &=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,y_{i1}\rangle A_ix\ \cdots\ \sum_{i=1}^{\infty}\langle x,y_{ij}\rangle A_ix\ \cdots\right)^T.\end{aligned}$$

对于 i, $j=1$, $2,\cdots$, 令 $\omega_{ij}(x)=\langle x,y_{ij}\rangle$ 且令 $\Omega(x)=(\omega_{ji}(x))_{j,i}$. 则

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^Tx&=(C_1x\ \cdots\ C_jx\ \ \cdots)^T\\ &=\Omega(x)(A_1x\ \cdots\ A_ix\ \ \cdots)^T=\Omega(x)\mathbf{A}^Tx.\end{aligned}$$

因为 $X_{ij}P_x = \langle x, y_{ij}\rangle P_x = \omega_{ij}(x)P_x$, 且把 $\Omega(x)$ 看作是从 l_2 到其自身的算子，那么我们有

$$\| \Omega(x) \| = \| \Omega(x) \otimes P_x \| = \| \mathbf{X}P_x^{(\infty)} \| \leq \| \mathbf{X} \| \leq 1.$$

从而 (ii) 蕴涵 (iii) 成立.

(iii)⇒(iv). 假定 (iii) 成立. 对任意的 $x \in H$, 存在压缩矩阵 $\Omega(x) = (\omega_{ji}(x))_{j,i} \in \mathcal{B}_1(l_2)$ 使得

$$(C_1x \ \cdots \ C_jx \ \cdots)^T = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\omega_{1i}(x)A_ix \ \cdots \ \sum_{i=1}^{\infty}\omega_{ji}(x)A_ix \ \cdots\right)^T.$$

如果 $P \in \mathcal{B}(K)$ 是正算子，那么

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\sum_{j=1}^{\infty} C_j^*PC_j\right)x, x\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \| P^{\frac{1}{2}}C_jx \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\omega_{ji}(x)P^{\frac{1}{2}}A_ix\right\|^2 \\
&= \| \Omega(x)(P^{\frac{1}{2}}A_1x \ \cdots \ P^{\frac{1}{2}}A_ix \ \cdots) \|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \| P^{\frac{1}{2}}A_ix \|^2 = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i^*PA_i\right)x, x\right\rangle,
\end{aligned}$$

即 (iv) 成立.

显然由上面的讨论知， (iv)⇒(v)⇒(i). 证毕.

为刻画保自伴初等算子的完全正性，我们需要下面的引理.

引理 8.2.2 设 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, \{C_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(H,K)$ 使得 $\left\|\sum_{i=1}^{\infty}A_i^*A_i\right\| < \infty$, $\left\|\sum_{i=1}^{\infty}A_iA_i^*\right\| < \infty$, $\left\|\sum_{i=1}^{\infty}C_j^*C_j\right\| < \infty$ 和 $\left\|\sum_{i=1}^{\infty}C_jC_j^*\right\| < \infty$. 那么下列陈述等价:

(i) 对所有的正算子 $P \in \mathcal{B}(H^{(n)})$, 有 $\sum_{i=1}^{\infty}A_i^{(n)}P(A_i^{(n)})^* \geq \sum_{i=1}^{\infty}C_j^{(n)}P(C_j^{(n)})^*$.

(ii) 存在压缩矩阵 $\Omega = (\omega_{ji})_{j,i} \in \mathcal{B}_1(l_2)$ 使得

$$(C_1 \ \cdots \ C_j \ \cdots)^T = (\omega_{ji})_{j,i}(A_1 \ \cdots \ A_i \ \cdots)^T.$$

证明 由引理 8.2.1, (ii)⇒(i) 显然.

下证 (i)⇒(ii). 设 $\mathbf{A} = (A_1 \ \cdots \ A_i \ \cdots)$ 且 $\mathbf{C} = (C_1 \ \cdots \ C_j \ \cdots)$. 令

$$\mathcal{B} = \{\Gamma = (\gamma_{ji})_{j,i}\mathbf{A}^T \mid \Gamma \in \mathcal{B}_1(l_2)\}.$$

显然 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{B}(H, K^{(\infty)})$ 中按照强算子拓扑是闭的. 取 $\epsilon > 0$. 对任意的 $x_1, \cdots, x_n \in H$, 令 $\mathbf{x} = (x_1 \ \cdots \ x_n) \in H^{(n)}$. 由 (ii) 和引理 8.2.1 知, 存在 $\Omega(\mathbf{x}) = (\omega_{ji}(\mathbf{x})) \in \mathcal{B}_1(l_2)$ 使得 $\Omega(\mathbf{x})\mathbf{A}^{(n)^T}\mathbf{x} = \mathbf{C}^{(n)^T}\mathbf{x}$. 所以对任意的 $k = 1, \cdots, n$, 有

$$\Omega(\mathbf{x})\mathbf{A}^T x_k = \mathbf{C}^T x_k.$$

故

$$\Omega(\mathbf{x})\mathbf{A}^T \in \{\mathbf{X} \in \mathcal{B}(H, K^{(\infty)}) \mid \ \| \mathbf{X}x_k - \mathbf{C}^T x_k \| < \epsilon, \ k = 1, \cdots, n\}.$$

但是这蕴涵 $\mathbf{C}^T$ 的每一个强邻域与 $\mathcal{B}$ 都有非空交, 所以 $\mathbf{C}^T \in \mathcal{B}$. 故存在 $\Omega \in \mathcal{B}(l_2)$ 使得 $\mathbf{C}^T = \Omega\mathbf{A}^T$. 证毕.

定理 8.2.3 令 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}, \{C_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(H, K)$ 使得 $\left\|\sum_{i=1}^{\infty} A_i^* A_i\right\| < \infty$, $\left\|\sum_{i=1}^{\infty} A_i A_i^*\right\| < \infty$, $\left\|\sum_{i=1}^{\infty} C_j^* C_j\right\| < \infty$ 和 $\left\|\sum_{i=1}^{\infty} C_j C_j^*\right\| < \infty$. 令 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是如下定义的线性映射: 对任意的 $X \in \mathcal{B}(H)$,

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i X A_i^* - \sum_{j=1}^{\infty} C_j X C_j^*.$$

则下列结论成立:

(i) Φ 保正当且仅当存在映射 $\Omega : x \in H \mapsto \Omega(x) = (\omega_{ji}(x)) \in \mathcal{B}_1(l_2)$ 使得对每个 $x \in H$, 都有

$$\mathbf{C}^T x = \Omega(x)\mathbf{A}^T x.$$

(ii) Φ 完全正当且仅当存在压缩矩阵 $\Omega=(\omega_{ji})_{j,i}\in\mathcal{B}(l_2)$ 使得

$$\mathbf{C}^T=\Omega\mathbf{A}^T.$$

进而，如果 $I-\Omega^*\Omega$ 是对角的 (特别地，如果它是紧的), 那么存在序列 $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{B}(H,K)$ 使得对任意的 $X\in\mathcal{B}(H)$, 有

$$\Phi(X)=\sum_{i=1}^{\infty}D_iXD_i^*.$$

证明 因为对每个 $\mathbf{X}\in\mathcal{B}(H^{(n)},H^{(n)})$,

$$\Phi_n(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{\infty}A_i^{(n)}\mathbf{X}(A_i^{(n)})^*-\sum_{j=1}^{\infty}C_j^{(n)}\mathbf{X}(C_j^{(n)})^*,$$

由引理 8.2.1 和 8.2.2, 我们只需证明 (ii) 的第二部分. 对任意的 $X\in\mathcal{B}(H)$, 我们有

$$\begin{aligned}\Phi(X)&=\mathbf{A}X^{(\infty)}\mathbf{A}^*-\mathbf{C}X^{(\infty)}\mathbf{C}^*=\mathbf{A}X^{(\infty)}\mathbf{A}^*-\mathbf{A}\Omega^TX^{(\infty)}\Omega^{*T}\mathbf{A}^*\\&=\mathbf{A}X^{(\infty)}\mathbf{A}^*-\mathbf{A}X^{(\infty)}\Omega^T\Omega^{*T}\mathbf{A}^*=\mathbf{A}X^{(\infty)}(I-\Omega^*\Omega)^T\mathbf{A}^*.\end{aligned}$$

当 $\|\Omega\|\le 1$ 时，因为 $I-\Omega^*\Omega\ge 0$, 所以 $I-\Omega^*\Omega$ 的可对角化表明存在满足 $0\le d_i\le 1$ 的序列 $\{d_i\}$ 和酉矩阵 $\Gamma=(\gamma_{ij})_{i,j}\in\mathcal{B}(l_2)$ 使得 $\Gamma^*(I-\Omega^*\Omega)^T\Gamma=\mathrm{diag}\{d_i^2\}$. 令 $\mathbf{E}=(E_1\ \cdots\ E_j\ \cdots)=\mathbf{A}\Gamma$, 那么

$$\begin{aligned}\Phi(X)&=\mathbf{A}X^{(\infty)}(I-\Omega^*\Omega)^T\mathbf{A}^*=\mathbf{E}\Gamma^*X^{(\infty)}(I-\Omega^*\Omega)^T\Gamma\mathbf{E}^*\\&=\mathbf{E}X^{(\infty)}\Gamma^*(I-\Omega^*\Omega)^T\Gamma\mathbf{E}^*=\sum_{i=1}^{\infty}d_i^2E_iXE_i^*.\end{aligned}$$

记 $D_i=d_iE_i$, 则对任意的 X, 有

$$\Phi(X)=\sum_{i=1}^{\infty}D_iXD_i^*.$$

下面的定理给出正初等算子结构的完全刻画.

定理 8.2.4 设 $\Phi=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i(\cdot)B_i$ 是从 $\mathcal{B}(H)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 的初等算子. 则 Φ 是 m- 正的当且仅当存在满足 $k+l\le n$ 的 k,l 且存

在 $C_1,\cdots,C_k$, $D_1,\cdots,D_l$ $\in\mathrm{span}\{A_1,\cdots,A_n\}$ 使得 $(D_1,\cdots,D_l)$ 是 $(C_1,\cdots,C_k)$ 的 m- 压缩局部线性组合并且

$$\Phi=\sum_{i=1}^{k}C_i(\cdot)C_i^*-\sum_{j=1}^{l}D_j(\cdot)D_j^*. \tag{8.2.2}$$

进而 (8.2.2) 式中的 Φ 是完全正的当且仅当 $(D_1,\cdots,D_l)$ 是 $(C_1,\cdots,C_k)$ 的具有压缩系数矩阵的线性组合.

注意到在 (8.2.2) 式中的 C_i 和 D_j 可被选择使得 $\{C_1,\cdots,C_k,D_1,\cdots,D_l\}$ 线性无关.

证明 如果 Φ 是 m- 正的, 那么它保自伴性, 所以由定理 8.1.1, 存在满足 $k+l\leq n$ 的 k, l 及算子 C_i, D_j $\in\mathrm{span}\{A_1,\cdots,A_n\}$ $(i=1,\cdots,k,\ j=1,\cdots,l)$ 使得 $\Phi=\sum\limits_{i=1}^{k}C_i(\cdot)C_i^*-\sum\limits_{j=1}^{l}D_j(\cdot)D_j^*$. 通过考虑有限序列, 现在容易看到此定理是定理 8.2.3 的直接推论. 证毕.

令 M_n 代表所有的 $n\times n$ 复矩阵 C*- 代数. 因为从 M_n 到 M_m 的所有线性映射都是初等算子, 因此由定理 8.2.4, 下面的推论是平凡的.

推论 8.2.5 线性映射 $\Phi:M_n\to M_m$ 是正的当且仅当存在 $m\times n$ 矩阵 $C_1,\cdots,C_k$ 和 $D_1,\cdots,D_l$ 使得 $(D_1,\cdots,D_l)$ 是 $(C_1,\cdots,C_k)$ 的局部压缩线性组合并且对所有的 $X\in M_n$, 有

$$\Phi(X)=\sum_{i=1}^{k}C_iXC_i^*-\sum_{j=1}^{l}D_jXD_j^*.$$

§8.3 算子的线性组合和局部线性组合

从第二节的讨论中观察到, 初等算子的正性在什么条件下决定其完全正性的问题可简化到讨论正则局部线性组合何时是线性组合的问题. 这个联系使我们能够更深入地理解正性和完全正性之间的关系和差异, 并且获得正初等算子是否是完全正的一些较

简单的判断准则．为此我们在本节讨论算子的线性组合与局部线性组合之间的一些关系，为下节进一步讨论正初等算子做准备．

设 $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(H,K)$，用 $\mathcal{S}_F$ 代表 $\mathcal{S}$ 中所有有限秩算子的集合．对于我们的目的，虽然只需要正则局部线性组合的结果，但作为比较，我们把局部线性组合和正则局部线性组合两种情形都列出．

我们先考虑有限维的情形．

引理 8.3.1 设 X_n 和 X_m 是分别具有维数 n 和 m 的复线性空间且令 $A, B, C \in \mathcal{B}(X_n, X_m)$．如果对任意的 $x \in X_n$，存在数 $a(x)$ 和 $b(x)$ 使得 $Cx = a(x)Ax + b(x)Bx$，且如果 $\sup\{|a(x)|, |b(x)| \mid x \in H\} < \infty$，则 C 是 A 和 B 的线性组合．

证明 如果下列条件之一成立：

(i) A 和 B 线性相关；

(ii) $n = 1$ 或 $m = 1$，

则引理 8.3.1 成立．因此以后我们总假定 A 和 B 线性无关且 n 和 m 不小于 2.

(iii) 对所有的 $x \in X_n$，Ax 和 Bx 线性相关．此时显然 $\ker A$ 和 $\ker B$ 不可能彼此间相互包含．因此存在向量 $x_0, y_0 \in X_n$ 使得 $Ax_0 \neq 0$, $Bx_0 = 0$ 并且 $Ay_0 = 0$, $By_0 \neq 0$．这蕴涵 A 和 B 到 $M = \text{span}\{\ker A, \ker B\}$ 的限制是具有相同值域的一秩算子．我们断言 $M = X_n$．事实上，如果 $M \neq X_n$，则 A 和 B 至少有一个，比如 B 的秩大于 1. 所以存在 $x \in M^{\perp}$ 使得 Bx 和 By_0 线性无关．但此蕴涵 $A(x+y_0)$ 和 $B(x+y_0)$ 线性无关．现在易证存在某个数 a 和 b 使得 $C = aA + bB$.

(iv) 存在向量 $x \in X_n$ 使得 Ax 和 Bx 线性无关．取 X_n 和 X_m 的基，关于这两组基，A, B 和 C 具有矩阵表示

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

且

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

由引理的假定，对每个 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in X_n$, 存在 $a(x)$ 和 $b(x)$ 使得 $Cx = a(x)Ax + b(x)Bx$, 即

$$\sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j = a(x)\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + b(x)\sum_{j=1}^{n} b_{1j}x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{2j}x_j = a(x)\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j + b(x)\sum_{j=1}^{n} b_{2j}x_j$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{mj}x_j = a(x)\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j + b(x)\sum_{j=1}^{n} b_{mj}x_j$$

因为对某个 $x \in X_n$, Ax 和 Bx 线性无关，因此存在 i_1, i_2, 不失一般性，比如说 $i_1 = 1$ 且 $i_2 = 2$, 使得对所有的 $x \in X_n$, 行列式

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j & \sum_{j=1}^{n} b_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j & \sum_{j=1}^{n} b_{2j}x_j \end{vmatrix}$$

不恒为零. 把 X_n 等同于 $\mathbb{C}^{(n)}$, 且记

$$\Delta_a(x)=\begin{vmatrix}\sum_{j=1}^{n}c_{1j}x_j & \sum_{j=1}^{n}b_{1j}x_j\\ \sum_{j=1}^{n}c_{2j}x_j & \sum_{j=1}^{n}b_{2j}x_j\end{vmatrix},$$

$$\Delta_b(x)=\begin{vmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j & \sum_{j=1}^{n}c_{1j}x_j\\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j & \sum_{j=1}^{n}c_{2j}x_j\end{vmatrix}.$$

显然 $\Delta(x)$, $\Delta_a(x)$ 和 $\Delta_b(x)$ 是具有 n 个变量 $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^{(n)}$ 的解析函数. $\Delta(x)$ 不恒等于零蕴涵 $L=\{x\mid\Delta(x)\neq 0\}$ 是 $\mathbb{C}^{(n)}$ 的稠密开子集且 $a(x)=\Delta_a(x)/\Delta(x)$ 在 L 上解析. 因为 $\sup\{|a(x)|\mid x\in L\}<\infty$, 因此 $a(x)$ 可惟一地延拓到 $\mathbb{C}^{(n)}$ 上的有界解析函数, 由 Liouville's 定理, $a(x)$ 是常数, 即存在某个 $a\in L$ 使得 $a(x)=a$. 类似地, 对某个 b, 在 L 上, 有 $b(x)=\Delta_b(x)/\Delta(x)=b$. 故对任意的 $x\in L$, 我们有 $Cx=aAx+bBx$. 现在由 L 的稠密性知, $C=aA+bB$. 证毕.

定理 8.3.2 设 $A_1,\cdots,A_k,C\in\mathcal{B}(H,K)$. 如果下列条件之一成立, 那么 $C\in$span $\{A_1,\cdots,A_k\}$:

(1) C 是 A_1 的局部线性组合;

(2) C 是 $(A_1,\cdots,A_k)$ 的局部线性组合并且 $(\text{span}\{A_1,\cdots,A_k\})_F=0$;

(3) C 是 (A_1,A_2) 的正则局部线性组合;

(4) C 是 $(A_1,\cdots,A_k)$ 的正则局部线性组合, 且存在向量 $x\in H$ 使得 $\{A_ix\}_{i=1}^k$ 是线性无关的;

(5) C 是 $(A_1,\cdots,A_k)$ 的正则局部线性组合, 且 $\dim(\text{span}\{A_1,\cdots,A_k\})_F\leq 2$.

证明 (1) 是引理 8.3.1 的直接推论.

(2) 令 $\mathcal{S}$ =span$\{A_1,\cdots,A_k\}$. 我们不妨设 $A_1,\cdots,A_k$ 线性无关，因而是 $\mathcal{S}$ 的一组线性基. 设 V 和 W 分别为 H 和 K 的余有限维线性子空间 (不必闭).

断言 1 线性子空间 $\{x\in V\mid \mathcal{S}x\subseteq W\}$ 也是余有限维的.

事实上，令 P 为从 K 到 W 上的幂等线性变换 (不必有界)，那么集合 $(I-P)\mathcal{S}$ 中的线性变换都是有限秩的. 令 $N=\ker(I-P)A_1\cap\cdots\cap\ker(I-P)A_k$, 则 N 和 $N\cap V$ 都是余有限维的. 显然 $(I-P)\mathcal{S}(N\cap V)=0$, 所以 $\mathcal{S}(N\cap V)\subseteq W$.

断言 2 存在 $x\in V$ 使得 $\mathcal{S}x\subseteq W$, 并且对任意的 $S\in\mathcal{S}$, $Sx=0$ 蕴涵 $S=0$ (即 x 是 $\mathcal{S}$ 的分离向量).

如果 $\dim\mathcal{S}=1$, 因为子空间 $\{u\in V\mid A_1u\in W\}$ 是余有限维的，结论显然成立. 用归纳法，假设结论对所有 n 维子空间都成立，设 $\dim\mathcal{S}=k=n+1$. 记 $\tilde{V}=\{u\in V\mid \mathcal{S}u\subseteq W\}$, $\tilde{\mathcal{S}}$ =span$\{A_1,\cdots,A_n\}$. 因为 $\tilde{V}$ 具有余有限维，由归纳假设，存在 $x\in\tilde{V}$ 分离 $\tilde{\mathcal{S}}$. 由 $\tilde{V}$ 的定义有 $\mathcal{S}x\subseteq W$. 如果 x 也分离 $\mathcal{S}$, 断言已得证. 如果存在非零的 $A\in\mathcal{S}$ 使得 $Ax=0$, 则显然 $\mathcal{S}$ =span$\{A_1,\cdots,A_n,A\}$. 令 M 为 $\mathcal{S}x$ 在 H 中的任一线性补空间，而令 $\hat{W}=W\cap M$, $\hat{V}=\{u\in\tilde{V}\mid \mathcal{S}u\subseteq\hat{W}\}$, 则 $\hat{V}$ 在 H 中是余有限维的. 因为 $\mathcal{S}_F=\{0\}$, A 是无限秩的，故存在 $y\in\hat{V}$ 使得 $Ay\neq 0$. 对任意非零元 $S\in\mathcal{S}$, 存在 $\alpha,\alpha_i\in\mathbb{F}$ 使得 $S=\alpha_1A_1+\cdots+\alpha_nA_n+\alpha A$. 由于 $Ax=0$, 我们有 $Sx=\alpha_1A_1x+\cdots+\alpha_nA_nx$. 注意到 x 分离 span$\{A_1,\cdots,A_n\}$, 故 $Sx=0$ 将蕴涵 $S=\alpha A$. 由此易知，Sx 和 Sy 不能同时为 0. 因为 $Sx\in\mathcal{S}x$ 而 $Sy\in M$, 我们有 $S(x+y)\neq 0$. 于是，$x+y\in V$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个分离向量，断言 2 得证.

断言 3 设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{B}(H,K)$ 的有限维子空间，则 $\mathcal{L}$ 具有分离向量当且仅当 $\mathcal{L}_F$ 具有分离向量.

记 $\mathcal{L}$ =span$\{B_1,\cdots,B_m,B_{m+1},\cdots,B_n\}$. 我们可以假设 $\mathcal{L}_F$ = span$\{B_1,\cdots,B_m\}$ 而 $\mathcal{L}_I$ =span$\{B_{m+1},\cdots,B_n\}$ 满足 $\mathcal{L}_I\cap\mathcal{F}(H,K)=\{0\}$. 令 u 是 $\mathcal{L}_F$ 的一个分离向量，M 是 $\mathcal{L}u$ 在 K 中的线性补，$N=\bigcap_{i=1}^m\ker B_i$. 由于 N 和 M 是余有限维的，断言 2 蕴涵存在分

离 span$\{B_m,\cdots,B_n\}$ 的向量 $v\in N$ 并满足 $\{B_mv,\cdots,B_nv\}\subseteq M$. 令 $x=u+v$. 如果 $T\in\mathcal{L}$, 则 T 可表示为 $T=T_1+T_2$, 其中 $T_1\in\mathcal{L}_F$, $T_2\in$span$\{B_m,\cdots,B_n\}$. 因为 $Tu\in\mathcal{L}u$, $Tv=T_2v\in M$, 故当 $Tx=0$ 时必有 $Tu=0$ 且 $Tv=0$, 进而, 此蕴涵 $T_2v=0$, 从而 $T_2=0$, 故 $T=T_1$. 但是 u 分离 $\mathcal{L}_F$, 从而也必有 $T_1=0$. 于是 $Tx=0$ 蕴涵 $T=0$, 即 x 是 $\mathcal{L}$ 的分离向量.

利用断言 3 可以完成定理中结论 (2) 的证明. 事实上, 由假设条件知,

$$(\text{span}\{C,A_1,\cdots,A_k\})_F$$

的维数最多为 1, 故有分离向量. 于是断言 3 蕴涵 span$\{C,A_1,\cdots,A_k\}$ 有分离向量 x. 所以, 如果 $C\notin\mathcal{S}$, 则 C 不是 $\{A_1,\cdots,A_k\}$ 的局部线性组合.

(3) 对给定的正整数 $\epsilon>0$ 和向量 $x_1,\cdots,x_n\in H$, 令 $H_1=$span$\{x_1,\cdots,x_n\}$, $H_2=$span$\{Ax_1,\cdots,Ax_n,\ Bx_1,\cdots,Bx_n\}$ 且令 $A_1=A|_{H_1}$, $B_1=B|_{H_1}$, $C_1=C|_{H_1}$. 则 A_1, B_1, $C_1\in\mathcal{B}(H_1,H_2)$ 满足引理 8.3.1 中的条件. 故存在数 a_1 和 b_1 使得 $C_1=a_1A_1+b_1B_1$. 所以

$$a_1A_1+b_1B_1\in\{T\in\mathcal{B}(H)\mid\|Tx_i-Cx_i\|<\epsilon,\ i=1,2,\cdots,n\},$$

从而

$$C\in\overline{\text{span}\{A,\ B\}}^{\text{SOT}}=\text{span}\{A,\ B\},$$

其中 $\overline{W}^{\text{SOT}}$ 代表算子集合 W 在 $\mathcal{B}(H)$ 中的强算子拓扑闭包.

(4) 任给 $\epsilon>0$ 及向量 $x_1,\cdots,x_n\in H$, 令 $H_1=$span$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, $H_2=$span$\{A_ix_j\mid i=1,\cdots,k$ 且 $j=0,1,\cdots,n\}$ 且令 $C'=C|_{H_1}$, $A_i'=A_i|_{H_1}$ $(i=1,\cdots,k)$. 类似于引理 8.3.1 可证:

设 X_n 和 X_m 是维数分别为 n 和 m 的复线性空间. 令 $A_1,\cdots,A_k\in\mathcal{B}(X_n,X_m)$. 如果对任意的 $x\in X_n$, 存在满足 $\sup\{|a_1(x)|,\cdots,|a_k(x)|\mid x\in X_n\}<\infty$ 的数 $a_1(x),\cdots,a_k(x)$ 使得 $Cx=a_1(x)A_1x+$

$\cdots + a_k(x)A_kx$, 且如果存在向量 $x_0 \in X_n$ 使得 $A_1x_0, \cdots, A_kx_0$ 线性无关, 则 C 是 $A_1, \cdots, A_k$ 的线性组合.

应用于 $A'_1, \cdots, A'_k$ 和 C', 可知存在满足 $|r_1|^2 + \cdots + |r_k|^2 \leq 1$ 的数 $r_1, \cdots, r_k$ 使得 $C' = r_1A'_1 + \cdots + r_kA'_k$, 特别地, 有 $Cx_j = r_1A_1x_j + \cdots + r_kA_kx_j$ $(j = 1, \cdots, n)$. 所以我们有

$$r_1A_1 + \cdots + r_kA_k \in \{T \in \mathcal{B}(H) \mid \|Tx_j - Cx_j\| < \epsilon,\ j = 1, \cdots, n\},$$

但是此蕴涵 $C \in \mathrm{span}\{A_1, \cdots, A_k\}$, 故 (4) 成立.

(5) 我们先证下面的断言.

断言 4 设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{B}(H, K)$ 中的有限维子空间, 则 $\mathrm{ref}_a(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_I + \mathrm{ref}_a(\mathcal{L}_F)$, 这里 $\mathrm{ref}_a(\mathcal{L})$ 是所有可表示为 $\mathcal{L}$ 中有限个元的局部线性组合的所有线性变换之集合.

记 $M_0 = (\mathcal{L} \cap \mathcal{F}(H, K))H$, 显然 M_0 是有限维的. 令 Q 是从 K 到 M_0 上的投影. 于是 $(I - Q)\mathcal{L} \cap \mathcal{F}(H, K) = \{0\}$, 故由 (2) 知 $\mathrm{ref}_a((I - Q)\mathcal{L}) = (I - Q)\mathcal{L}$. 因而对任意 $T \in \mathrm{ref}_a(\mathcal{L})$, 我们都有 $(I - Q)T \in (I - Q)\mathcal{L}$. 取 $S \in \mathcal{L}$ 使得 $(I - Q)T = (I - Q)S$, 于是有 $T = S + Q(T - S) \in \mathcal{L} + \mathcal{F}(H, K)$. 所以, 为证断言, 只需证 $\mathrm{ref}_a(\mathcal{L})$ 中的每个有限秩算子是 $\mathrm{ref}_a(\mathcal{L}_F)$ 中的元. 故令 $T \in (\mathrm{ref}_a(\mathcal{L}))_F$, 下证对每个 $u \in H$ 都有 $Tu \in (\mathcal{L}_F)u$ 成立.

同 (2) 中断言 3 的证明那样, 记 $\mathcal{L} = \mathrm{span}\{B_1, \cdots, B_m, B_{m+1}, \cdots, B_n\}$. 令 M 是 $\mathcal{L}u$ 在 K 中的任一线性补空间, $N = \ker T \cap \ker B_1 \cap \cdots \cap \ker B_m$, 则 N 和 M 都是余有限维子空间. 由 (2) 证明中的断言 2, 存在 $\mathcal{L}_I$ 的分离向量 $y \in N$ 使得 $(\mathcal{L}_I)y \subseteq M$. 令 $x = u + y$. 因为 $T \in \mathrm{ref}_a(\mathcal{L})$, 故存在与 x 有关的标量 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 使得 $Tx = (\alpha_1B_1 + \cdots + \alpha_nB_n)x$. 注意到 $y \in \ker T$ 且当 $i \leq m$ 时, 有 $y \in \ker B_i$, 从而

$$\begin{aligned} Tu = Tx = T(u + y) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i(u + y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i u + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i B_i y. \end{aligned}$$

由于 $Tu \in \mathcal{L}u$, $(\mathcal{L}_I)y \subseteq M$, 我们有 $\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i B_i y = 0$. 但 y 分离 $\mathcal{L}_I$ 且 $\{B_{m+1}, \cdots, B_n\}$ 线性无关，所以 $\alpha_{m+1} = \cdots = \alpha_n = 0$, 即 $Tu \in (\mathcal{L}_F)u$.

现在我们来证明 (5). 令 $\mathcal{S}$ =span$\{A_1, \cdots, A_k\}$, 那么 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_I + \mathcal{S}_F$. 根据上述断言， $C \in$ref$_a(\mathcal{S})$ 蕴涵 $C = C_1 + C_2$, 其中 $C_1 \in \mathcal{S}_I$ 且 $C_2 \in$ref$_a(\mathcal{S}_F)$. 由假设条件， C_2 是 $\mathcal{S}_F$ 中元的正则局部线性组合且 $\mathcal{S}_F$ 的维数至多是 2. 于是由 (3) 知 $C_2 \in \mathcal{S}_F$. 故 $C \in \mathcal{S}$. 证毕.

我们下面举例说明，定理 8.3.2 (1) 不能放宽到 $k \geq 2$ 而 (3) 不能放宽到 $k \geq 3$.

例 8.3.1 存在 Hilbert 空间 H 和 $A_1, \cdots, A_k, C \in \mathcal{B}(H)$ 使得对任意的 $x \in H$, $Cx \in$span$\{A_1 x, \cdots, A_k x\}$, 但 C 不是 $A_1, \cdots, A_k$ 的线性组合.

事实上，设 H 是 2 维空间. 关于 H 的标准正交基，令

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix},$$

其中 d_1 和 d_2 非零. 则对任意的 $x \in H$, Cx 是 Ax 和 Bx 的线性组合，即存在数 $a(x)$ 和 $b(x)$ 使得 $Cx = a(x)Ax + b(x)Bx$, 但只要 $d_1 c_{22} - d_2 c_{11} \neq 0$, 则显然有 $\{A, B, C\}$ 线性无关.

例 8.3.2 存在 $A_1, \cdots, A_k, C \in \mathcal{B}(H)$ $(k \geq 3)$ 使得 C 是 $A_1, \cdots, A_k$ 的局部压缩线性组合但 C 不是 $A_1, \cdots, A_k$ 的线性组合.

证明 令 A_1 A_2, A_3 和 C 是 2 维 Hilbert 空间 H 上的算子且

$$A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}.$$

显然, 由 §8.2 的讨论知, C 是 A_1, A_2, A_3 的局部压缩线性组合当且仅当对任意的 $P \geq 0$,

$$A_1 P A_1^* + A_2 P A_2^* + A_3 P A_3^* \geq C P C^*,$$

当且仅当对每个 $P = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \geq 0$, 有

$$\begin{pmatrix} (|d_1|^2 - |f_1|^2)t_{11} + t_{22} & (d_1\bar{d}_2 - f_1\bar{f}_2)t_{12} \\ (\bar{d}_1 d_2 - \bar{f}_1 f_2)\bar{t}_{12} & (|d_2|^2 - |f_2|^2)t_{22} + t_{11} \end{pmatrix} \geq 0.$$

现在易证如果我们选择 A_1 和 C 使得 $|d_1| \geq |f_1| > 0, |d_2| \geq |f_2| > 0$ 且 $0 < |d_1 d_2 - f_1 f_2| < 1$ (例如 $d_1 = f_1 = 1$, $d_2 = 2$ 且 $f_2 = \frac{3}{2}$), 则不等式 $A_1 P A_1^* + A_2 P A_2^* + A_3 P A_3^* \geq C P C^*$ 对所有的 $P \geq 0$ 都成立, 但如果 $d_1 f_2 - d_2 f_1 \neq 0$, 则 C 不是 A_1, A_2 和 A_3 的线性组合.

显然由定义 8.2.1, 如果 C 是 $\{A_i\}$ 的 n- 局部线性组合 (或 n- 正则局部线性组合), 那么对所有的 m $(1 \leq m \leq n)$, C 也是 $\{A_i\}$ 的 m- 局部线性组合 (或 m- 正则局部线性组合); 并且如果 $C \in \mathrm{span}\{A_1, \cdots, A_n\}$, 那么对所有的 $n = 1, 2, \cdots$, C 也是 $\{A_i\}$ 的 n- 局部线性组合 (或 n- 正则局部线性组合). 对于实数 t, 记 $[t]$ 为不大于 t 的最大整数.

定理 8.3.3 设 $C, A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(H, K)$. 那么 $C \in \mathrm{span}\{A_1, \cdots, A_n\}$ 当且仅当 C 是 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 的 $[\frac{n+2}{2}]$- 局部线性组合.

证明 我们只需证明充分性部分. 假定 C 是 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 的 $[\frac{n+2}{2}]$- 局部线性组合, 我们必须证明 C 是 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 的线性组合. 我们将用归纳法证明之. 不失一般性, 以后, 我们总假定 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 线性无关.

显然, 由引理 2.1.3, 对于 $n = 1$, 定理成立. 设 A, B, $C \in \mathcal{B}(H, K)$. 如果对每个 $f \in H^{(2)}$, $A^{(2)}f$ 都是 $B^{(2)}f$ 和 $C^{(2)}f$ 的线性组合. 不失一般性可设 B 和 C 线性无关. 如果存在 $y \in H$ 使得 By 与 Cy 线性无关, 对任意的 $x \in H$, 令 $f = x \oplus y \in H^{(2)}$, 则由条件 $A^{(2)}f$ 为 $B^{(2)}f$ 和 $C^{(2)}f$ 的线性组合知 A 为 B 和 C 的

线性组合. 如果上述 y 不存在, 则可推出存在线性无关的向量 x_1, $x_2 \in H$ 以及 $y_0 \in H$ 使得 $B = y_0 \otimes x_1$, $C = y_0 \otimes x_2$. 于是存在 x_0 使得 $A = y_0 \otimes x_0$. 又因 $\langle x, x_1 \rangle = 0$ 和 $\langle x, x_2 \rangle = 0$ 蕴涵 $\langle x, x_0 \rangle = 0$, 所以 x_0 是 x_1 与 x_2 的线性组合, 从而也是 B 和 C 的线性组合. 因此, 定理在 $n = 2$ 时也成立.

假定对满足 $1 \leq m < n$ 的所有 m, 断言成立且 C 是 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 的 $[\frac{n+2}{2}]$- 局部线性组合. 令

$$k = \max\{\dim(\mathrm{span}\{A_1 x, \cdots, A_n x\}) \mid x \in H\}.$$

显然, $1 \leq k \leq n$. 我们可以假定 $n \geq 3$.

如果 $k = 1$, 那么对任意的 $x \in H$ 及任意的 $i, j = 1, \cdots, n$ 和每对 (i, j), 有 $\{A_i x, A_j x\}$ 线性相关. 所以存在 $x_0 \in K$ 和 n 个向量 $y_1, \cdots, y_n \in H$ 使得 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ 线性无关且 $A_i = x_0 \otimes y_i$, $i = 1, \cdots, n$ (这里我们使用了引理 2.1.3). 因为 C 是 $\{A_i\}$ 的局部线性组合, 因此存在向量 $f \in H$ 使得 $C = x_0 \otimes f$. 显然 $\{f\}^\perp \supseteq \cap_{i=1}^n \{y_i\}^\perp = \mathrm{span}\{y_1, \cdots, y_n\}^\perp$. 故 $f \in \mathrm{span}\{y_1, \cdots, y_n\}$, 从而 $C \in \mathrm{span}\{A_1, \cdots, A_n\}$.

如果 $k = n$, 那么存在向量 $x_0 \in H$ 使得 $\{A_1 x_0, \cdots, A_n x_0\}$ 线性无关, 于是存在惟一的数组 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 使得

$$C x_0 = \alpha_1 A_1 x_0 + \cdots + \alpha_n A_n x_0.$$

现在对任意的 $x \in H$, 因为 $[\frac{n+2}{2}] \geq 2$, 因此 C 是 $\{A_i\}$ 的 2- 局部线性组合, 所以存在依赖于 x 的数组 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 使得

$$\begin{pmatrix} C x_0 \\ C x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i x_0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i A_i x \end{pmatrix}.$$

故对 $i = 1. \cdots, n$, $\lambda_i = \alpha_i$ 且对所有的 $x \in H$, $C x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i x$. 于是 $C \in \mathrm{span}\{A_1, \cdots, A_n\}$.

如果 $k=n-1$, 不失一般性我们可假定存在向量 $x_0\in H$ 使得 $\{A_ix_0\}_{i=1}^{n-1}$ 线性无关. 这样存在惟一确定的 $n-1$ 个数 λ_i $(i=1,\cdots,n-1)$ 使得 $A_nx_0=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_iA_ix_0$. 任取 α_i 使得 $Cx_0=\sum\limits_{i=1}^{n-1}(\alpha_i+\lambda_i\alpha_n)A_ix_0=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\gamma_iA_ix_0$. 因为 $\{A_1x_0,\cdots,A_{n-1}x_0\}$ 线性无关, 因此 $\{\gamma_i\}_{i=1}^{n-1}$ 是惟一确定的. 从而, 对任意的 $t\in\mathbb{C}$, Cx_0 可表示为下列形式:

$$Cx_0=\sum_{i=1}^{n-1}(\gamma_i-\lambda_it)A_ix_0+tA_nx_0. \tag{8.3.1}$$

由于 C 是 $\{A_i\}$ 的 2- 局部线性组合, 因而对任意的 $x\in H$, 我们取 $\mathbf{x}=(x_0,x)\in H^{(2)}$, 由 (8.3.1) 式易知, 存在 $t(x)\in\mathbb{C}$ 使得

$$\begin{aligned}Cx&=\sum_{i=1}^{n-1}(\gamma_i-\lambda_it(x))A_ix+t(x)A_nx\\&=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_iA_i\right)x+t(x)\left(A_n-\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_iA_i\right)x.\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

令 $S=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\gamma_iA_i$ 且 $T=A_n-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_iA_i$, 则 (8.3.2) 式表明 $C-S$ 是 T 的局部线性组合. 因此我们有 $C-S\in\text{span}\{T\}$, 从而 $C\in\text{span}\{S,T\}\subset\text{span}\{A_1,\cdots,A_n\}$.

如果 $1\le k<n-1$, 则我们可假定存在向量 x_0 使得 $\{A_ix_0\}_{i=1}^{k}$ 线性无关. 所以存在惟一的 $k\times(n-k)$ 阶矩阵 (λ_{ij}) 使得

$$A_{k+j}x_0=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{ij}A_ix_0,\quad j=1,\cdots,n-k.$$

因为 $Cx_0\in\text{span}\{A_1x_0,\cdots,A_nx_0\}$, 现在显然存在数 $\gamma_1,\cdots,\gamma_k$ 使得对任意的 $(t_1,\cdots,t_{n-k})\in\mathbb{C}^{(n-k)}$, Cx_0 具有形式

$$Cx_0=\sum_{i=1}^{k}\left(\gamma_i-\sum_{j=1}^{n-k}\lambda_{ij}t_j\right)A_ix_0+\sum_{j=1}^{n-k}t_jA_{k+j}x_0. \tag{8.3.3}$$

由条件 C 是 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 的 $[\frac{n+2}{2}]$- 局部线性组合，取 $\mathbf{x}=(x_0\ x_1\ \cdots\ x_{[\frac{n}{2}]})$ 并使用 (8.3.3) 式，则对任意的 $(x_1\ \cdots\ x_{[\frac{n}{2}]})\in H^{([\frac{n}{2}])}$, 相应地有 $(t_1\ \cdots\ t_{n-k})\in\mathbb{C}^{(n-k)}$ 使得对所有的 $r=1,\cdots,[\frac{n}{2}]$,

$$Cx_r=\sum_{i=1}^{k}\left(\gamma_i-\sum_{j=1}^{n-k}\lambda_{ij}t_j\right)A_ix_r+\sum_{j=1}^{n-k}t_jA_{k+j}x_r. \tag{8.3.4}$$

令

$$S=\sum_{i=1}^{k}\gamma_iA_i,\qquad T_j=A_{k+j}-\sum_{i=1}^{k}\lambda_{ij}A_i,\quad j=1,\cdots,n-k. \tag{8.3.5}$$

由 (8.3.4) 式知, $C-S$ 是 $\{T_1,\cdots,T_{n-k}\}$ 的 $[\frac{n}{2}]$- 局部线性组合. 因为 $k\geq 2$ 且 $[\frac{n-k+2}{2}]\leq[\frac{n}{2}]$, 由归纳假定，我们有

$$C-S\in\operatorname{span}\{T_1,\cdots,T_{n-k}\},$$

从而

$$C\in\operatorname{span}\{S,T_1,\cdots,T_{n-k}\}\subset\operatorname{span}\{A_1,\cdots,A_n\}.$$

证毕.

推论 8.3.4 C 是 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 的线性组合当且仅当 C 是 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 的 n- 局部线性组合.

至于正则局部线性组合的情形，我们有下列结论.

定理 8.3.5 设 $A_1,\cdots,A_n,C\in\mathcal{B}(H,K)$. 则 $C\in\operatorname{span}\{A_1,\cdots,A_n\}$ 当且仅当 C 是 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 的 $[\frac{n+1}{2}]$- 正则局部线性组合.

证明 我们只需证明充分性. 相似于定理 8.3.3 的证明，对 n 用归纳法，由定理 8.3.2, 对于情形 $n=1$ 或 2, 结论成立.

假定 C 是 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 的 $[\frac{n+1}{2}]$- 正则局部线性组合且对满足 $1\leq m<n$ 的所有 m, 定理成立. 我们将证明 $C\in\operatorname{span}\{A_1,\cdots,A_n\}$. 我们可以把 n 看作是大于 2 的整数，那么 $[\frac{n+1}{2}]\geq 2$.

令 $k=\max\{\dim\operatorname{span}\{A_1x,\cdots,A_nx\}\mid x\in H\}$. 由定理 8.3.3 的证明易知，如果 $k=1,n-1$ 或 n, 那么 $C\in\operatorname{span}\{A_1,\cdots,A_n\}$.

因此我们可假定 $2 \le k \le n-2$. 不失一般性，设存在向量 x_0 使得 $\{A_i x_0\}_{i=1}^k$ 线性无关. 从而存在数 γ_i 和 λ_{ij} $(i = 1,\cdots,k,$ $j=1,\cdots,n-k)$ 使得 Cx_0 具有 (8.3.3) 式中的形式但对所有的 j, $|t_j| \le M$. 取 $\mathbf{x} = (x_0\ x_1\ \cdots\ x_{[\frac{n-1}{2}]})$, 则对任意的 $(x_1\ \cdots\ x_{[\frac{n-1}{2}]}) \in H^{([\frac{n-1}{2}])}$, 相应地存在满足 $|t_j| \le M$ 的 $(t_1\ \cdots\ t_{n-k}) \in \mathbb{C}^{(n-k)}$ 使得对每个 $r = 1,\cdots,[\frac{n-1}{2}]$, 有 (8.3.4) 式成立. 正如 (8.3.5) 式中那样取 S 和 T_j $(j=1,\cdots,n-k)$, 则 $C-S$ 是 $\{T_j\}_{j=1}^{n-k}$ 的 $[\frac{n-1}{2}]$- 正则局部线性组合. 注意到 $[\frac{n-k+1}{2}] \le [\frac{n-1}{2}]$. 对 $n-k$ 使用归纳假定，我们得到 $C-S$ 是 $\{T_j\}_{j=1}^{n-k}$ 的线性组合，从而 C 也是 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 的线性组合. 证毕.

推论 8.3.6 设 $n \ge 2$. 则 C 是 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 的线性组合当且仅当 C 是 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 的 $(n-1)$- 正则局部线性组合.

注 8.3.1 应当指出，定理 8.3.5 和推论 8.3.6 对于复向量空间上的线性映射成立，定理 8.3.3 和推论 8.3.4 对于实或复向量空间上的线性映射都成立.

§8.4 完全正初等算子的进一步刻画

正如我们将会看到的，初等算子的长度起着极为重要的作用. 不难看出，长度为 1 的正初等算子必是完全正的. 本节将利用上节的结果进而证明，如果初等算子的长度 n 大于 1, 那么 $[\frac{n}{2}]$- 正性就已蕴涵完全正性，其中 $[t]$ 代表实数 t 的整数部分.

定理 8.4.1 假定 $\Phi = \sum_{i=1}^{k} A_i(\cdot)B_i : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是正初等算子. 如果下列条件之一成立，则 Φ 是完全正的:

(i) $k \le 3$;

(ii) $\dim \operatorname{span}\{A_1,\cdots,A_k\}_F \le 2$ (或 $\dim \operatorname{span}\{B_1,\cdots,B_k\}_F \le 2$);

(iii) 存在向量 $x \in H$ (或 $y \in K$) 使得 $\{A_i x\}_{i=1}^k$ (或 $\{B_i y\}_{i=1}^k$) 是线性无关的.

证明 假定 (i) 成立. 不失一般性, 我们可假定 (A_1, A_2, A_3) 和 (B_1, B_2, B_3) 线性无关. 因为 Φ 是正的, 由定理 8.2.4, 存在线性无关集 $\{D_1, D_2, D_3\} \subset\text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$ 及满足 $1 < l \leq 3$ 整数 l 使得

$$\Phi = \sum_{i=1}^{l} D_i(\cdot)D_i^* - \sum_{i=l+1}^{3} D_i(\cdot)D_i^*.$$

如果 $l \neq 3$, 那么 D_3 是 D_1 或 (D_1, D_2) 的正则局部线性组合. 应用定理 8.3.2 的 (i) 或 (iii), 我们有 D_3 是 D_1 和 D_2 的线性组合, 矛盾. 所以 $l = 3$, 即

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} D_i(\cdot)D_i^*$$

是完全正的.

(i) 和 (iii) 可类似地证明. 证毕.

推论 8.4.2 如果 $\Phi = \sum_{i=1}^{k} C_i(\cdot)C_i^* - \sum_{j=1}^{l} D_j(\cdot)D_j^*$ 正但不完全正, 那么

(i) $k \geq 3$;

(ii) 至少存在一个 $D_j \notin\text{span}\{C_1, \cdots, C_k\}$;

(iii) 对于 $j = 1, \cdots, l$, 每个 D_j 都是 $\{C_i\}_{i=1}^{k}$ 的线性组合的有限秩扰动.

证明 (i) 和 (ii) 是显然的. 因为 D_j 是 $\{C_i\}$ 的局部线性组合, 因此由定理 8.3.2 (5) 及其证明知 (iii) 成立. 证毕.

推论 8.4.3 非完全正线性映射 $\Phi : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ 是正的充分必要条件是 Φ 具有形式

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} C_i(\cdot)C_i^* - D(\cdot)D^*,$$

其中 $\{C_1, C_2, C_3, D\}$ 线性无关且 D 是 $\{C_1, C_2, C_3\}$ 的压缩局部线性组合, 即对任意的 $x \in \mathbb{C}^{(2)}$, 存在满足 $|\lambda_1(x)|^2 + |\lambda_2(x)|^2 +$

$|\lambda_3(x)|^2 \leq 1$ 的数 $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ 和 $\lambda_3(x)$ 使得 $Dx = \lambda_1(x)C_1x + \lambda_2(x)C_2x + \lambda_3(x)C_3x$.

使用上面的结论, 我们可构造一个正但非完全正的初等算子.

例 8.4.1 令

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = C_2^* \quad 且 \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix},$$

其中对于 $i = 1, 2$, $c_i, d_i \in \mathbb{C}$ 满足 $|c_i| \geq |d_i|$, $0 < |c_1\overline{c_2} - d_1\overline{d_2}| < 1$ 并且 $c_1d_2 - c_2d_1 \neq 0$. 那么

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} C_i(\cdot)C_i^* - D(\cdot)D^*$$

是 $M_2(\mathbb{C})$ 上的正线性映射但不是完全正的.

下面给出本节的主要结果.

定理 8.4.4 令 $\Phi = \sum_{i=1}^{n} A_i(\cdot)B_i$ 是从 $\mathcal{B}(H)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 的初等算子, 其中 $n > 1$. 那么 Φ 是完全正的充分必要条件是 Φ 为 $[\frac{n}{2}]$-正的.

证明 我们可假定 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{B_i\}_{i=1}^n$ 线性无关.

由定理 8.4.1, 我们可假定 $n \geq 4$. 如果 Φ 是 $[\frac{n}{2}]$- 正的, 那么由定理 8.1.1 和推论 8.4.2, 存在线性无关的集合 $\{C_i\}_{i=1}^n \subset \mathrm{span}\{A_1, \cdots, A_n\}$ 和 k (≥ 3) 使得

$$\Phi = \sum_{i=1}^{k} C_i(\cdot)C_i^* - \sum_{i=k+1}^{n} C_i(\cdot)C_i^*.$$

我们只需证明 $k = n$ 即可. 反之, 如果 $k \leq n - 1$, 因为 Φ 是 $[\frac{n}{2}]$-正的, 因此由定理 8.2.4, 我们有 C_n 是 $\{C_i\}$ 的 $[\frac{n}{2}]$- 正则局部线性组合. 从 $k \leq n - 1$ 知 $[\frac{k+1}{2}] \leq [\frac{n}{2}]$, 现在由定理 8.3.5, 我们有 C_n

是 $\{C_i\}_{i=1}^k$ 的线性组合，矛盾．所以 $k=n$ 且由定理 8.1.2 知，Φ 是完全正的．证毕．

§8.5 初等算子的局部线性组合

设 X 是 Banach 空间. 符号 $\mathcal{L}(X)$ 代表 X 上的所有线性变换的集合. 令 $A_1,\cdots,A_k\in\mathcal{B}(X), C\in\mathcal{L}(X)$ 且令 $\mathcal{L}=\text{span}\{A_1,\cdots,A_k\}$. 如果对任意的 $x\in X$，存在数 $\alpha_1(x),\cdots,\alpha_k(x)$ 使得 $Cx=\alpha_1(x)A_1x+\cdots+\alpha_k(x)A_kx$, 即 C 是 $A_1,\cdots,A_k$ 的局部线性组合，称 C 是 $A_1,\cdots,A_k$ 的线性插值，或 C 插值 $A_1,\cdots,A_k$. 因此 C 插值 $A_1,\cdots,A_k$ 当且仅当 C 插值 $\mathcal{L}$, 即对每个 $x\in X$, $Cx\in\mathcal{L}x$. 进而如果能够选择 $\alpha_i(x)$ 使得 $\sup_{x\in X}\{|\alpha_i(x)|\mid i=1,\cdots,k\}<\infty$, 称 C 有界插值 $A_1,\cdots,A_k$. 容易验证，如果 C 有界插值 $A_1,\cdots,A_k$, 则当取 $\mathcal{L}$ 中的基 $\{B_1,\cdots,B_r\}$ 时，C 也有界插值 $B_1,\cdots,B_r$. 所以我们说 C 有界插值 $\mathcal{L}$ 是有意义的. 记 $\text{ref}_a(\mathcal{L})=\{T\in\mathcal{L}(X)\mid$ 对任意的 $x\in X, Tx\in\mathcal{L}x\}$. 则 C 插值 $\mathcal{L}$ 当且仅当 $C\in\text{ref}_a(\mathcal{L})$. 如果 $\text{ref}_a(\mathcal{L})=\mathcal{L}$, 称 $\mathcal{L}$ 是代数自反的.

从现在起，我们把注意力集中在 $\mathcal{B}(X)$ 上初等算子的插值性质上．由第 8.3 节知，如果 C 插值 $\mathcal{L}=\text{span}\{A_1,\cdots,A_k\}\subset\mathcal{B}(X)$, 由于 $\text{ref}_a(\mathcal{L})=\mathcal{L}_I\dot{+}\text{ref}_a(\mathcal{L}_F)$ 且 $C=C_1\dot{+}C_2$, 我们有 $C\in\mathcal{L}$ 当且仅当 $C_2\in\mathcal{L}_F$. 因此问题简化到有限秩的情形．下面给出初等算子是有限秩或一秩线性映射的充分必要条件．如果 $\dim\text{rng}(\Phi)<\infty$ (或 $\dim\text{rng}(\Phi)=1$), 称 Φ 是有限秩 (或一秩) 线性变换，其中 $\text{rng}(\Phi)$ 代表 Φ 的值域.

定理 8.5.1 $\mathcal{B}(X)$ 上的初等算子 $\Phi(\cdot)=\sum\limits_{i=1}^k A_i(\cdot)B_i$ 具有有限秩当且仅当存在 $C_1,\cdots,C_r\in\text{span}\{A_1,\cdots,A_k\}\cap\mathcal{F}(X)$ 和 $D_1,\cdots,D_r\in\text{span}\{B_1,\cdots,B_k\}\cap\mathcal{F}(X)$ 使得 $\Phi(\cdot)=\sum\limits_{i=1}^r C_i(\cdot)D_i$.

证明 容易验证如果 $A, B\in\mathcal{B}(X)$ 是有限秩算子，则 $\tau(\cdot)=A(\cdot)B$ 在 $\mathcal{B}(X)$ 上具有有限秩. 因而如果存在 $C_i\in\text{span}\{A_1,\cdots,A_k\}$

$\cap\mathcal{F}(X)$ 和 $D_i \in\text{span}\{B_1,\cdots,B_k\}\cap\mathcal{F}(X)$ $(i=1,\cdots,r)$ 使得 $\Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{r}C_i(\cdot)D_i$, 则 Φ 一定具有有限秩.

反过来，假定 $\Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{k}A_i(\cdot)B_i$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的有限秩线性映射. 不失一般性，我们可假定 $(A_1,\cdots,A_k)$ 和 $(B_1,\cdots,B_k)$ 是线性无关的算子系. 因为 $(B_1,\cdots,B_k)$ 线性无关，因此存在 $x_1,\cdots,x_n\in X$ 和 $f_1,\cdots,f_n\in X^*$ 使得

$$\sum_{s=1}^{n}f_s(B_jx_s)=\begin{cases}1, & \text{当}j=1,\\ 0, & \text{当}j=2,\cdots,k.\end{cases}$$

由于 $\dim\operatorname{rng}(\Phi)<\infty$, 因此

$$\dim(\text{span}\{\Phi(x\otimes f_s)\mid x\in X,s=1,\cdots,n\})<\infty,$$

从而

$$\dim(\text{span}\{\Phi(x\otimes f_s)x_s\mid x\in X,s=1,\cdots,n\})<\infty.$$

又因为

$$\operatorname{rng}(A_1)\subseteq\text{span}\{\Phi(x\otimes f_s)x_s\mid x\in X,s=1,\cdots,n\},$$

因此 A_1 具有有限秩. 同理， $A_2,\cdots,A_k$ 也具有有限秩.

令 $\Phi_*(\cdot)=\sum_{i=1}^{k}B_i^*(\cdot)A_i^*$. 则 Φ_* 是 $\mathcal{B}(X^*)$ 上的初等算子，且它到 $\mathcal{B}(X)_*=\{T^*\mid T\in\mathcal{B}(X)\}$ 的限制 $\Phi_*|_{\mathcal{B}(X)_*}$ 具有有限秩. 又一次因为 $A_1,\cdots,A_k$ 线性无关，因此我们可找到向量 $y_1,\cdots,y_m\in X$, $g_1,\cdots,g_m\in X^*$ 使得

$$\sum_{s=1}^{m}g_i(A_jy_s)=\begin{cases}1, & \text{当}j=1,\\ 0, & \text{当}j=2,\cdots,k.\end{cases}$$

故对任意的 $f\in X^*$, 我们有

$$\sum_{s=1}^{m}\delta_*(f\otimes y_s)g_s=\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}B_j^*(f\otimes y_s)A_j^*g_s=B_1^*f.$$

因 $\Phi_*|_{\mathcal{B}(X)_*}$ 具有有限秩，类似对 A_1 的讨论知 B_1^* 具有有限秩，从而 B_1 也具有有限秩．同理可证 $B_2,\cdots,B_k$ 也具有有限秩．证毕．

推论 8.5.2 假定 $A_1,\cdots,A_k$ 以及 $B_1,\cdots,B_k$ 线性无关．则初等算子 $\Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{k}A_i(\cdot)B_i$ 具有有限秩当且仅当 A_i 和 B_i 具有有限秩．

对于一秩初等算子，我们有

定理 8.5.3 假定 $A_1,\cdots,A_k$ 以及 $B_1,\cdots,B_k$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 中的两个线性无关组．则初等算子 $\Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{k}A_i(\cdot)B_i$ 具有秩一当且仅当存在满足 $mn=k$ 的正整数 m,n 和一秩算子 $C_{ij}=x_i\otimes f_j\ \in\mathrm{span}\{A_1,\cdots,A_k\}$，$D_{ji}=y_j\otimes g_i\ \in\mathrm{span}\{B_1,\cdots,B_k\}$ $(i=1,\cdots,m\ j=1,\cdots,n)$ 使得

$$\Delta(\cdot)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}(\cdot)D_{ji}. \tag{8.5.1}$$

证明 显然如果 Φ 具有 (8.5.1) 中的形式，则 Φ 具有秩一．

反过来，如果 Φ 具有秩一，那么存在 $\lambda\in\mathcal{B}(X)^*$ 和 $D\in\mathcal{B}(X)$ 使得 $\Phi(\cdot)=\lambda(\cdot)D$．显然 D 的秩不大于某个整数 m．所以存在线性无关的向量 $x_1,\cdots,x_m\in X$ 和泛函 $g_1,\cdots,g_m\in X^*$ 使得 $D=\sum_{i=1}^{m}x_i\otimes g_i$．另一方面，因为 Φ 弱连续，因此 λ 也弱连续．所以存在 $y_1,\cdots,y_n\in X$ 和 $f_1,\cdots,f_n\in X^*$ 线性无关使得对所有的 $T\in\mathcal{B}(X)$，有 $\lambda(T)=\sum_{j=1}^{n}f_j(Ty_j)$．故对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$，

$$\Phi(T)=\sum_{j=1}^{n}f_j(Ty_j)\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\otimes g_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}TD_{ji},$$

其中 $C_{ij}=x_i\otimes f_j$，$D_{ji}=y_j\otimes g_i$，即 $\Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}(\cdot)D_{ji}$．

进而因为 $\{C_{ij}\}$ 和 $\{D_{ji}\}$ 是线性无关的算子系，因此 $mn=k$ 且 $C_{ij}\in\text{span}\{A_1,\cdots,A_k\}$, $D_{ji}\in\text{span}\ \{B_1,\cdots,B_k\}$ $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$. 证毕.

推论 8.5.4 令 Φ 如定理 8.5.3 中所设. 如果 k 是素数，那么 Φ 具有一秩当且仅当下列条件之一成立：

(i) 存在一秩算子 $C_i=x_i\otimes f_0,\ D_i=y_0\otimes f_i\ (i=1,\cdots,k)$ 使得 $\Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{k}C_i(\cdot)D_i$.

(ii) 存在一秩算子 $C_i=x_0\otimes f_i,\ D_i=y_i\otimes g_0\ (i=1,\cdots,k)$ 使得 $\Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{k}C_i(\cdot)D_i$.

推论 8.5.5 如果 $\Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{k}A_i(\cdot)B_i$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的一秩初等算子，则存在一秩算子 $C_1,\cdots,C_r$ 和 $D_1,\cdots,D_r$ 满足 $\text{span}\{C_1,\cdots,C_r\}=\text{span}\{A_1,\cdots,A_k\}$ 且 $\text{span}\{D_1,\cdots,D_r\}=\text{span}\{B_1,\cdots,B_k\}$ 使得 $\Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{r}C_i(\cdot)D_i$.

当我们考虑 $\mathcal{B}(X)$ 上初等算子的线性插值时，会很自然地提出下面的问题.

问题 8.5.1 如果 Φ 是初等算子 $\Delta_1,\cdots,\Delta_k$ 的线性插值，Φ 是否一定是 Δ_i 的线性组合？

问题 8.5.2 如果 Φ 是初等算子 $\Delta_1,\cdots,\Delta_k$ 的线性插值，Φ 是否一定是初等算子？

注意到如果 Φ 是初等算子 Δ_i 的线性组合，那么 Φ 是初等算子. 因此问题 8.5.2 弱于问题 8.5.1. 如果 Φ 插值 $\Delta_1,\cdots,\Delta_k$, 由 8.3 节和前面讨论，我们可得到 $\Phi\in\text{span}\{\Delta_1,\cdots,\Delta_k\}$ 的一些充分条件. 例如，我们有下列结论.

定理 8.5.6 令 $\Delta_i(\cdot)=\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}(\cdot)B_{ij}\ (i=1,\cdots,j)$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的初等算子且令 Φ 是 $\Delta_1,\cdots,\Delta_k$ 的线性插值. 如果 $\text{span}\{A_{ij}\mid j=$

$1, \cdots, k_i;\ i=1, \cdots, k\} \cap \mathcal{F}(X)=\{0\}$ 且 $\operatorname{span}\{B_{ij} \mid j=1, \cdots, k_i;$ $i=1, \cdots, k\} \cap \mathcal{F}(X)=\{0\}$, 那么 Φ 是 Δ_i 的线性组合.

但一般说来, 对问题 8.5.1 的回答是否定的. 我们先给出有限秩初等算子的一个抽象刻画.

定理 8.5.7 假设 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上弱连续的有限秩线性映射. 那么 Φ 是初等算子当且仅当 Φ 把一秩算子映到 $\mathcal{F}(X)$ 中, 或等价地, $\mathcal{F}(X)$ 在 Φ 作用下是不变的.

证明 显然条件是必要的. 下证充分性. 设 Φ 有限秩且在 $\mathcal{B}(X)$ 上弱连续. 则存在线性无关的算子 $D_1, \cdots, D_n \in \mathcal{B}(X)$ 和 $\mathcal{B}(X)$ 上的弱连续且线性无关的线性泛函 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 使得对所有的 $T \in \mathcal{B}(X)$,

$$\Phi(T)=\lambda_1(T) D_1+\cdots+\lambda_n(T) D_n.$$

现在我们只需证明每个 $\lambda_k(\cdot) D_k$ 是初等算子即可. 因为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 线性无关, 因此对每个 $k=1, \cdots, n$, 存在某个有限秩元 $T_k \in \mathcal{B}(X)$ 使得 $\lambda_k(T_k) \neq 0$ 但是当 $l \neq k$ 时, $\lambda_l(T_k)=0$. 因为 $\Phi(T_k)=\lambda_k(T_k) D_k$ 且 Φ 把有限秩算子映成有限秩算子, 因此 D_k 具有有限秩. 现在如果 λ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上弱连续的线性泛函且 D 是一个有限秩算子, 则存在 $x_1, \cdots, x_s,\ u_1, \cdots, u_r \in X$ 和 $f_1, \cdots, f_s,\ h_1, \cdots, h_r \in X^*$ 使得对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$, 有 $\lambda(T)=\sum_{j=1}^{s} f_j(T x_j)$ 且 $D=\sum_{i=1}^{r} u_i \otimes h_i$. 令 $C_{ij}=u_i \otimes f_j$ 且令 $D_{ji}=x_j \otimes h_i\ (l \neq k)$. 则 $\lambda(\cdot) D=\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} C_{ij}(\cdot) D_{ji}$, 即 $\lambda(\cdot) D$ 是初等算子. 证毕.

推论 8.5.8 如果 X 是有限维的, 则 $\mathcal{B}(X)$ 上的每个线性映射都是初等算子.

下面举反例给出问题 8.5.1 的否定回答.

例 8.5.1 存在初等算子 $\Delta_1, \cdots, \Delta_k\ (k \geq 3)$ 和线性映射 Φ 使得 Φ 有界插值 $\Delta_1, \cdots, \Delta_k$ 但 $\Phi \notin \operatorname{span}\{\Delta_1, \cdots, \Delta_k\}$.

证明 设 X_2 是 2 维空间. 由推论 8.5.8, $\mathcal{B}(X_2)$ 上的每个线性

映射都是初等算子. 注意到 $\mathcal{B}(\mathcal{B}(X_2))$ 拓扑同构于 $\mathcal{B}(X_4)$. 因此问题简化为寻找算子 A_1, A_2, A_3, $C \in \mathcal{B}(X_4)$ 使得 C 有界插值 A_1, A_2, A_3 但 C 不是 A_i 的线性组合. 现在由例 8.3.2 知, 关于 X_4 的基, 只要取

$$A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $|d_1| \geq |f_1| > 0$, $|d_2| \geq |f_2| > 0$, $0 < |d_1 d_2 - f_1 f_2| < 1$ 且 $d_1 f_2 - d_2 f_1 \neq 0$ (例如令 $d_1 = f_1 = 1, d_2 = 2$ 且 $f_2 = \frac{2}{3}$) 即可.

下面的定理对问题 8.5.2 给出了肯定的回答.

定理 8.5.9 设 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的线性映射 (不必在任何拓扑下连续). 则 Φ 是初等算子当且仅当存在初等算子 $\Delta_1, \cdots, \Delta_k$ ($k < \infty$) 使得 Φ 是它们的线性插值.

为证明该定理, 我们还需要一些事实.

令 V 是拓扑线性空间. $\mathcal{L}(V)$ 和 $\mathcal{B}(V)$ 分别代表 V 上的所有线性变换和所有连续线性变换构成的代数. 如果 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{B}(V)$ 的线性子空间, 记

$$\text{ref}_a(\mathcal{E}) = \{A \in \mathcal{L}(V) \mid Ax \in \mathcal{E}x, \forall x \in V\},$$

$$\text{ref}_{at}(\mathcal{E}) = \{A \in \mathcal{B}(V) \mid Ax \in \mathcal{E}x, \forall x \in V\},$$

$$\text{ref}(\mathcal{E}) = \{A \in \mathcal{B}(V) \mid Ax \in \overline{\mathcal{E}x}, \forall x \in V\}.$$

一般来说这三个集合互不相同. 如果 $\text{ref}_a(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ (或 $\text{ref}_{at}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$), 称 $\mathcal{E}$ 是代数自反的 (或拓扑代数自反的), 而当 $\text{ref}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ 时称 $\mathcal{E}$ 是自反的.

引理 8.5.10 如果 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{B}(V)$ 的有限维子空间，则 $\mathrm{ref}(\mathcal{E}) = \mathrm{ref}_a(\mathcal{E}) = \mathrm{ref}_{at}(\mathcal{E})$.

证明 显然 $\mathrm{ref}(\mathcal{E}) = \mathrm{ref}_{at}(\mathcal{E})$ 且 $\mathrm{ref}_{at}(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{ref}_a(\mathcal{E})$. 因此我们只需证明当 $C \in \mathrm{ref}_a(\mathcal{E})$ 时必有 C 连续即可. 令 $\mathcal{E}_F = \mathcal{E} \cap \mathcal{F}(V)$. 则 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_I \dot{+} \mathcal{E}_F$, 且由文献 [140], 我们有 $\mathrm{ref}_a(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_I \dot{+} \mathrm{ref}_a(\mathcal{E}_F)$. 如果 $C \in \mathrm{ref}_a(\mathcal{E})$, 那么 $C = C_1 + C_2$, 其中 $C_1 \in \mathcal{E}_I$ 连续且 $C_2 \in \mathrm{ref}_a(\mathcal{E}_F)$. 注意到 C_2 是有限秩变换 (见文献 [140]). 取 $\mathcal{E}_F$ 中的一组基 $\{A_1, \cdots, A_k\}$, 记 $A_i = \delta_{i1} y_{i1} + \cdots + \delta_{in_i} y_{in_i}$ $(i = 1, \cdots, k)$, $C_2 = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, 其中 $y_{ij}, x_l \in V$, δ_{ij} 是 V 上的连续线性泛函, λ_l 是 V 上的线性泛函且 $\{x_l\}$, $\{\lambda_l\}$ 是线性无关集. 现在对任意的向量 $x \in V$, 因为 C_2 插值 $A_1, \cdots, A_k$, 因此对所有的 $j = 1, \cdots, n_i$ 及 $i = 1, \cdots, k$, $\delta_{ij}(x) = 0$ 蕴涵 $\lambda_l(x) = 0$ $(l = 1, \cdots, n)$, 从而 λ_l 是 δ_{ij} 的线性组合. 所以 λ_l 连续，于是 C_2 连续. 证毕.

引理 8.5.11 如果 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的线性映射且插值某些初等算子 $\Delta_1, \cdots, \Delta_k$, 则 Φ 弱连续.

证明 记 $\mathcal{E} = \mathrm{span}\{\Delta_1, \cdots, \Delta_k\}$. $\mathcal{L}(\mathcal{B}(X))$ 代表 $\mathcal{B}(X)$ 上的所有线性变换的集合且 $\mathcal{B}^w(\mathcal{B}(X))$ 代表 $\mathcal{B}(X)$ 上所有弱连续线性映射的集合. 显然 $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}^w(\mathcal{B}(X))$. 令

$$\mathrm{ref}_a(\mathcal{E}) = \{\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{B}(X)) \mid \Psi(T) \in \mathcal{E}(T), \forall T \in \mathcal{B}(X)\},$$

$$\mathrm{ref}_{awt}(\mathcal{E}) = \{\Psi \in \mathcal{B}^w(\mathcal{B}(X)) \mid \Psi(T) \in \mathcal{E}(T), \forall T \in \mathcal{B}(X)\}.$$

因为 $\mathcal{B}(X)$ 关于弱算子拓扑是拓扑向量空间，由引理 8.5.10, 我们有 $\mathrm{ref}_a(\mathcal{E}) = \mathrm{ref}_{awt}(\mathcal{E})$. 现在如果 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的线性映射且插值 $\Delta_1, \cdots, \Delta_k$, 则 $\Phi \in \mathrm{ref}_a(\mathcal{E})$, 故 $\Phi \in \mathrm{ref}_{awt}(\mathcal{E})$, 即 Φ 是弱连续的. 证毕.

定理 8.5.9的证明 必要性部分是平凡的. 为证明充分性，假定 $\Delta_1, \cdots, \Delta_k$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的初等算子且 Φ 线性插值 $\mathcal{E} = \mathrm{span}\{\Delta_i \mid i = 1, \cdots, k\}$. 则 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_I \dot{+} \mathcal{E}_F$ 且 $\Phi \in \mathrm{ref}_a(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_I \dot{+} \mathrm{ref}_a(\mathcal{E})$, 其中 $\mathcal{E}_F = \mathcal{E} \cap \mathcal{F}(\mathcal{B}(X))$. 记 $\Phi = \Phi_1 \dot{+} \Phi_2$, 其中 $\Phi_1 \in \mathcal{E}_I$ 且 $\Phi_2 \in \mathrm{ref}_a(\mathcal{E}_F)$.

显然 Φ_1 是初等算子，因此我们必须证明 Φ_2 也是初等算子．由引理 8.5.11, Φ_2 弱连续且容易验证 Φ_2 具有有限秩．进而 Φ_2 把 $\mathcal{B}(X)$ 中的一秩算子映成有限秩算子，所以由定理 8.5.7, Φ_2 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的初等算子．证毕．

如果存在 $A \in \mathcal{B}(X)$ (或 $A, B \in \mathcal{B}(X)$) 使得对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$, $\delta(T) = \delta_A(T) = AT - TA$ (或 $\delta(T) = \delta_{AB}(T) = AT - TB$), 称 δ 是 (内) 导子 (或广义导子)．

容易看出，如果 X 是无限维 Banach 空间且 δ_A 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的导子，那么由推论 8.5.2, 当 $A \neq 0$ 时， δ_A 必为无限秩的．也有导子的线性组合仍然是导子．对于广义导子，相同的结论也成立．现在由定理 8.3.2, 下面的结论是显然的．

定理 8.5.12 设 X 是无限维的 Banach 空间．令 $\delta_1, \cdots, \delta_k$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的导子 (或广义导子)．则线性映射 Φ 插值 $\delta_1, \cdots, \delta_k$ 当且仅当 Φ 是 δ_i 的线性组合．

推论 8.5.13 如果 X 是无限维的，那么 $\mathcal{B}(X)$ 上导子 (或广义导子) 构成的有限维子空间是代数自反的．

更一般地，设 $\mathcal{A}$ 是 Banach 代数且 δ 是 $\mathcal{A}$ 上的线性映射．如果对所有的 $x, y \in \mathcal{A}$, $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$, 称 δ 是导子；如果存在 $a \in \mathcal{A}$ 使得对任意的 $x \in \mathcal{A}$, 有 $\delta(x) = ax - xa$, 称 δ 是内导子．

定理 8.5.14 如果 $\mathcal{A}$ 是 C*- 代数且 δ 是 $\mathcal{A}$ 的非零导子，则 $\dim \operatorname{rng}(\delta) \geq 2$．

证明 显然我们可假定 $\mathcal{A}$ 含单位元，且可表示为 $\mathcal{B}(H)$ 的 C*- 子代数，其中 H 是 Hilbert 空间．如果存在 $\mathcal{A}$ 的一秩导子 δ, 则存在 $D \in \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}$ 上的线性泛函 λ 使得对所有的 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\delta(T) = \lambda(T)D$. 注意到，由于 C*- 代数上的每个导子都是 σ- 弱连续的 (见文献 [68]), 因此 λ 也是 σ- 弱连续的．令 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 是 $\mathcal{A}$ 的弱闭包．由于 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{M}$ 中 σ- 弱稠，因此 δ (或 λ) 能够延拓为 M 上的导子 $\tilde{\delta}$ (或线性泛函 $\tilde{\lambda}$)．显然 $\tilde{\delta} = \tilde{\lambda}(\cdot)D$, 从而 $\tilde{\delta}$ 也具有秩一．除此之外，因为 $\mathcal{M}$ 是 von Neumann 代数，因此 $\tilde{\delta}$ 一定是内的 (见文献 [68]), 即存在 $A \in \mathcal{M}$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{M}$, 有

$\tilde{\delta}(T)=AT-TA$. 现在 $\tilde{\lambda}\neq 0$ 蕴涵存在自伴投影 $P\in\mathcal{M}$ 使得 $\tilde{\delta}(P)=\tilde{\lambda}(P)D=AP-PA\neq 0$. 不失一般性，可假定 $\tilde{\lambda}(P)=1$ 且 $AP-PA=D$. 那么我们有 $AT-TA=\tilde{\lambda}(T)(AP-PA)$, 所以

$$PATP-PTAP=0 \qquad \forall T\in\mathcal{M}. \tag{8.5.2}$$

关于分解 $H=\mathrm{rng}(P)\oplus\ker(P)$, 令

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}, \qquad P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

容易验证 $\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & A_{21}^* \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{12}^* & 0\end{pmatrix}$ $\in\mathcal{M}$. 在 (8.5.2) 中用这四个元代替 T, 我们得到 $A_{12}A_{12}^*=0$, $A_{21}^*A_{21}=0$. 所以 $A_{12}=0$, $A_{21}=0$ 且 $AP=PA$, 与 $\tilde{\delta}(P)\neq 0$ 矛盾. 故必有 $\dim\mathrm{rng}(\delta)\geq 2$. 证毕.

注 8.5.1 不难找到一个无限维 C*- 代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}$ 上的导子 δ 使得 δ 具有秩 2. 也容易找到 Banach 代数 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}$ 上具有秩一的导子.

由引理 2.1.3 和上面的定理，立得下面的推论.

推论 8.5.15 如果 δ_1 和 δ_2 是 C*- 代数上的两个导子，且如果对所有的 $x\in\mathcal{A}$, $\delta_1(x)$ 和 $\delta_2(x)$ 线性相关，则 δ_1 和 δ_2 线性相关.

C*- 代数 $\mathcal{A}$ 上的线性映射如果具有形式 $x\mapsto ax-xb$, 称为 $\mathcal{A}$ 上的广义导子，其中 a,b 是 $\mathcal{A}$ 中的固定元. 在结束本节之前，我们给出 Calkin 代数中导子线性插值的刻画.

定理 8.5.16 设 $\{\delta_1,\delta_2,\cdots\}$ 是 Calkin 代数 $\mathcal{C}(H)$ 上的可数个内导子 (或广义导子) 且 $\mathcal{E}$ 是其线性张. 如果 $\Phi\in\mathcal{B}(\mathcal{C}(H))$ 插值 $\mathcal{E}$, 则 $\Phi\in\mathcal{E}$.

证明 由文献 [72] 知， Calkin 代数 $\mathcal{C}(H)$ 上的广义导子非紧，因此具有无限秩. 这表明 $\mathcal{E}_F=\{0\}$. 注意到定理 8.3.2 (5) 证明中的断言对 Banach 空间算子以及 $\mathcal{L}$ 具有可数 Hamel 基时也成

立. 所以 $\mathcal{E}$ 是 (拓扑) 代数自反的, 即如果 $\Phi \in \mathcal{B}(\mathcal{C}(H))$ 插值 $\mathcal{E}$, 则 $\Phi \in \mathcal{E}$. 证毕.

§8.6　k- 秩不增线性映射和初等算子的刻画

设 Φ 是从 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y)$ 的线性映射, 其中 X 和 Y 是数域 $\mathbb{F}$ $(=\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R})$ 上的 Banach 空间. 令 $\mathbf{A} = (A_1 \ \cdots \ A_n) \in \mathcal{B}(X^{(n)}, Y)$ 且 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(Y, X^{(n)})$. 则初等算子 Φ 可表示为 $\Phi(T) = \mathbf{A}T^{(n)}\mathbf{B}$.

定义 8.6.1　设 $\Phi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ 是线性映射. 如果对任意的 $T \in \mathcal{F}(X)$, 有 $\text{rank}(\Phi(T)) \le k(\text{rank}(T))$, 称 Φ 是 k- 秩不增的; 如果对每个正整数 n, Φ_n 都是 k- 秩不增的, 称 Φ 完全 k- 秩不增.

本节我们将讨论 k- 秩不增的线性映射, 并给出从 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y)$ 的初等算子的抽象刻画. 首先我们讨论 $\mathcal{F}(X)$ 和 $\mathcal{F}(Y)$ 之间的完全 k- 秩不增线性映射.

令 Z 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间且 $\Psi : Z \to M_N(\mathbb{F})$ 是线性映射. 则存在 N^2 个线性泛函 $\psi_{ij} : Z \to \mathbb{F}$ 使得 $\Psi(z) = (\psi_{ij}(z))$. 令 $M_N(Z)$ 是 Z 上的所有 $N \times N$ 矩阵组成的线性空间. 在 $M_N(Z)$ 上定义线性泛函 $\widehat{\Psi}$ 为 $\widehat{\Psi}((z_{ij})) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{ij} \psi_{ij}(z_{ij})$. 则由 $\widehat{\Psi}$ 和 $\psi_{ij}(x) = N\widehat{\Psi}(xE_{ij})$, 我们可重新得到 Ψ, 其中 E_{ij} 是仅在位置 (i,j) 为 1, 其他位置为 0 的 $N \times N$ 矩阵, 即 $N \times N$ 矩阵单位.

引理 8.6.1　设 $\Phi : \mathcal{F}(X) \to M_N(\mathbb{F})$ 是线性映射, 则

(1) Φ 完全 k- 秩不增当且仅当 $\widehat{\Phi}$ 完全 k- 秩不增.

(2) Φ 是长度为 r 的初等算子当且仅当 $\widehat{\Phi}$ 是长度为 r 的初等算子.

(3) 存在算子网 $\{A_\lambda\} \subset \mathcal{B}(X, \mathbb{F}^N)$ 和 $\{B_\lambda\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{F}^N, X)$ 使得 $\Phi(T) = \lim_\lambda A_\lambda T B_\lambda$ (SOT 或 WOT) 对任意的 $T \in \mathcal{F}(X)$ 都成立当

且仅当存在算子网 $\{C_\lambda\} \subset \mathcal{B}(X^{(N)}, \mathbb{F})$ 和 $\{D_\lambda\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{F}, X^{(N)})$ 使得 $\widehat{\Phi}((T_{ij})) = \lim_\lambda C_\lambda (T_{ij}) D_\lambda$ (SOT 或 WOT) 对任意的 $(T_{ij}) \in \mathcal{F}(X^{(N)})$.

证明 (1) 设 Φ 是完全 k- 秩不增的，我们证明 $\widehat{\Phi}$ 是 k- 秩不增的. 其完全 k- 秩不增性可类似证之. 显然

$$\widehat{\Phi}((S_{ij})) = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Phi_{N^2}(S_{ij}E_{ij}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.6.1}$$

且算子矩阵 (S_{ij}) 与 $(S_{ij}E_{ij})$ 有相同的秩. 因为 Φ_{N^2} 是 k- 秩不增的，故 $\widehat{\Phi}$ 也是 k- 秩不增的.

反之，设 $\widehat{\Phi}$ 是完全 k- 秩不增的. 对每个 $T \in \mathcal{F}(X)$, 我们有

$$\Phi(T) = N\widehat{\Phi}_N(TE_{ij}).$$

由于 $\widehat{\Phi}_N$ 是 k- 秩不增的而 T 与 (TE_{ij}) 具有相同的秩，故知 Φ 是 k- 秩不增的. 类似可证对每个 n, Φ_n 都是 k- 秩不增的，从而 Φ 是完全 k- 秩不增的.

(2) 由关系式 (8.6.1) 立得.

(3) 如果存在算子网 $\{A_\lambda\}$ 和 $\{B_\lambda\}$ 使得对每个 $S \in \mathcal{F}(X)$ 都有 $\Phi(S) = \lim_\lambda A_\lambda S B_\lambda$ (SOT 或 WOT), 那么对每个 $(S_{ij}) \in M_N(\mathcal{F}(X))$, 我们都有

$$\widehat{\Phi}((S_{ij})) = \lim_\lambda \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} A_\lambda^{(N)}(S_{ij}E_{ij})B_\lambda^{(N)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

注意到，存在矩阵 U 使得对每个 (S_{ij}) 都有

$$(S_{ij}E_{ij}) = U^* \begin{pmatrix} (S_{ij}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U,$$

也存在矩阵 V 使得

$$\begin{pmatrix} (S_{ij}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = V^*(S_{ij})V.$$

因此,

$$\widehat{\Phi}(S_{ij}) = \lim_{\lambda} \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} A_\lambda^{(N)} U^* V^* (S_{ij}) V U B_\lambda^{(N)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

到此必要性得证. 充分性可类似证之. 证毕.

定理 8.6.2 设 $\Phi : \mathcal{F}(X) \to M_N(\mathbb{F})$ 是有界线性映射, 则下列叙述等价:

(1) Φ 完全 k- 秩不增.

(2) $\Phi_{(k+1)N^2}$ 是 k- 秩不增的.

(3) 存在 $A_1, \cdots, A_r \in \mathcal{B}(X, \mathbb{F}^N)$ 和 $C_1, \cdots, C_r \in \mathcal{B}(X^*, \mathbb{F}^N)$ $(r \le k)$ 使得 $\Phi(T) = \sum\limits_{i=1}^{r} A_i T C_i^*|_X$.

证明 (3)⇒(1)⇒(2) 显然. 事实上, 由定理 2.2.1 易知, 形式为 $\Phi(T) = \sum\limits_{i=1}^{r} A_i T C_i^*|_X$ 的每个线性映射都是完全 r- 秩不增的. (1)⇒(3). 由引理 8.6.1, 我们可假定 $N = 1$, 即 Φ 是线性泛函. 我们往证存在 $r \le k$, 向量 $\xi = (u_1, \cdots, u_r)^{tr} \in X^{(r)}$ 和 $\eta = (g_1, \cdots, g_r)^{tr} \in (X^*)^{(r)}$ 使得 $\Phi(T) = \sum\limits_{i=1}^{k} \langle Tu_i, g_i\rangle = \langle T^{(k)}\xi, \eta\rangle$. 假定 Φ 不是完全 $(k-1)$- 秩不增的 (否则考虑 $r = \min\{l \mid l \le k$, Φ 是完全 l- 秩不增的 $\}$). 则存在一秩算子 $S = (S_{ij}) \in M_n(\mathcal{F}(X))$ $(n \ge k)$ 使得 $\operatorname{rank}((\Phi(S_{ij}))) = k$. 通过取 $(\Phi(S_{ij}))$ 的 k- 秩子矩阵知可取 $n = k$, 故 $(\Phi(S_{ij})) \in M_k(\mathbb{F})$ 可逆 (这显然也有 (2)⇒(1) 对于情形 $N = 1$ 成立). 所以存在 $k \times k$ 可逆矩阵 (c_{ij}) 和 (d_{ij})

使得 $(c_{ij})(\Phi(S_{ij}))(d_{ij}) = I_k$. 令 $C = I \otimes (c_{ij})$ 且 $D = I \otimes (d_{ij})$, 则 CSD 仍然具有一秩, 容易验证 $\Phi_k(CSD) = I_k$. 因此可取一秩算子 $S = (S_{ij}) \in M_k(\mathcal{F}(X))$ 使得 $\Phi_k(S) = I_k$, 即存在向量 $\{x_i\}_{i=1}^k \subset X$ 和线性泛函 $\{f_i\}_{i=1}^k \subset X^*$ 使得 $\Phi(x_i \otimes f_j) = \delta_{ij}$. 对任意的 $x_{k+1} = x \in X$ 及 $f_{k+1} = f \in X^*$, $R = (x_i \otimes f_j)_{(k+1)\times(k+1)}$ 具有一秩, 从而 $\Phi_{k+1}(R)$ 的秩不大于 k. 因为

$$\Phi_{k+1}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \Phi(x_1 \otimes f) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \Phi(x_2 \otimes f) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \Phi(x_k \otimes f) \\ \Phi(x \otimes f_1) & \Phi(x \otimes f_2) & \cdots & \Phi(x \otimes f_k) & \Phi(x \otimes f) \end{pmatrix},$$

故对所有的 $x \in X$ 及 $f \in X^*$, 我们有

$$\Phi(x \otimes f) = \sum_{i=1}^k \Phi(x \otimes f_i)\Phi(x_i \otimes f).$$

注意到 $\Phi(x \otimes f)$ 是有界双线性型, 所以存在有界线性算子 $G \in \mathcal{B}(X^*)$ 使得 $\Phi(x \otimes f) = \langle x, Gf\rangle (= (Gf)(x))$. 因此我们有

$$\Phi(x \otimes f) = \sum_{i=1}^k \langle x, Gf_i\rangle\langle x_i, Gf\rangle = \sum_{i=1}^k \langle (x \otimes f)G^* x_i, Gf_i\rangle.$$

令 $u_i = G^* x_i \in X^{**}$ 且 $g_i = Gf_i$ $(i = 1, \cdots, k)$, 则对所有的 $T \in \mathcal{F}(X)$, 有

$$\Phi(T) = \sum_{i=1}^k \langle Tu_i, g_i\rangle,$$

其中 $Tu_i = T^{**}u_i \in X$.

(2)⇒(1). 由 (1)⇒(3) 的证明知, 线性泛函 φ 完全 k- 秩不增当且仅当 φ_{k+1} 是 k- 秩不增的. 如果 $\Phi : \mathcal{F}(X) \to M_N(\mathbb{F})$ 是线性

映射，则线性泛函 $\widehat{\Phi}: M_N(\mathcal{F}(X)) \to \mathbb{F}$ 可记为

$$\widehat{\Phi}((T_{ij})) = \frac{1}{N}(1\ 1\ \ \cdots\ 1)\Phi_{N^2}((T_{ij}E_{ij}))\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= A\Phi_{N^2}((T_{ij}E_{ij}))B,$$

其中 A 是每个表值均为 $\frac{1}{N}$ 的 $N^2 \times 1$ 阶矩阵且 B 是每个表值均为 1 的 $1 \times N^2$ 阶矩阵. 因此 $(\widehat{\Phi})_n(\cdot) = A^{(n)}\Phi_{nN^2}(\cdot)B^{(n)}$. 如果 $\Phi_{(k+1)N^2}$ 是 k- 秩不增的，那么 $(\widehat{\Phi})_{k+1}$ 是 k- 秩不增的，从而 $\widehat{\Phi}$ 是完全 k- 秩不增的，故由引理 8.6.1, Φ 也是完全 k- 秩不增的. 证毕.

推论 8.6.3 设 X 自反. 则有界线性映射 $\Phi: \mathcal{F}(X) \to M_N(\mathbb{F})$ 完全 k- 秩不增当且仅当存在 $A_1, \cdots, A_r \in \mathcal{B}(X, \mathbb{F}^{(N)})$ 和 $B_1, \cdots, B_r \in \mathcal{B}(\mathbb{F}^{(N)}, X)$ $(r \le k)$ 使得 $\Phi(T) = \sum_{i=1}^{r} A_i T B_i$, 即 Φ 是长度不大于 k 的初等算子.

推论 8.6.4 设 $\Phi: \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ 是有界线性映射. 如果 X 自反，则 Φ 完全 k- 秩不增当且仅当 Φ 是长度不大于 k 的初等算子按弱算子拓扑 (WOT) 或强算子拓扑 (SOT) 的点点极限.

证明 令 $\Lambda = \{\lambda \mid \lambda \subset Y$ 是由有限个范数为 1 的向量组成的线性无关集 $\}$. 对任意的 $\lambda \in \Lambda$, 取有界幂等算子 Q_λ 使得其值域是由 λ 张成的有限维子空间 Y_λ. 令 $\Phi_\lambda(\cdot) = Q_\lambda\Phi(\cdot)Q_\lambda$. 则对任意的 $T \in \mathcal{F}(X)$, $\Phi(T) = \lim_\lambda \Phi_\lambda(T)$ (SOT). 显然 Φ_λ 有界且完全 k- 秩不增，并且可看作是从 $\mathcal{F}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y_\lambda) \cong M_{N_\lambda}(\mathbb{F})$ 的映射，其中 $N_\lambda = \dim(Y_\lambda)$. 由推论 8.6.3 知，存在 $A_{\lambda_1}, \cdots, A_{\lambda_r} \in \mathcal{B}(X, Y_\lambda)$ 和 $B_{\lambda_1}, \cdots, B_{\lambda_r} \in \mathcal{B}(Y_\lambda, X)$ $(r \le k)$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{F}(X)$, 有 $\Phi_\lambda(T) = \sum_{i=1}^{r} A_{\lambda_i} T B_{\lambda_i} Q_\lambda$, 即 Φ_λ 是长度不大于 k 的初等算子. 充分性显然. 证毕.

$\mathcal{B}(X)$ 上的线性泛函 φ 称为是 σ-w 连续的，如果存在序列 $\{x_i\} \subset X$ 和 $\{f_i\} \subset X^*$ 使得 $\sum_i \|x_i\|^2\|f_i\|^2 < \infty$ 且对所有的 $T \in \mathcal{B}(X)$, 有 $\varphi(T) = \sum_i \langle Tx_i, f_i\rangle$. 由所有 σ-w 连续线性泛函决定的 $\mathcal{B}(X)$ 的局部凸拓扑称为 $\mathcal{B}(X)$ 的 σ-w 拓扑.

推论 8.6.5 设 $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 是 $(\sigma\text{-w})$—$(\sigma\text{-w})$ 连续的线性映射. Φ 完全 k- 秩不增当且仅当 Φ 是长度不大于 k 的初等算子网的 WOT (或 SOT) 点点极限.

证明 注意到，由闭图定理知，$(\sigma\text{-w})$-$(\sigma\text{-w})$ 连续的线性映射有界. 正如在推论 8.6.4 的证明中，定义 $\Phi_\lambda(\cdot) = Q_\lambda\Phi(\cdot)Q_\lambda$. 把 Φ_λ 看作是从 $\mathcal{F}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y_\lambda)$ 的映射，则 Φ_λ 具有定理 8.6.2 中的形式. 在定理 8.6.2 的证明中，不难看出，如果 Φ 是 σ-w 连续的，则 $G^*x_i \in X^{**}$ 关于 X^* 的 w*- 拓扑连续，故 $G^*x_i \in X$. 所以存在 $A_{\lambda_1}, \cdots, A_{\lambda r} \in \mathcal{B}(X, Y_\lambda)$ 和 $B_{\lambda_1}, \cdots, B_{\lambda_r} \in \mathcal{B}(Y_\lambda, X)$ $(r \le k)$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{F}(X)$, 有 $\Phi_\lambda(T) = \sum_{i=1}^{r} A_{\lambda_i}TB_{\lambda_i}Q_\lambda$. 因为 Φ_λ 是 σ-w 连续的且 $\mathcal{F}(X)$ 在 $\mathcal{B}(X)$ 中 σ-w 稠，故对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$, 有 $\Phi_\lambda(T) = \sum_{i=1}^{r} A_{\lambda_i}TB_{\lambda_i}Q_\lambda$. 证毕.

现在我们陈述并证明本节的主要结论，从而给出初等算子的抽象刻画.

定理 8.6.6 设 X 和 Y 是数域 $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$) 上的 Banach 空间. 令 $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 是线性映射. 则 Φ 是长度不大于 k 的初等算子当且仅当 Φ 完全 k- 秩不增且 $(\sigma\text{-w})$-$(\sigma\text{-w})$ 连续.

证明 长度不大于 k 的初等算子显然完全 k- 秩不增且 $(\sigma\text{-w})$-$(\sigma\text{-w})$ 连续.

下面设 Φ 是完全 k- 秩不增的 $(\sigma\text{-w})$-$(\sigma\text{-w})$ 连续线性映射. 我们可假定 Φ 不是完全 $(k-1)$- 秩不增的. 对任意的 $y \in Y$ 及 $g \in Y^*$, $\langle\Phi(T)y, g\rangle$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上 σ-w 连续的线性泛函且完全 k- 秩不增. 由推论 8.6.5, 存在 $\xi(y, g) \in X^{(k)}$ 和 $\eta(y, g) \in (X^*)^{(k)}$ 使得

$$\langle\Phi(T)y,g\rangle=\langle T^{(k)}\xi(y,g),\eta(y,g)\rangle\qquad\forall T\in\mathcal{B}(X).$$

注意到 $\langle\Phi(T)y,g\rangle$ 是有界三线性型. 假定存在 $y_1,y_2\in Y$ 及 $g_0\in Y^*$ 使得 $\eta(y_1,g_0)$ 和 $\eta(y_2,g_0)$ 线性无关. 可假定 $\xi(y_1,g_0)$ 和 $\xi(y_2,g_0)$ 非零, 否则, 改变 $\eta(y_1,g_0)$ 和 $\eta(y_2,g_0)$ 使得它们线性相关. 令 $y_0\in Y$ 使得 $\langle y_0,g_0\rangle=1$ 且取包含 y_0, y_1 和 y_2 的有限子空间 Y_0. 令 Q 是值域为 Y_0 的有界幂等元, 则 $Q^*g_0=g_0$. 由推论 8.6.5, 存在 $W\in\mathcal{B}(X^{(k)},Y)$ 和 $V\in\mathcal{B}(Y,X^{(k)})$ 使得 $Q\Phi(T)Q=WT^{(k)}V$. 故对任意的 $y\in Y_0$ 及 $g\in Q^*(Y^*)$, 有

$$\begin{aligned}&\langle T^{(k)}\xi(y,g),\eta(y,g)\rangle\\=&\langle\Phi(T)y,g\rangle=\langle Q\Phi(T)Qy,g\rangle=\langle T^{(k)}Vy,W^*g\rangle.\end{aligned}$$

因此

$$\langle T^{(k)}\xi(y_1,g_0),\eta(y_1,g_0)\rangle=\langle T^{(k)}Vy_1,W^*g_0\rangle$$

和

$$\langle T^{(k)}\xi(y_2,g_0),\eta(y_2,g_0)\rangle=\langle T^{(k)}Vy_2,W^*g_0\rangle$$

对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$ 成立, 与假定 $\eta(y_1,g_0)$ 和 $\eta(y_2,g_0)$ 线性无关矛盾. 类似地, 对任意的 $y\in Y$ 及 g_1, $g_2\in Y^*$, $\xi(y,g_1)$ 和 $\xi(y,g_2)$ 不可能线性无关. 从而, 存在线性映射 $\mathbf{B}:Y\to X^{(k)}$ 和 $\mathbf{C}:Y^*\to(X^*)^{(k)}$ 使得

$$\langle\Phi(T)y,g\rangle=\langle T^{(k)}\mathbf{B}y,\mathbf{C}g\rangle$$

对所有的 y,g 和 T 都成立. 由于 Φ 是 $(\sigma\text{-w})$-$(\sigma\text{-w})$ 连续的, 显然 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 有界且 $\mathbf{A}=\mathbf{C}^*|_{X^{(k)}}\in\mathcal{B}(X^{(k)},Y)$. 所以我们有

$$\Phi(T)=\mathbf{A}T^{(k)}\mathbf{B},$$

即 Φ 是长度为 k 的初等算子. 证毕.

众所周知, 初等算子是完全有界的, 即 $\|\Phi\|_{cb}=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\Phi_n\|<\infty$. 下面的推论是定理 8.6.6, 推论 8.6.5 和 [180; 定理 2.1] 的直接结果.

推论 8.6.7 设 X 和 Y 是 Banach 空间. 则下列成立.

(1) 如果 Φ 是长度为 k 的初等算子, c 是常数使得 $\|\Phi\|_{cb} < c$, 则存在算子 $\mathbf{A} \in \mathcal{B}(X^{(k)}, Y)$ 和 $\mathbf{B} \in \mathcal{B}(Y, X^{(k)})$ 使得 $\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| < c$ 且 $\Phi(T) = \mathbf{A}T^{(k)}\mathbf{B}$.

(2) 在从 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y)$ 的 (σ-w)-(σ-w) 连续的线性映射集合中, 所有长度至多为 k ($< \infty$) 的初等算子的集合按照点点弱极限是封闭的.

§8.7 保谱初等算子

设 X 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的无限维 Banach 空间且 $T \in \mathcal{B}(X)$. 令 $\sigma(T)$ 和 $\sigma_p(T)$ 分别代表 T 的谱和点谱. 设 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 到其自身的线性映射. 在第三和第四章中我们讨论了保 (或压缩) 某些谱函数的线性映射. 但注意到在那里的结论中, Φ 的满射性假定是很关键的. 然而有限维即矩阵代数情形却不需要满射性假设. 因此人们自然会问, 如果没有满射性假设, 是否仍可刻画保持谱的子集, 特别是保谱或保点谱的线性映射的结构? 一般来说, 解决这个问题是很困难的, 到目前为止, 只得到很少数的结论. 因为矩阵代数上的线性映射都是初等算子, 而初等算子是算子代数上包含许多非满映射的一类重要的线性映射, 因此上述问题的探讨从初等算子开始是自然的. 本节我们讨论 $\mathcal{B}(X)$ 上保谱或保点谱的初等算子的刻画.

令 X 为 Banach 空间, $\Phi(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} A_i(\cdot)B_i$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上长度为 n 的初等算子. 记

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(X^{(n)}, X),$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(X, X^{(n)}).$$

于是 Φ 可表示为 $\Phi(\cdot)=\mathbf{A}(\cdot)^{(n)}\mathbf{B}^T$. 如果 $\mathbf{B}^T=\mathbf{A}^{-1}$, 则显然 Φ 是保谱和保点谱的.

问题 8.7.1 是否每个长度为 n 的保单位且保谱 (保点谱) 初等算子都具有形式:

$$\Phi(\cdot)=\mathbf{A}(\cdot)^{(n)}\mathbf{A}^{-1}? \tag{8.7.1}$$

当 $X=H$ 是 Hilbert 空间而 $\mathbf{A}$ 是酉算子时, (8.7.1) 中的初等算子 Φ 是完全正的. 故我们有下列猜测.

猜测 8.7.2 设 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上保单位元的长度为 n 的正初等算子. 如果 Φ 保谱或保点谱, 那么存在酉算子 $\widetilde{\mathbf{U}}\in\mathcal{B}(H^{(n)},H)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$,

$$\Phi(T)=\widetilde{\mathbf{U}}T^{(n)}\widetilde{\mathbf{U}}^*. \tag{8.7.2}$$

注意到如果 $\mathcal{B}(X)$ 上的线性映射 Φ 具有形式 (8.7.1), 则 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的单射自同态; 如果 Φ 具有形式 (8.7.2), 那么 Φ 是单射 *- 自同态. 对于 $n=1$ 的情形, 显然两种陈述都成立. 用谱的其他子集代替谱和点谱, 也可考虑类似的问题.

本节我们将给出猜测 8.7.2 的肯定回答. 虽然长度不大于 2 的保谱 (或保点谱) 初等算子具有 (8.7.1) 的形式, 但问题 8.7.1 的回答一般来说是否定的.

我们用 T^* 代表算子 T 的共轭算子.

引理 8.7.1 设 $\Phi(\cdot)=\sum_{i=1}^{n}A_i(\cdot)B_i$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上长度为 n 的非零初等算子. 如果 Φ 是自同态, 那么 Φ 是单射且 $B_iA_j=\delta_{ij}I$ (i, $j=1,\cdots,n$).

证明 $\ker(\Phi)$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 的理想. 如果 $\ker(\Phi)\neq\{0\}$, 则它一定包含所有的有限秩算子. 因为 $\ker(\Phi)$ 在弱算子拓扑下是闭的, 因此 $\Phi=0$.

为证明第二个结论, 我们首先证明下面的断言.

断言 对每个 i, B_i 具有满值域.

注意到 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{B_i\}_{i=1}^n$ 是线性无关集. 对于 $x, y, v, w \in H$, 令 $T = x \otimes v$ 且 $S = y \otimes w$. 则 $\Phi(TS) = \Phi(T)\Phi(S)$ 蕴涵对任意的向量 $x, y, v, w \in H$, 有

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\langle y, v\rangle A_j x - \sum_{i=1}^{n}\langle B_i A_j y, v\rangle A_i x\right] \otimes B_j^* w = 0. \qquad (8.7.3)$$

为证明 B_1 是满射, 取 w 使得 $B_1^* w \neq 0$. 令 $k = \dim\{B_i^* w\}_{i=1}^n$. 显然 $1 \leq k \leq n$. 不失一般性, 我们可假定 $\{B_i^* w\}_{i=1}^k$ 线性无关. 这样存在 $\lambda_{li} \in \mathbb{C}$ 使得 $B_{k+l}^* w = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_{li} B_i^* w$. 代入方程 (8.7.3), 我们有

$$\sum_{j=1}^{k} u_j(x, y, v) \otimes B_j^* w = 0,$$

从而对任意的向量 x, y, v, 我们有 $u_j(x, y, v) = 0$ $(j = 1, \cdots, k)$, 其中

$$\begin{aligned} u_j(x,y,v) = {} & \langle y, v\rangle A_j x - \sum_{i=1}^{n}\langle B_i A_j y, v\rangle A_i x \\ & + \sum_{l=1}^{n-k}\lambda_{lj}\left(\langle y, v\rangle A_{k+l} x - \sum_{i=1}^{n}\langle B_i A_{k+l} y, v\rangle A_i x\right). \end{aligned}$$

因为 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 线性无关, 显然有

$$B_j(A_j + \sum_{l=1}^{n-k} A_{k+l}) = I, \qquad j = 1, 2, \cdots, k. \qquad (8.7.4)$$

所以 $\mathrm{rng}(B_1) = H$. 相似地, 对于 $i \geq 2$, 可证 $\mathrm{rng}(B_i) = H$. 故断言成立.

现在由断言易知, 子空间 $\mathrm{span}\{B_1, \cdots, B_n\}$ 不包含任何非零有限秩算子. 由定理 8.3.2 证明中断言 2 知, 存在向量 w 使得 $\{B_i^* w\}_{i=1}^n$ 线性无关. 因此方程 (8.7.3) 蕴涵

$$\langle y, v\rangle A_j x - \sum_{i=1}^{n}\langle B_i A_j y, v\rangle A_i x = 0;$$

即，对所有的向量 x, y, v,

$$((\langle y,v\rangle - \langle B_iA_jy,v\rangle)A_jx = \sum_{1\le i\le n, i\ne j} \langle B_iA_jy,v\rangle A_ix \quad (j=1,\cdots,n).$$

所以必有 $B_jA_j = I$ 且对于 $i\ne j$, 有 $B_iA_j = 0$. 证毕.

引理 8.7.2 设 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的初等算子. 如果 Φ 是反自同态，则 $\Phi = 0$.

证明 假定 $\Phi \ne 0$. 则 Φ 的长度 n 非零且 $\Phi(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} A_i(\cdot)B_i$. 任取 H 的一个就范正交基，用 T^{tr} 表示 T 关于这个基的转置算子. 令 $\Psi(\cdot) = \Phi(\cdot)^{tr}$. 则 Ψ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的自同态且对每个算子 T, $\Psi(T) = \sum_{i=1}^{n} B_i^{tr}T^{tr}A_i^{tr}$. 类似于引理 8.7.1 中的讨论易知， Ψ 是单射且 $A_j^{tr}B_i^{tr} = \delta_{ij}I$. 于是对任意的算子 S 和 T,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}(TS)^{(n)}\mathbf{B}^T \\
&= \Phi(TS) = \Phi(S)\Phi(T) = \mathbf{A}S^{(n)}\mathbf{B}^T\mathbf{A}T^{(n)}\mathbf{B}^T \\
&= \mathbf{A}S^{(n)}I^{(n)}T^{(n)}\mathbf{B}^T = \mathbf{A}(ST)^{(n)}\mathbf{B}^T
\end{aligned}$$

和 Φ 的单射性蕴涵 $TS = ST$. 所以 $\Phi = 0$. 证毕.

下面的定理对于保谱情形肯定地回答了猜测 8.7.2

定理 8.7.3 设 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的初等算子. 则下列陈述等价.

(i) Φ 保单位且是保可逆性的正映射.

(ii) Φ 是谱压缩的自伴映射.

(iii) Φ 是保谱自伴映射.

(iv) 存在正整数 n 和酉算子 $\mathbf{U} = (U_1 \ \cdots \ U_n) \in \mathcal{B}(H^{(n)}, H)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{B}(H)$, 下式成立,

$$\Phi(T) = \sum_{i=1}^{n} U_iTU_i^* = \mathbf{U}T^{(n)}\mathbf{U}^*.$$

在任何情形下， Φ 都是 $\mathcal{B}(H)$ 的单射 *- 自同态.

证明 显然 (iv)⇒(iii)⇒(ii).

(ii)⇒(i). 如果 $T \geq 0$, 那么 $\Phi(T)$ 是自伴算子且 $\sigma(\Phi(T)) \subseteq \sigma(T) \subseteq [0,+\infty)$. 因此 $\Phi(T) \geq 0$, 从而 Φ 是正映射. $\Phi(I) = E \geq 0$ 且 $\sigma(E) \subseteq \sigma(I) = \{1\}$ 蕴涵 $\Phi(I) = I$, 即 Φ 保单位. 如果 T 可逆, 因为 $\sigma(\Phi(T)) \subseteq \sigma(T)$, 因此 $0 \notin \sigma(\Phi(T))$. 所以 Φ 保可逆性.

(i)⇒(iv). 由 [44], von Neumann 代数上保单位且保可逆性的正线性映射是 Jordan 同态. 因此 (i) 蕴涵 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的 Jordan 同态且由文献 [195] 知, 存在由 Φ 的值域生成的 vN 代数的中心投影 E 使得 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, 其中 $\Phi_1(\cdot) = \Phi(\cdot)E$ 是 *- 同态且 $\Phi_2(\cdot) = \Phi(\cdot)(I-E)$ 是 *- 反同态. 显然 Φ_1 和 Φ_2 是初等算子. 由引理 8.7.2, $\Phi_2 = 0$, 从而 Φ 是 *- 自同态. 特别地, Φ 是完全正的. 令 n 是 Φ 的长度, 则由定理 8.1.2, 存在算子 $\mathbf{U} = (U_1 \cdots U_n) \in \mathcal{B}(H^{(n)}, H)$ 使得

$$\Phi(\cdot) = \mathbf{U}(\cdot)^{(n)}\mathbf{U}^* = \sum_{i=1}^{n} U_i(\cdot)U_i^*.$$

注意到 $\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \Phi(I) = I$. 另一方面, 因为 Φ 是自同态, 引理 8.7.1 表明 $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = I^{(n)}$. 所以 $\mathbf{U}$ 是酉算子. 证毕.

注 8.7.1 令 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的初等算子, 其中 X 是复 Banach 空间. 如果 Φ 谱压缩或保谱且如果 Φ 也是一个自同态, 则可证明存在可逆算子 $\mathbf{A} = (A_1 \cdots A_n) \in \mathcal{B}(X^{(n)}, X)$ 使得对所有的 $T \in \mathcal{B}(X)$, 有 $\Phi(T) = \mathbf{A}T^{(n)}\mathbf{A}^{-1}$.

对于保点谱和保压缩谱的完全正初等算子, 我们有

定理 8.7.4 设 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上保单位元且长度为 n 的完全正初等算子. 则下列陈述等价:

(1) Φ 保点谱.

(2) Φ 保压缩谱.

(3) 存在酉算子 $\widetilde{\mathbf{U}} \in \mathcal{B}(H^{(n)}, H)$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(A) = \widetilde{\mathbf{U}}T^{(n)}\widetilde{\mathbf{U}}^*$.

证明 显然 (3) 蕴涵 (1) 和 (2) 成立.

下证 (1)⇒(3). 对于任何非零向量 $x, y \in H$, 因为 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上长度为 n 的完全正初等算子, 因此存在线性无关的算子 $D_1, D_2, \cdots, D_n \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $\Phi(\cdot) = D_1(\cdot)D_1^* + D_2(\cdot)D_2^* + \cdots + D_n(\cdot)D_n^*$. 对任意的单位向量 $x \in H$, $\Phi(x \otimes x) = \sum_{i=1}^{n} D_i x \otimes D_i x$ 是秩至多为 n 的正算子. 因为 Φ 保点谱, 因此 $\sigma_p(\Phi(x \otimes x)) = \sigma_p(x \otimes x) = \{0, 1\}$. 所以 $\Phi(x \otimes x)$ 是到 $\mathrm{span}\{D_1 x, \cdots, D_n x\}$ 上的投影. 相似地, 对满足 $x \perp y$ 的任意单位向量 $x, y \in H$, $\Phi(x \otimes x + y \otimes y) = \Phi(x \otimes x) + \Phi(y \otimes y)$ 是一个正交投影. 从而 $\Phi(x \otimes x)\Phi(y \otimes y) = \Phi(y \otimes y)\Phi(x \otimes x) = 0$, 或等价地, $\mathrm{span}\{D_1 x, \cdots, D_n x\} \perp \mathrm{span}\{D_1 y, \cdots, D_n y\}$. 由引理 2.1.3, 存在 $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ 使得 $D_i^* D_j = \alpha_{i,j} I$. 因此 $\mathrm{span}\{D_1, \cdots, D_n\}$ 中的每个算子都是等距的倍数.

现在假定 $x_1, \cdots, x_n \in H$ 使得 $\sum_{i=1}^{n} D_i x_i = 0$. 在此等式的左边乘以 D_1^*, 则 $x_1 \in \mathrm{span}\ \{x_2, \cdots, x_n\}$ 且存在线性无关的算子 $D_2', \cdots, D_n' \in \mathrm{span}\{D_1, \cdots, D_n\}$ 使得 $\sum_{i=2}^{n} D_i' x_i = 0$. 在此新等式的左边乘以 $(D_2')^*$, 并且以这种方式继续, 我们将得到 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, 即算子 $\widetilde{\mathbf{U}} = (D_1, \cdots, D_n) \in \mathcal{B}(H^{(n)}, H)$ 是单射. 因为 Φ 保单位, 因此 $\widetilde{\mathbf{U}}$ 是满射, 从而可逆. 所以 $\widetilde{\mathbf{U}}^* \widetilde{\mathbf{U}} = I$ 并且 (3) 成立.

注意到对所有的 $T \in \mathcal{B}(H)$, 有 $\sigma_c(T^*) = \overline{\sigma_p(T)}$, 因此 (2)⇔(1). 证毕.

下面我们转向问题 8.7.1 的讨论.

定理 8.7.5 设 $\Phi(\cdot) = A_1(\cdot)B_1 + A_2(\cdot)B_2$ 是长度为 2 的初等算子满足 $I \in \mathrm{rng}(\Phi)$. 则下列陈述等价.

(i) Φ 谱压缩.

(ii) Φ 保谱.

(iii) $\mathbf{A} = (A_1\ A_2)$ 可逆且 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$.

(iv) 存在可逆算子 $\mathbf{A} \in \mathcal{B}(X^{(2)}, X)$ 使得对所有的 T, 有 $\Phi(T) = \mathbf{A}T^{(2)}\mathbf{A}^{-1}$.

为证明上述定理，首先讨论长度为 2 的保可逆性初等算子. 注意到，根据引理 2.1.3, 如果算子 T 和 S 不全为一秩且线性无关，则存在向量 x 使得 Tx 和 Sx 线性无关. 这一事实下面常不加说明地使用.

引理 8.7.6 设 $\Phi(\cdot) = A_1(\cdot)B_1 + A_2(\cdot)B_2$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上长度为 2 的初等算子. 如果 Φ 保可逆性，则下列叙述成立:

(a) $\ker(B_1) \cap \ker(B_2) = \{0\}$.

(b) $\mathrm{rng}(A_1) + \mathrm{rng}(A_2) = X$.

(c) A_1 和 A_2 是单射.

(d) 对每个非零向量 $x \in X$, A_1x 与 A_2x 线性无关.

(e) $\mathrm{rng}(A_1) \cap \mathrm{rng}(A_2) = \{0\}$.

证明 (a) 和 (b) 显然.

我们证明 (c). 注意到 $\{A_1, A_2\}$ 和 $\{B_1, B_2\}$ 都是线性无关的算子集合而 Φ 不是有限秩的，因此，由定理 8.5.1, 存在向量 x_0 使得 B_1x_0 和 B_2x_0 线性无关. 固定这样的 x_0.

断言 1 $\ker A_1 \cap \ker A_2 = \{0\}$.

相反地，假定 $N = \ker A_1 \cap \ker A_2 \neq \{0\}$. 我们将得到矛盾.

如果 $\dim N \geq 2$, 取向量 $y_1, y_2 \in N$ 使得它们线性无关. 设 T 可逆使得 $T(B_ix_0) = y_i$ $(i = 1, 2)$. 因为 $\Phi(T)x_0 = 0$, 因此 $\Phi(T)$ 不可能可逆. 所以我们有 $\dim N = 1$, 即 $N = \{\lambda y_0 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$. 我们断言

$$\ker A_1 = \ker A_2 = N.$$

事实上，如果 $\ker A_1 \neq N$, 取 $y \in \ker A_1 \backslash N$, 则存在可逆算子 T 使得 $TB_1x_0 = y$ 且 $TB_2x_0 = y_0$. 然而 $\Phi(T)x_0 = 0$, 与 Φ 保可逆性矛盾.

在情形 $\mathrm{rng}(A_1) \cap \mathrm{rng}(A_2) \neq \{0\}$ 下，存在线性无关的向量 y_1 和 y_2 使得 $A_1y_1 = -A_2y_2 \neq 0$. 故对满足 $TB_ix_0 = y_i$ 的任何可逆

算子 T, 有 $\Phi(T)x_0 = 0$, 这是不可能的.

如果 $\text{rng}(A_1) \cap \text{rng}(A_2) = \{0\}$, 则 B_1 和 B_2 可逆. 事实上, 显然有 B_1 和 B_2 是满射, 这是因为由 (b), 我们有 $X = \text{rng}(A_1) + \text{rng}(A_2)$ 是直和. 如果存在非零向量 x 使得 $B_2 x = 0$, 则由 (a), $B_1 x \neq 0$. 令 T 是可逆算子使得 $TB_1 x = y_0$. 则我们有 $\Phi(T)x = A_1 T X_1 x + 0 = A_1 y_0 = 0$, 矛盾. 所以 B_2, 也有 B_1 是单射. 因为 B_1^* 和 B_2^* 可逆且线性无关, 因此存在 $f, g \in X^*$ 使得 f 和 g 线性无关且 $B_1^* f = -B_2^* g$. 取 $h \in X^*$ 使得 $A_1^* h$ 和 $A_2^* h$ 线性无关, 则存在可逆算子 T 使得 $T^* A_1^* h = f$ 且 $T^* A_2^* h = g$. 现在 $\Phi(T)$ 可逆但

$$\Phi(T)^* h = B_1^* T^* A_1^* h + B_2^* T^* A_2^* h = B_1^* f + B_2^* g = 0,$$

又一次得到矛盾.

断言 2 A_1 和 A_2 至少其一是单射.

用反证法, 假如 A_1 和 A_2 都不单, 则存在非零向量 $y_1 \in \ker A_1$ 和 $y_2 \in \ker A_2$. 由断言 1 知, y_1 和 y_2 线性无关. 于是对满足 $TB_i x_0 = y_i$ $(i = 1, 2)$ 的任意可逆算子 T, 我们都有 $\Phi(T)x_0 = 0$, 矛盾. 完成断言 2 的证明.

不失一般性, 可假定 A_2 是单射. 我们将证明 A_1 也是单射.

如果 $\ker A_1 \neq \{0\}$ 且如果 $\text{rng}(A_1) \cap \text{rng}(A_2) \neq \{0\}$, 则存在线性无关的向量 y_1 和 y_2 使得 $A_1 y_1 = -A_2 y_2$. 现在对满足 $TB_i x_0 = y_i$ $(i = 1, 2)$ 的任何可逆算子 T, 我们将有 $\Phi(T)x_0 = 0$, 这是不可能的.

如果 $\ker(A_1) \neq \{0\}$ 且如果 $\text{rng}(A_1) \cap \text{rng}(A_2) = \{0\}$, 则 B_2 一定可逆. 事实上, 由 (a) 和 (b) 知, B_i 是满射. 如果对某个 x, $B_2 x = 0$, 则 $B_1 x \neq 0$ 且对满足 $TB_1 x \in \ker(A_1)$ 的可逆算子 T, 由于 $\Phi(T)x = 0$, 故 $\Phi(T)$ 将不可逆. 现在令 T 是可逆算子. 则对任意的 $x \in X$, 存在向量 y 使得

$$A_1 x + A_2 x = \Phi(T)y = A_1 T B_1 y + A_2 T B_2 y.$$

因为 $\text{rng}(A_1)\cap\text{rng}(A_2)=\{0\}$, 因此我们有

$$A_ix=A_iTB_iy,\qquad i=1,2.$$

注意到 A_2 是单射, 因此必有 $x=TB_2y$. 又因 B_2 可逆, 从而 $A_1x=A_1TB_1B_2^{-1}T^{-1}x$. 由 x 的任意性, 我们有 $A_1=A_1TB_1B_2^{-1}T^{-1}$. 又一次, 从 T 的任意性知, 对所有的可逆算子 T, 我们都有

$$A_1T(B_1-B_2)=0.$$

但是这导致 $B_1=B_2$. 所以我们必须有 $\ker A_1=\{0\}$, 从而完成 (c) 的证明.

(d) 设 C_1, C_2 $\in\text{span}\{A_1,\ A_2\}$. 如果 C_1 和 C_2 线性无关, 则存在 D_1, D_2 $\in\text{span}\{B_1,\ B_2\}$ 使得 $\Phi(\cdot)=C_1(\cdot)D_1+C_2(\cdot)D_2$. 由 (c), C_1 和 C_2 是单射. 所以对 A_1 和 A_2 的任意非零线性组合 $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2$, 有 $\ker(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2)=\{0\}$, 即对任意的非零向量 x, 有 A_1x 和 A_2x 线性无关.

(e) 假定相反, 即 $\text{rng}(A_1)\cap\text{rng}(A_2)\neq\{0\}$. 则存在向量 y_1 和 y_2 使得 $A_1y_1=-A_2y_2$. 由 (d) 知, y_1 和 y_2 线性无关. 现在对满足 $TB_ix_0=y_i$ $(i=1,2)$ 的任何可逆算子 T, 因为 $\Phi(T)x_0=0$, 因此 $\Phi(T)$ 不可逆. 证毕.

下面的定理是长度为 2 的保可逆性初等算子的刻画.

定理 8.7.7 设 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上长度为 2 的初等算子. 则 Φ 保可逆性当且仅当存在可逆算子 $\mathbf{A}=(A_1\ A_2)$, $\mathbf{B}=(B_1\ B_2)\in\mathcal{B}(X^{(2)},X)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{B}(X)$,

$$\Phi(T)=\mathbf{A}T^{(2)}\mathbf{B}^T. \tag{8.7.5}$$

证明 设存在算子 A_i, $B_i\in\mathcal{B}(X)$ $(i=1,2)$ 使得对所有的 $T\in\mathcal{B}(X)$,

$$\Phi(T)=A_1TB_1+A_2TB_2=\mathbf{A}T^{(2)}\mathbf{B}^T.$$

因为 Φ 保可逆性，由引理 8.7.6, 我们有

$$\ker(A_1)=\ker(A_2)=\{0\},\qquad \operatorname{rng}(A_1)+\operatorname{rng}(A_2)=X$$

且

$$\operatorname{rng}(A_1)\cap\operatorname{rng}(A_2)=\{0\}.$$

由此易知 $\mathbf{A}=(A_1\ A_2)\in\mathcal{B}(X^{(2)},X)$ 可逆. 因为 $\mathbf{AB}^T=A_1B_1+A_2B_2=\Phi(I)$ 可逆，因此 $\mathbf{B}^T$, 也有 $\mathbf{B}$ 可逆.

充分性显然. 证毕.

定理 8.7.5的证明 显然 (iii)⇒(iv)⇒(ii)→(i). 因此我们只需证明 (i)⇒(iii).

假定 Φ 谱压缩. 则 Φ 保可逆性且由定理 8.7.7, 我们有 $\mathbf{A}=(A_1\ A_2)$ 和 $\mathbf{B}=(B_1\ B_2)$ 可逆. 因为 $I\in\operatorname{rng}(\Phi)$, 故存在 E 使得 $I=\Phi(E)$. 设 Ψ 是如下定义的初等算子:

$$\Psi(T)=\Phi(TE)=A_1TEB_1+A_2TEB_2.$$

显然 $\Psi(I)=I$ 且 $\Psi(T)=\mathbf{A}T^{(2)}\mathbf{A}^{-1}$, 其中

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} EB_1\\ EB_2\end{pmatrix}.$$

所以 E 可逆且 Ψ 保谱. 现在

$$\sigma(TE^{-1})=\sigma(\Psi(TE^{-1}))=\sigma(\Phi(TE^{-1}E))=\sigma(\Phi(T)),$$

蕴涵对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$, 有 $\sigma(TE^{-1})\subseteq\sigma(T)$. 如果 $E\neq I$, 则存在 $f\in X^*$ 使得 $E^{*-1}f\neq f$. 取 $x\in X$ 使得

$$\langle x,f\rangle=1\neq\langle x,E^{*-1}f\rangle\neq 0.$$

令 $T=x\otimes f$. 则 $TE^{-1}=x\otimes E^{*-1}f$. 显然

$$\sigma(TE^{-1})=\{\langle x,E^{*-1}f\rangle,0\}\not\subseteq\{0,1\}=\sigma(T).$$

因此我们有 $E=I$ 且 $\Phi(I)=I$. 所以 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}^T$ 且对所有的 T, 有 $\Phi(T)=\mathbf{A}T^{(2)}\mathbf{A}^{-1}$, 即 (iii) 成立. 证毕.

注意到定理 8.7.5 表明, 如果 Φ 是长度为 2 的压缩谱的初等算子且 $I\in\mathrm{rng}(\Phi)$, 则 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 的子代数且 Φ 事实上是 $\mathcal{B}(X)$ 的单射自同态. 下一个定理刻画了值域是子代数的长度为 2 的保可逆性初等算子.

定理 8.7.8 设 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上长度为 2 的初等算子. 则 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 的子代数且 Φ 保可逆性当且仅当存在可逆算子 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}\in\mathcal{B}(X^{(2)},X)$ 和可逆算子 $E\in\mathcal{B}(X)$ 使得对所有的 T, 有

$$\mathbf{A}^{-1}=E^{(2)-1}\mathbf{B}^T \qquad \Phi(T)=\mathbf{A}T^{(2)}\mathbf{B}^T.$$

证明 假定 $\mathbf{A}^{-1}=E^{(2)-1}\mathbf{B}^T$ 且 $\Phi(T)=\mathbf{A}T^{(2)}\mathbf{B}^T$. 则 Φ 保可逆性且 $B_iA_j=\delta_{ij}E$. 对任意的算子 T 和 S, 我们有

$$\begin{aligned}\Phi(S)\Phi(T)&=\mathbf{A}S^{(2)}\mathbf{B}^T\mathbf{A}T^{(2)}\mathbf{B}^T=\mathbf{A}S^{(2)}E^{(2)}T^{(2)}\mathbf{B}^T\\&=\Phi(SET)\in\mathrm{rng}(\Phi).\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 对于乘积运算是封闭的, 从而是一个子代数. 注意到 $\Phi(E^{-1})=I$, 即 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 含单位元.

反过来, 假定 Φ 保可逆性且值域是一个子代数. 由定理 8.7.7, 存在可逆算子 $\mathbf{A}=(A_1\ A_2)$, $\mathbf{B}=(B_1\ B_2)\in\mathcal{B}(X^{(2)},X)$ 使得 $\Phi(T)=\mathbf{A}T^{(2)}\mathbf{B}^T$. 因为 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 是一个子代数, 因此对任意的 S 和 T, 存在算子 W 使得 $\Phi(S)\Phi(T)=\Phi(W)$, 即

$$\mathbf{A}W^{(2)}\mathbf{B}^T=\mathbf{A}\begin{pmatrix}SB_1A_1T & SB_1A_2T\\ SB_2A_1T & SB_2A_2T\end{pmatrix}\mathbf{B}^T.$$

这样我们有

$$\begin{pmatrix}W & 0\\ 0 & W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}SB_1A_1T & SB_1A_2T\\ SB_2A_1T & SB_2A_2T\end{pmatrix}.$$

因为 S 和 T 任意, 因此我们有

$$B_1A_2=B_2A_1=0 \quad 且 \quad B_1A_1=B_2A_2=E.$$

显然 E 可逆且对任意的 S 和 T, 有 $\Phi(S)\Phi(T)=\Phi(SET)$. 注意到

$$\Phi(E^{-1})\Phi(T)=\Phi(E^{-1}ET)=\Phi(T)=\Phi(T)\Phi(E^{-1}).$$

所以 $I=\Phi(E^{-1})$ (即 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 含单位元) 且 $\mathbf{A}^{-1}=(E^{(2)})^{-1}\mathbf{B}^T$.

由定理 8.7.8, 立得下列推论.

推论 8.7.9 设 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上长度为 2 的初等算子且 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 是一个子代数. 则 Φ 谱压缩当且仅当存在可逆算子 $\mathbf{A}\in\mathcal{B}(X^{(2)},X)$ 使得对所有的 T,

$$\Phi(T)=\mathbf{A}T^{(2)}\mathbf{A}^{-1}.$$

对于保点谱的初等算子, 我们有

定理 8.7.10 设 H 是可分无限维复 Hilbert 空间, $\Phi(\cdot)=A_1(\cdot)B_1+A_2(\cdot)B_2$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上长度为 2 的初等算子且 $I\in\mathrm{rng}(\Phi)$. 则 Φ 保点谱当且仅当 $\widetilde{\mathbf{A}}=(A_1\ A_2)\in\mathcal{B}(H^{(2)},H)$ 可逆且 $\widetilde{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}=\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}$, 即对任意的 $T\in\mathcal{B}(H)$,

$$\Phi(T)=\widetilde{\mathbf{A}}T^{(2)}\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}.$$

因而 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 的单射自同态.

证明 由定理 3.2.4 的证明, 我们先注意到如下一些事实: 设 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上的线性映射. 如果 Φ 保单位, 即 $\Phi(I)=I$, 则 Φ 保点谱当且仅当 Φ 双边保单射性; 如果 Φ 保点谱, 则 Φ 是单射. 如果 Φ 保点谱且 $I\in\mathrm{rng}(\Phi)$, 则 $\Phi(I)=I$.

因此可设 $\Phi(\cdot)=A_1(\cdot)B_1+A_2(\cdot)B_2$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上保单位且双边保算子单射性的长度为 2 的单射初等算子, 显然 $\{A_1,A_2\}$ 和 $\{B_1,B_2\}$ 都线性无关.

断言 1 $\ker B_1\cap\ker B_2=\{0\}$ 且 $\ker A_1\cap\ker A_2=\{0\}$.

因为 Φ 双边保单射性, 显然有 $\ker B_1\cap\ker B_2=\{0\}$. 因此我们只需证明

$$\ker A_1\cap\ker A_2=\{0\}.$$

如果 $M=\ker A_1\cap\ker A_2\neq\{0\}$, 令 P_M 代表到 M 上的正交投影, 则 $P_M\neq 0$ 而 $\Phi(P_M)=0$, 与 Φ 的单射性矛盾. 所以 $\ker A_1\cap\ker A_2=\{0\}$.

断言 2 $\ker A_1=\ker A_2=\{0\}$.

首先证明 $\ker A_1$ 和 $\ker A_2$ 中至少有一个为 $\{0\}$.

如果 $\ker A_1\neq\{0\}$ 且 $\ker A_2\neq\{0\}$, 取非零向量 $x_1\in\ker A_1$ 和 $x_2\in\ker A_2$, 则 x_1 和 x_2 线性无关. 如果对任意的 $y\in X$, 有 B_1y 和 B_2y 都线性相关, 则由引理 2.1.3 知, B_1 和 B_2 是一秩算子, 这样对任意的 $T\in\mathcal{B}(H)$, $\Phi(T)$ 的秩至多是 2, 与 Φ 保单射性矛盾. 所以存在非零向量 $y\in H$ 使得 B_1y 和 B_2y 线性无关. 现在不难找到可逆算子 $T\in\mathcal{B}(H)$ 使得 $TB_1y=x_1, TB_2y=x_2$. 但是, 在这种情形下, $\Phi(T)y=A_1TB_1y+A_2TB_2y=A_1x_1+A_2x_2=0$, 又一次与 Φ 保单射性矛盾. 所以 $\ker A_1$ 和 $\ker A_2$ 至少有一个必为 $\{0\}$.

不失一般性, 假定 $\ker A_2=\{0\}$. 我们将证明 $\ker A_1=\{0\}$.

情形 1 $\text{rng}(A_1)\cap\text{rng}(A_2)\neq\{0\}$.

在此情形下, 如果 $\ker(A_1)\neq\{0\}$, 则存在线性无关的向量 x, $y\in H$ 使得 $A_1x=A_2y$. 取非零向量 $z\in H$ 使得 B_1z 和 B_2z 线性无关, 且取单射算子 T 使得 $TB_1z=x$, $TB_2z=-y$. 则有 $\Phi(T)z=0$, 矛盾. 所以 $\ker A_1=\{0\}$.

情形 2 $\text{rng}(A_1)\cap\text{rng}(A_2)=\{0\}$.

相反地, 假定 $\ker A_1\neq\{0\}$. 则

(a) $\ker B_2=\{0\}$. 否则存在非零向量 $u\in\ker(B_2)$. 因为 $\ker(B_1)\cap\ker(B_2)=\{0\}$, 因此有 $B_1u\neq 0$. 令 T 是单射算子使得 $TB_1u\in\ker(A_1)$, 则 $\Phi(T)u=0$, 矛盾. 故 $\ker B_2=\{0\}$.

(b) A_1B_1 不是紧算子, 特别地, $\dim\,(\ker A_1)^\perp=\infty$. 为证明此, 注意到 $A_2B_2=I-A_1B_1$ (因为 $\Phi(I)=I$) 且 $\ker(A_2B_2)=\{0\}$. 如果 A_1B_1 紧, 那么由 Fredholm Alternative 定理, 我们有 $\text{rng}(A_2B_2)=\text{rng}(I-A_1B_1)$ 是闭的且 $\dim(\text{rng}(A_2B_2))^\perp=\dim\ker(A_2B_2)=0$. 因此 A_2B_2 可逆, 与假定 $\text{rng}(A_1)\cap\text{rng}(A_2)=\{0\}$ 矛盾. 所以 A_1B_1 不是紧算子. 特别地, A_1^* 的秩无限且

$\dim(\ker A_1)^{\perp} = \dim(\overline{\mathrm{rng}}(A_1^*)) = \infty$.

我们知道存在 $x \in H$ 使得 B_1x 和 B_2x 线性无关. 显然 $x \neq 0$ 且 $B_2x \neq 0$. 令 $M = (\mathrm{span}\{B_2x\})^{\perp}$. 因为 $\dim(M) = \dim(\ker A_1)^{\perp} = \infty$, 因此存在从 M 到 $(\ker A_1)^{\perp}$ 的酉算子 U. 定义 $T: H \to H$ 为

$$T|_M = U, \qquad TB_2x = \{0\}.$$

则 $T \in \mathcal{B}(H)$, $\mathrm{rng}(T) = (\ker A_1)^{\perp}$ 且 $\ker T = \mathrm{span}\{B_2x\}$. 我们将证明 $\Phi(T)$ 是单射, 此与 T 不是单射且 Φ 双边保单射性矛盾. 所以 $\ker A_1 = \{0\}$.

如果对某个 $h \in H$ 使得 $\Phi(T)h = 0$, 则由假定 $\mathrm{rng}(A_1) \cap \mathrm{rng}(A_2) = \{0\}$, 我们有 $A_1TB_1h = A_2TB_2h = 0$. 注意到 $\mathrm{rng}(T) = (\ker A_1)^{\perp}$ 且 $\ker A_2 = \{0\}$, 因此我们有 $TB_1h = TB_2h = 0$. 因为 $\ker T = \mathrm{span}\{B_2x\}$, 故存在 $\lambda, \delta \in \mathbb{C}$ 使得 $B_1h = \lambda B_2x$, $B_2h = \delta B_2x$. 再注意到 $\ker B_2 = \{0\}$, 我们得到 $h = \delta x$ 且 $\delta B_1x = \lambda B_2x$. 但是因为 B_1x 和 B_2x 线性无关, 因此我们有 $\delta = \lambda = 0$ 且 $h = \delta x = 0$, 即 $\Phi(T)$ 是单射.

断言 3 (1) 对任意的非零向量 $x \in H$, A_1x 和 A_2x 线性无关.

(2) $\mathrm{rng}(A_1) \cap \mathrm{rng}(A_2) = \{0\}$.

对任意的 $A_1', A_2' \in \mathrm{span}\{A_1, A_2\}$, 如果 A_1' 和 A_2' 线性无关, 则存在 $B_1', B_2' \in \mathrm{span}\{B_1, B_2\}$ 使得

$$\Phi(\cdot) = A_1'(\cdot)B_1' + A_2'(\cdot)B_2'.$$

由断言 1, 我们有 $\ker A_1' \cap \ker A_2' = \{0\}$. 所以对任意的 $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, $\ker(\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2) = \{0\}$. 等价地, 对任意的非零向量 $x \in H$, A_1x 和 A_2x 线性无关, 故断言 3 的结论 (1) 成立.

如果 $\mathrm{rng}(A_1) \cap \mathrm{rng}(A_2) \neq \{0\}$, 则存在 $x, y \in H$ 使得 $A_1x = A_2y \neq 0$. 由 (1), x 和 y 线性无关. 取 $z \in H$ 使得 B_1z 和 B_2z 线性无关, 选择单射算子 T 使得 $TB_1z = x$ 且 $TB_2z = -y$. 又一次,

我们得到矛盾. 所以 $\mathrm{rng}(A_1)\cap\mathrm{rng}(A_2)=\{0\}$, 即断言 3 的结论 (2) 也成立.

现在我们可完成定理的证明. 因为 $\sigma_p(T^{(2)})=\sigma_p(T)$, 充分性显然. 反过来, 由于 $\Phi(I)=I$, 因此 $\widetilde{\mathbf{A}}=(A_1,A_2)$ 是满射. 由断言 1—3, 我们有 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 是单射, 从而可逆. 证毕.

推论 8.7.11 设 H 为可分无限维 Hilbert 空间, $\Phi(\cdot)=A_1(\cdot)B_1+A_2(\cdot)B_2$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 上长度为 2 的初等算子. 令 $\Phi_*(\cdot)=B_1^*(\cdot)A_1^*+B_2^*(\cdot)A_2^*$. 如果 $I\in\mathrm{rng}(\Phi)$, 则下列陈述等价:

(1) Φ 保点谱.

(2) Φ 保压缩谱.

(3) Φ_* 保点谱.

(4) Φ_* 保压缩谱.

(5) Φ 保谱.

证明 注意到 $\sigma_p(T)=\sigma_c(T^*)$ 对任意算子 $T\in\mathcal{B}(H)$ 都成立. 显然 Φ 保压缩谱当且仅当 Φ_* 保点谱. 现在由定理 8.7.10 知, (1)—(4) 等价. 由定理 8.7.5 知, (1) 和 (5) 等价. 证毕.

下面的例子表明, 一般说来, 当 $n\geq 3$ 时, 问题 8.7.1 的答案是否定的. 注意, 如果初等算子具有 (8.7.1) 的形式, 则其长度为 n 且把每个一秩算子映为 n 秩算子.

例 8.7.1 存在不具有形如 (8.7.1) 的长度为 3 的保谱初等算子.

令 H 为无限维的 Hilbert 空间, 则 $H\cong H\oplus H$ 而 $\mathcal{B}(H\oplus H)$ 中的算子可表为 2×2 算子矩阵. 定义映射 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)\cong\mathcal{B}(H\oplus H)$ 为

$$T\mapsto\begin{pmatrix} T & RTS \\ 0 & T\end{pmatrix},$$

其中 R 和 S 为 H 上任意有界线性算子. 容易看出 Φ 保谱且是长度不超过 3 的初等算子. 我们选取满足下列条件的 R 和 S: 存在向量 $x_0, x_1, f\in H$ 使得 $Rx_0=x_0$ 且 Rx_1 与 x_1, 以及 S^*f 与 f 线

性无关. 令 $T_i = x_i \otimes f$ $(i = 0, 1)$, 则 $\Phi(T_0)$ 是 2 秩算子而 $\Phi(T_1)$ 是 3 秩算子. 由此可知, 这样选取的初等算子 Φ 长度为 3 且不具有 (8.7.1) 的形式.

§8.8 注 记

§8.1—8.4 主要取材于 Hou [108].

定理 8.1.1 和 8.1.2 在有限维的情形, 分别由 dePillis [66] 和 Choi [41] 证明; 一般情形则分别由 Mathieu [159] 和 Hou [98] 给出.

C*- 代数到 $\mathcal{B}(H)$ 中的完全正线性映射的刻画在 20 世纪 50 年代就有了 (参见 W. F. Stinespring [194]). 与完全正线性映射相比, 即使在有限维情形, 得到 C*- 代数上的正线性映射的刻画也是相当困难的 (见 Choi [41]—[43], Paulsen [175], dePillis [66]). 因为在有限维情形, 从 $\mathcal{B}(H)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 的每个线性映射都是初等算子, 因此当我们试图刻画正线性映射的结构时, 首先把注意力集中到初等算子上是合情理的.

引理 8.2.1 和 8.2.2 由 Hou [108] 证明, 其特殊情形 $\{C_1, C_2, \cdots\} = \{C, 0, \cdots\}$, 则可在 Hou [100] 中找到.

引理 8.3.1 属于 Hou [100]. 定理 8.3.2 (2) 是 Larson [140] 中 Lemma 2.4 的特殊情形, 其中 H 和 K 可以是任意向量空间; 定理 8.3.2 (5) 证明中的断言则是 Larson [140] 中的定理 2.6.

关于定理 8.4.4, M. Mathieu [157] 首先证明了下面的结论: 如果初等算子的长度为 1, 即如果 $\Phi(X) = AXB$, 那么正性已蕴涵完全正性. 在 [160] 中, Mathieu 断言初等算子 $\Phi = \sum_{i=1}^{n} A_i(\cdot)B_i$ 完全正当且仅当它是 n- 正的. 正如 Hou, Gao [112] 中的讨论, 对于满足 $\mathrm{Soc}(\mathcal{A}) \neq 0$ 的素 C*- 代数 $\mathcal{A}$ 上的初等算子, 定理 8.4.1 和定理 8.4.4 仍然成立, 其中 $\mathrm{Soc}(\mathcal{A})$ 代表 $\mathcal{A}$ 中所有极小左理想的和. 由此可以推出定理 8.4.4 对于 C*- 代数上初等算子也成立. 有兴趣

的读者可参考 Mathieu [161].

§8.5 的内容主要取于 Hou [103]. 代数自反性概念见文献 [140]. 一般说来，即使 C 有界插值 $\mathcal{L}$, C 也可能不在 $\mathcal{L}$ 中. 因此找到 $C\in\text{ref}_a(\mathcal{L})$ 蕴涵 $C\in\mathcal{L}$ 的条件是很有趣的. 一个相关的问题是 $\mathcal{L}$ 什么时候是代数自反的？这些问题是相当基本的并且与算子方程、算子不等式、算子代数和算子代数上线性映射的刻画等等都有着密切的关系 (见文献 [72], [98], [100], [103], [108], [140]). 这些问题仍然在不同方向上被考虑，且得到一些有趣的结论和应用. 例如，线性插值可以被应用于系统理论. 线性系统可看作是作用在向量空间上的线性变换. 系统 C 插值系统族 $\mathcal{L}=\text{span}\{A_1,\cdots,A_k\}$, 意指对每个输入，相应的输出可由 $\mathcal{L}$ 中的一些元得到. 在合适的条件下，我们将有 $C\in\mathcal{L}$. 引理 8.5.10 曾在 [140] 中被指出，但没有给出证明.

下面的结论分别是文献 [72] 中的命题 2 和 3.

命题 1 设 δ_1 和 δ_2 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的两个导子. 如果 $\delta_2\delta_1$ 也是一个导子，则要么 $\delta_1=0$ 要么 $\delta_2=0$.

命题 2 设 H 是无限维 Hilbert 空间. 令 δ_1 和 δ_2 是 Calkin 代数 $\mathcal{C}(H)=\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ 的两个导子. 如果 $\delta_2\delta_1$ 也是导子，则要么 $\delta_1=0$ 或 $\delta_2=0$.

然而文献 [72] 中的证明基于一个错误的引理 (文献 [72; 引理 2] 断言，设 $A,B\in\mathcal{B}(X)$, 如果对任意的 $x\in X$, 有 Ax 和 Bx 都线性相关，则 A 和 B 线性相关), 利用此引理来说明两个局部线性相关的导子是线性相关的. 因而，推论 8.5.15 填补了文献 [72] 中上述两个命题证明中的这个漏洞.

§8.6 属于 Ge, Hadwin, Hou, Li [79]. 对于 Hilbert 空间的情形，Hadwin 和 Larson [88] 证明了如果 H 和 K 是 Hilbert 空间，则线性映射 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$ 是初等算子当且仅当 Φ 是 $(\sigma\text{-w})\text{-}(\sigma\text{-w})$ 连续，完全有界且完全 k- 秩不增的 (如果 $\|\Phi\|_{cb}=\sup_n\|\Phi_n\|<\infty$, 称 Φ 完全有界). 定理 8.6.6 则在一般 Banach 空间情形考虑，并去掉完全有界性的假定.

算子代数上初等算子的刻画也与完全秩不增的线性映射有关. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}(X)$ 的线性子空间, $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}(Y)$ 是初等算子. 显然长度为 k 的初等算子 Φ 是 k- 秩不增的, 即对每个 $T\in\mathcal{A}$, $\text{rank}(\Phi(T))\leq k(\text{rank}(T))$. 如果对每个正整数 n, Φ_n 都是 k- 秩不增的, 称 Φ 完全 k- 秩不增.

基于定理 7.3.12 及 §8.6 的讨论, 对于套代数上的初等算子, 我们有下列猜测.

猜测 8.8.1 设 H 和 K 是 Hilbert 空间且 $\mathcal{N}$ 是 H 上的套. 如果 $\Phi:\text{Alg}\mathcal{N}\to\mathcal{B}(K)$ 是有界线性映射, 那么 Φ 完全 k 秩不增当且仅当它是长度不大于 k 的初等算子的 SOT 极限.

对于保谱情形, 问题 8.7.1 和猜测 8.7.2 最早出现于高明杵 [76]. 保谱正初等算子的刻画 (定理 8.7.3) 取自 Zhang, Hou [204]; 定理 8.7.4 及定理 8.7.10 属于 Wang, Hou [198]; 定理 8.7.5, 8.7.7 和 8.7.8 可在 Hou [106] 中找到. 关于定理 8.7.5, 在附加 $\text{rng}(A_1)\cap\text{rng}(A_2)=0$ 的条件下, (ii) 与 (iii) 的等价性先由高明杵 [76] 给出. 问题 8.7.1 的反例, 即例 8.7.1 是 Hou, Šemrl [117] 得到的. 我们已经知道, 当 H 是无限维 Hilbert 空间时, $\mathcal{B}(H)$ 与其上 $n\times n$ 算子矩阵代数可视为等同. 对于 $n\leq m$, $n\times n$ 算子矩阵代数又可看作 $m\times m$ 算子矩阵代数的子代数. 在有限维情形, 从 $M_n(\mathbb{C})$ 到 $M_m(\mathbb{C})$ 中的保单位且保谱线性映射的结构已是相当复杂, 而每个从 $M_n(\mathbb{C})$ 到 $M_m(\mathbb{C})$ 中的线性映射都是初等算子在 $M_n(\mathbb{C})$ 上的限制 (参见 Christensen [50]). 由此可见, 刻画 $\mathcal{B}(H)$ 上保谱初等算子的问题可能是非常困难的.

C*- 代数, 特别是素 C*- 代数上初等算子近年来也多有讨论, 有兴趣的读者可参见 Hou, Gao [112], [113], Mathieu [157]—[161] 等.

第九章　算子理想上的初等算子　算子张量积

设 H 为可分复 Hilbert 空间，$\mathcal{B}(H), \mathcal{C}_p(H)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ 分别为 H 上有界线性算子全体和 Schatten p 类算子全体. 我们把 $\mathcal{C}_p(H)$ 简记为 $\mathcal{C}_p$. $\mathcal{C}_p$ 是 $\mathcal{B}(H)$ 中的理想，且 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_\infty = \mathcal{K}(H)$ 分别为迹类算子理想，Hilbert-Schmidt 类算子理想及紧算子理想. 设 Δ 为算子组 $\{A_1, \cdots, A_m\}, \{B_1, \cdots, B_m\} \subset \mathcal{B}(H)$ 诱导的初等算子，即 $\Delta : T \mapsto \sum\limits_{i=1}^{m} A_i T B_i$. 由于 $\mathcal{C}_2$ 关于内积 $\langle T, S\rangle = \mathrm{tr}(S^*T)$ 成为 Hilbert 空间，因而初等算子 Δ 在 $\mathcal{C}_2$ 上的限制具有什么样的性质也是人们感兴趣的问题.

注意到，Hilbert-Schmidt 类 $\mathcal{C}_2$ 等距同构于张量积空间 $H\otimes\overline{H}$，其中 $\overline{H}$ 是 H 的共轭空间，而初等算子 $\Delta(\cdot) = \sum\limits_{i=1}^{m} A_i(\cdot)B_i$ 则酉等价于张量积算子 $\sum\limits_{i=1}^{m} A_i \otimes B_i^*$，因此我们可以在更一般的算子张量积的框架下进行讨论.

设 $H_1, \cdots, H_n$ 为可分复 Hilbert 空间，$A_{ij} \in \mathcal{B}(H_i), A_{ij} \neq 0$. 记 $\Phi = \sum\limits_{j=1}^{m} A_{1j} \otimes \cdots \otimes A_{nj}$，它是张量积空间 $H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ 上的有界线性算子，满足对任意的 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$，有 $\Phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum\limits_{j=1}^{m} A_{1j}x_1 \otimes \cdots \otimes A_{nj}x_n$.

本章第一节给出张量积算子 Φ 成为零算子、自伴算子、正规和亚正规算子等的充分必要条件；第二节讨论长度不大于 2 的张量积算子的次正规性；第三节主要刻画 Φ 的紧性以及成为本质正规算子的一些条件；第四节给出长度为 2 时 Φ 成为拟正规算子的充分必要条件；第五节和第六节分别获得 Φ 为 $\mathcal{C}_p$ 类算子和有限

秩算子的完全刻画，而第七节则说明如何将前几节关于张量积算子的结果应用于算子理想 $\mathcal{C}_2$ 上的初等算子.

§9.1 自伴张量积算子和亚正规张量积算子

设 H_i 代表可分复 Hilbert 空间，具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 令 $T_1,\cdots,T_m\in\mathcal{B}(H_1)$, $S_1,\cdots,S_m\in\mathcal{B}(H_2)$.

下面定理在本章中将经常用到.

定理 9.1.1 如果 $T_1,\cdots,T_m$ 线性无关，则 $T_1\otimes S_1+\cdots+T_m\otimes S_m=0$ 当且仅当 $S_1=\cdots=S_m=0$.

证明 因为 T_1 不是 $T_2,\cdots,T_m$ 的线性组合，因此存在向量 $x_1,\cdots,x_r,y_1,\cdots,y_r\in H_1$ $(r<\infty)$ 使得

$$\sum_{k=1}^{r}\langle T_ix_k,y_k\rangle=\begin{cases}1, & i=1;\\ 0, & i\neq 1.\end{cases}$$

对任意的 $y,z\in H_2$, 我们有

$$\begin{aligned}\langle S_1y,z\rangle&=\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{r}\langle T_ix_k,y_k\rangle\Big)\langle S_iy,z\rangle\\&=\sum_{k=1}^{r}\left\langle\left(\sum_{i=1}^{m}T_i\otimes S_i\right)(x_k\otimes y),y_k\otimes z\right\rangle=0,\end{aligned}$$

所以 $S_1=0$. 相似地，我们能证明 $S_2=\cdots=S_m=0$. 证毕.

由上面的定理，我们不难得到 $T_1\otimes S_1+\cdots+T_m\otimes S_m=0$ 的充分必要条件.

定理 9.1.2 设 $A_i\in\mathcal{B}(H_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ 且在 $H_1\otimes\cdots\otimes H_n$ 上， $A_1\otimes\cdots\otimes A_n\neq 0$. 则下列陈述成立:

(i) $A_1\otimes\cdots\otimes A_n$ 为自伴算子 (或正算子) 的充分必要条件是存在满足 $a_1+\cdots+a_n=0$ 的实数 $a_1,\cdots,a_n$ 使得 $\exp(ia_k)A_k$ 自伴 (或正)$(k=1,\cdots,n)$.

(ii) $A_1\otimes\cdots\otimes A_n$ 是酉算子 (或等距算子) 的充分必要条件是

存在满足 $a_1\cdots a_n=1$ 的正数 $a_1,\cdots,a_n$ 使得 a_kA_k 是酉算子 (或等距算子)$(k=1,\cdots,n)$.

证明 (i) 的证明留给读者. 下证 (ii). 充分性是显然的, 对于必要性, 由归纳法, 我们只需考虑 $n=2$ 的情形. 假定 $A_1\otimes A_2$ 是酉算子, 则

$$A_1^*A_1\otimes A_2^*A_2=I_1\otimes I_2, \tag{9.1.1}$$

$$A_1A_1^*\otimes A_2A_2^*=I_1\otimes I_2. \tag{9.1.2}$$

由定理 9.1.1, 存在正数 r 和 t 使得

$$\begin{cases} A_1^*A_1=rI_1\\ A_1A_1^*=tI_1\end{cases} \quad 且 \quad \begin{cases} A_2^*A_2=r^{-1}I_2\\ A_2A_2^*=t^{-1}I_2.\end{cases}$$

因为 $A_1^*A_1=rt^{-1}A_1A_1^*$, 因此 $r=t$. 令 $a_1=r^{\frac{1}{2}}$ 且 $a_2=a_1^{-1}$, 则 $a_1a_2=1$ 且 a_1A_1 和 a_2A_2 是酉算子. 关于等距的断言, 考虑等式 (9.1.1) 即可. 证毕.

定理 9.1.3 $\Phi=\sum\limits_{j=1}^{m}A_{1j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$ 为自伴算子的充分必要条件是存在自伴算子 $A'_{i1},\cdots,A'_{ir}\in\mathrm{span}\{A_{i1},\cdots,A_{im}\}$ $(i=1,\cdots,n)$ 使得 $\Phi=\sum\limits_{j=1}^{r}A'_{1j}\otimes\cdots\otimes A'_{nj}$.

证明 条件的充分性是显然的, 只需证条件的必要性. 首先设 $n=2$, $\Phi=A_1\otimes B_1+\cdots+A_m\otimes B_m$ 且不妨假设 $\{A_1,\cdots,A_m\}$, $\{B_1,\cdots,B_m\}$ 都线性无关. 如果 Φ 是自伴的, 即 $\Phi=\Phi^*$, 则有

$$\sum_{i=1}^{m}A_i\otimes B_i-\sum_{i=1}^{m}A_i^*\otimes B_i^*=0.$$

设 $\{A_1,\cdots,A_m,\ A_1^*,\cdots,A_m^*\}$ 的极大线性无关组所含算子的个数为 p, 则 $m\le p\le 2m$. 显然 $p\neq 2m$, 否则, 由定理 9.1.1 可得 $B_1=\cdots=B_m=0$, 矛盾. 若 $p>m$, 不失一般性, 设 $\{A_1,\cdots,A_m,\ A_1^*,\cdots,A_{p-m}^*\}$ 线性无关, 由定理 9.1.1 易得,

$$B_1,\cdots,B_m,B_1^*,\cdots,B_{p-m}^*\in\mathrm{span}\{B_{p-m+1},\cdots,B_m\},$$

此与 $\{B_1,\cdots,B_m\}$ 的线性无关性相矛盾. 可见 $p=m$. 于是 $A_1^*,\cdots,A_m^*\in\text{span}\{A_1,\cdots,A_m\}=\mathcal{X}_m$, $\mathcal{X}_m$ 是 $\mathcal{B}(H_1)$ 中的 m 维自伴线性空间. 因而存在线性无关的自伴算子组 $\{A_1',\cdots,A_m'\}\subset\mathcal{X}_m$. 由于 A_i 是 $\{A_1',\cdots,A_m'\}$ 的线性组合, 故 $\Phi=\sum\limits_{i=1}^{m}A_i\otimes B_i$ 可表示为 $\Phi=\sum\limits_{i=1}^{m}A_i'\otimes B_i'$, 其中 $B_i'\in\text{span}\{B_1,\cdots,B_m\}$. 现在 Φ 的自伴性蕴涵 $\sum\limits_{i=1}^{m}A_i'\otimes(B_i'-(B_i')^*)=0$, 再次应用定理 9.1.1 得 $B_i'-(B_i')^*=0$, 即 $B_i'\ (i=1,\cdots,m)$ 也是自伴算子. 这就证明了当 $n=2$ 时, 定理的条件是必要的.

现在用归纳法证之. 假设对 $n-1\ (\geq 2)$ 条件是必要的, 我们来证明对于 n 条件也是必要的, 从而由归纳法知, 定理的条件是必要的. 为此, 记 $A_j=A_{1j}$, $T_j=A_{2j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$, 于是有 $\Phi=A_1\otimes T_1+\cdots+A_m\otimes T_m$, 且存在线性无关的算子组 $\{B_1,\cdots,B_t\}\subset\text{span}\{A_1,\cdots,A_m\}$, $\{S_1,\cdots,S_t\}\subset\text{span}\{T_1,\cdots,T_m\}$ 使得 $\Phi=B_1\otimes S_1+\cdots+B_t\otimes S_t$. 若 Φ 为自伴算子, 则根据前面所证, 我们可要求 B_i 和 S_i 都是自伴算子. 注意到每个 S_i 都具有形式 $S_i=\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_{ij}A_{2j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$, 其中 α_{ij} 为复数. 应用归纳假设于 S_i, 存在自伴算子组 $\{A_{lj}^{(i)}\}\subset\text{span}\{A_{l1},\cdots,A_{lm}\}\ (l=1,\cdots,n)$ 使得 $S_i=\sum\limits_{j}A_{2j}^{(i)}\otimes\cdots\otimes A_{nj}^{(i)}$. 将此代入 $\Phi=\sum\limits_{i=1}^{t}B_i\otimes S_i$, 即知存在自伴算子 $A_{i1}',\cdots,A_{ir}'\in\text{span}\{A_{i1},\cdots,A_{im}\}\ (i=1,\cdots,n)$ 使得 $\Phi=\sum\limits_{j=1}^{r}A_{1j}'\otimes\cdots\otimes A_{nj}'$. 证毕.

我们称序列 $\{A_i\}\subseteq\mathcal{B}(H)$ 是双交换的, 如果对于 $i\neq j$, 有 $A_iA_j=A_jA_i$ 且 $A_iA_j^*=A_j^*A_i$. 在下面定理中, 当 $m=\infty$ 时, 我们要求所涉级数是收敛的. 正如通常那样, 我们用 $[T]$ 表示算子 T 的交换子, 即 $[T]=T^*T-TT^*$.

定理 9.1.4 设 $\{A_{ik}\}_{k=1}^{m} \subseteq \mathcal{B}(H_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是双交换的非零算子列. 则 $H_1\otimes\cdots\otimes H_n$ 上的算子 $\sum_{k=1}^{m} A_{1k}\otimes\cdots\otimes A_{nk}$ 是亚正规 (或正规) 的当且仅当每个 A_{ik} 都是亚正规 (或正规) 的.

证明 首先证明, 如果 T 和 S 是双交换的算子, 则 $T+S$ 是亚正规 (或正规) 的充分必要条件是 T 和 S 都是亚正规 (或正规) 的. 充分性显然, 只证必要性. 设 $T+S$ 是亚正规算子, 则 $[T+S]=[T]+[S]\geq 0$. 如果 S 不是亚正规的, 即 $[S]$ 不是正算子, 则由谱分解定理知, 存在 $\varepsilon>0$ 以及 $[S]$ 的谱子空间 M 使得 $[S]|_M\leq -\varepsilon I|_M$. 因为 T 与 S 双交换, 故 M 约化 T, 于是我们有 $[T|_M]\geq \varepsilon I|_M$, 但这是不可能的. 所以 S 必是亚正规的. 同理, T 也是亚正规的.

因此, 为证明本定理, 我们只需对 $m=1$ 的情形进行验证即可. 由归纳法, 我们只需证明 $A\otimes B\neq 0$ 亚正规 (或正规) 当且仅当 A 和 B 亚正规 (或正规).

$A\otimes B$ 正规当且仅当 $A^*A\otimes B^*B - AA^*\otimes BB^*=0$, 由定理 9.1.1, 当且仅当 $A^*A=AA^*$ 且 $B^*B=BB^*$, 当且仅当 A 和 B 正规.

$A\otimes B$ 亚正规当且仅当

$$[A]\otimes B^*B + AA^*\otimes [B]\geq 0, \tag{9.1.3}$$

当且仅当

$$[A]\otimes BB^* + A^*A\otimes [B]\geq 0. \tag{9.1.4}$$

如果 A 和 B 亚正规, 那么由定理 9.1.2 知, $[A]\otimes B^*B$ 和 $AA^*\otimes[B]$ 是正算子, 从而 $[A\otimes B]\geq 0$, 即 $A\otimes B$ 亚正规. 反过来, 如果 $A\otimes B$ 亚正规, 那么由 (9.1.3) 和 (9.1.4), 对任意的 $x\in H_1$ 及 $y\in H_2$, 我们有

$$\langle [A]x,x\rangle \parallel By\parallel^2 + \parallel A^*x\parallel^2 \langle [B]y,y\rangle \geq 0, \tag{9.1.5}$$

$$\langle [A]x,x\rangle \parallel B^*y\parallel^2 + \parallel Ax\parallel^2 \langle [B]y,y\rangle \geq 0, \tag{9.1.6}$$

如果 A 不是亚正规的，那么存在向量 $x_0\in H_1$ 使得 $\langle [A]x_0,x_0\rangle = -s<0$. 显然，$\| Ax_0 \|^2=r\neq 0$. 因此由 (9.1.5), 对所有的 $y\in H_2$, 我们有

$$-s\| By \|^2+r\langle [B]y,y\rangle \geq 0.$$

但是这蕴涵 $(r-s)\| B \|^2\geq r\| B \|^2$, 这是不可能的. 所以 A 一定是亚正规的. 相似地，由 (9.1.6), B 也是亚正规的. 证毕.

算子 T 称为 k- 拟亚正规的，如果 $T^{*k}[T]T^k\geq 0$.

定理 9.1.5 $A_1\otimes\cdots\otimes A_n$ 是 k- 拟亚正规算子的充分必要条件是下列陈述之一成立:

(i) 对某个 i $(1\leq i\leq n)$, $A_i^k=0$;

(ii) 每个 A_i 是拟亚正规的 $(i=1,\cdots,n)$.

证明 显然 $A\otimes B$ 是 k- 拟亚正规的当且仅当

$$A^{*k}[A]A^k\otimes B^{*(k+1)}B^{k+1}+A^{*k}AA^*A^k\otimes B^{*k}[B]B^k\geq 0, \quad (9.1.7)$$

当且仅当

$$A^{*k}[A]A^k\otimes B^{*k}BB^*B^k+A^{*(k+1)}A^{k+1}\otimes B^{*k}[B]B^k\geq 0. \quad (9.1.8)$$

现在充分性显然. 为证必要性，令 $x\in H_1$ 和 $y\in H_2$ 任意. 则由 (9.1.7) 和 (9.1.8), 我们有

$$\langle A^{*k}[A]A^kx,x\rangle \| B^{k+1}y \|^2+\| A^*A^kx \|^2\langle B^{*k}[B]B^ky,y\rangle \geq 0, \quad (9.1.9)$$

$$\langle A^{*k}[A]A^kx,x\rangle \| B^*B^ky \|^2+\| A^{k+1}x \|^2\langle B^{*k}[B]B^ky,y\rangle \geq 0. \quad (9.1.10)$$

假定 $A^k\neq 0$ 且 $B^k\neq 0$. 如果 A 不是 k- 拟亚正规的，则存在向量 $x_0\in H_1$ 使得 $\langle A^{*k}[A]A^kx_0,x_0\rangle=-s<0$ 且 $\| A^*A^kx_0 \|^2=r\neq 0$. 由 (9.1.9) 式，我们有

$$(r-s)\| B^{k+1}y \|^2\geq r\| B^*B^ky \|^2,\quad \forall y\in H_2. \quad (9.1.11)$$

令 $B_1 = B|_{\overline{\mathrm{rng}}(B^k)}$ 且定义 $E \in \mathcal{B}(\overline{\mathrm{rng}}(B^k), H_2)$ 为 $Ez = B^*z$. 易证 $\| E \| \geq \| B_1 \|$. 但是 (9.1.11) 式蕴涵 $(r-s) \| B_1 \|^2 \geq r \| E \|^2$, 矛盾. 故 A 是 k- 拟亚正规的. 利用 (9.1.10) 式, 同理可证 B 也是 k- 拟亚正规的.

最后, 由归纳法并注意到 $(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)^k = 0$ 当且仅当对某个 i, 有 $A_i^k = 0$. 必要性得证. 证毕.

在本节的剩余部分, 我们列出有关 θ- 算子的一些结论, 其证明基于定理 9.1.1 并且类似于文献 [203] 中的讨论. 回顾一下, 如果 T^*T 与 $T + T^*$ 交换, 称 T 为 θ- 算子.

定理 9.1.6 $A \otimes I_2 + I_1 \otimes B$ 是 θ- 算子当且仅当下列之一成立:

(i) A 和 B 正规.

(ii) 存在实数 r 使得 $A + irI_1$ (或 $B + irI_2$) 自伴但 $B - irI_2$ (或 $A - irI_1$) 是 θ- 算子.

定理 9.1.7 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$ 是 θ- 算子当且仅当下列之一成立:

(i) 对某个 j, $A_j = 0$.

(ii) A_j 都是拟正规的.

(iii) 存在满足 $a_1 + \cdots + a_n = 0$ 的实数 $a_1, \cdots, a_n$ 和某个 j 使得 $\exp(ia_j)A_j$ 是 θ- 算子但 $\exp(ia_k)A_k$ $(1 \leq k \leq n, k \neq j)$ 都是自伴算子.

§9.2 次正规张量积算子

本节讨论算子张量积 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$ 和 $A \otimes I_2 + I_1 \otimes B$ 的次正规性, 也给出这些结论的一个应用. 算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 称为次正规的, 如果存在某个 Hilbert 空间 K $(\supseteq H)$ 上的正规算子 N 使得 $NH \subseteq H$ 且 $T = N|_H$.

众所周知, 算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是次正规的当且仅当对任意有限子集 $\{x_j\}_{j=1}^n \subset H$ 都有 $\displaystyle\sum_{j,k=0}^{n} \langle T^j x_k, T^k x_j \rangle \geq 0$ (Bram-Halmos 定

理). 由此不难证明下面的定理.

定理 9.2.1 $A_1\otimes\cdots\otimes A_n$ 次正规当且仅当对某个 j, 有 $A_j=0$ 或所有的 A_j 都是次正规算子.

下面定理的证明类似于 [153; 定理 1] 有关 $\mathcal{C}_2(H)$ 上广义导子 δ_{AB} 的次正规性. 我们把证明留给读者.

定理 9.2.2 $A\otimes I_2+I_1\otimes B$ 是次正规的当且仅当 A 和 B 都是次正规的.

作为定理 9.2.2 的一个应用, 现在考虑算子和的次正规性. 我们已知, 如果 T 和 S 双交换, 则 $T+S$ 是亚正规算子 (或正规算子) 当且仅当 T 和 S 都是亚正规算子 (或正规算子). 显然, T 和 S 次正规蕴涵 $T+S$ 也是次正规的. 因此下面问题是自然的.

问题 9.2.1 如果 T 与 S 双交换且如果 $T+S$ 次正规, 则是否 T 和 S 都是次正规的?

在证明下一个结论之前, 我们先给出一个定义.

定义 9.2.1 算子 $T\in\mathcal{B}(H)$ 称为是块离散算子, 如果存在分解 $H=H_0\oplus H_1\oplus\cdots\oplus H_n\oplus\cdots$ 使得 $T=T_0\oplus T_1\oplus\cdots\oplus T_n\oplus\cdots$, 其中 $T_0=T|_{H_0}$ 正规且 $T_n=T|_{H_n}$ 不可约 $(n=1,2,\cdots)$.

如果 $[T]$ 是紧算子, 称 T 是本质正规的. 本质正规算子是块离散算子.

定理 9.2.3 假定 T 和 S 双交换且 $T+S$ 次正规. 如果 T 是块离散的, 则 T 和 S 是次正规的.

证明 设 T 是块离散的. 容易看到 T 酉等价于 $H=H_0\oplus H_1\oplus\cdots\oplus H_n\oplus\cdots$ 上形式为 $T_0\oplus T_1^{(m_1)}\oplus\cdots\oplus T_n^{(m_n)}\oplus\cdots$ 的算子, 其中 $T_0\in\mathcal{B}(H_0)$ 正规, 对每个 $n\neq 0$, T_n 不可约且当 $i\neq j$ 时, T_i 和 T_j 不酉等价. 因此, 不失一般性, 我们可假定 T 本身具有这种形式. 由于 S 与 T 和 T^* 都交换, 故每个 H_n 约化 S. 令 $S_n=S|_{H_n}$, 则 $S=S_0\oplus S_1\oplus\cdots\oplus S_n\oplus\cdots$. 注意到 $T_n^{(m_n)}$ 能重新写为张量积的形式 $T_n\otimes I_{m_n}$. 因为 S_n 与 $T_n\otimes I_{m_n}$ 双交换且 T_n 不可约, 所以 S_n 必须具有形式 $S_n=I_n\otimes X_{m_n}$. 这样我们有

$$T+S=(T_0+S_0)\oplus\sum_n\oplus(T_n\otimes I_{m_n}+I_n\otimes X_{m_n}). \qquad (9.2.1)$$

显然， T_0+S_0 和 $T_n\otimes I_{m_n}+I_n\otimes X_{m_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是次正规算子. 现在由于 T_0 是正规算子，因此 S_0 次正规，由定理 9.2.2, T_n 和 X_{m_n} 次正规. 所以 S 和 T 是次正规算子.

推论 9.2.4 假定 T 和 S 双交换且 $T+S$ 次正规. 如果 T 是本质正规的, 则 T 和 S 是次正规的. 进而, 存在分解 $H=K_1\oplus K_2$ 使得 $T=T_1\oplus T_2$ 且 $S=S_1\oplus S_2$, 其中 T_1 和 S_2 正规.

推论 9.2.5 假定 T 和 S 双交换且 $T+S$ 次正规. 如果 T 是有限循环的，则 T 次正规且 S 正规.

记 $\mathcal{W}^*(T)$ 代表由 T 和 I 生成的 von Neumann 代数.

推论 9.2.6 假定 T 和 S 双交换且 $T+S$ 次正规. 如果 $\text{span}\{(\mathcal{W}^*(T)\cap\mathcal{K}(H))H\}$ 在 H 中稠密，则 T 和 S 次正规.

证明 我们必须证明 T 是块离散的. 令 $\mathcal{J}=\mathcal{W}^*(T)\cap\mathcal{K}(H)$. 则 $\mathcal{J}$ 是满足条件 $\overline{\text{span}}\{\mathcal{J}(H)\}=H$ 的紧算子 C*- 代数. 于是存在 $\mathcal{J}$ 的约化子空间 $\{H_n\}$ 使得 $H=H_1\oplus H_2\oplus\cdots$ 且 $\mathcal{J}|_{H_n}=\mathcal{K}(H_n)$. 因为 $H_n=\overline{\text{span}}\{\mathcal{K}(H_n)H_n\}=\overline{\text{span}}\{\mathcal{J}(H_n)\}$ 且 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{W}^*(T)$ 的理想, 因此 H_n 约化 $\mathcal{W}^*(T)$. 令 $T_n=T|_{H_n}$, 则 $\mathcal{W}^*(T_n)\supseteq\mathcal{W}^*(T)|_{H_n}\supseteq\mathcal{J}|_{H_n}=\mathcal{K}(H_n)$, 从而， $\mathcal{W}^*(T_n)=\mathcal{B}(H_n)$, 即 T_n 不可约. 这蕴涵 T 是一个块离散算子. 证毕.

§9.3 紧张量积算子和本质正规张量积算子

我们首先讨论张量积的紧性.

定理 9.3.1 设 $A_{ij}\in\mathcal{B}(H_i)$ 非零. 如果 $\Phi=\sum_{j=1}^{m}A_{1j}\otimes A_{2j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$ 是紧算子且如果对某个 r, $A_{r1},A_{r2},\cdots,A_{rm}$ 线性无关，则 A_{ij} $(i\neq r)$ 都是紧算子.

证明 不失一般性，我们可假定 $r=1$, 即 $A_{11},\cdots,A_{1m}$ 线性无关. 记 $T_j=A_{2j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}\in\mathcal{B}(K)$, 其中 $K=H_2\otimes\cdots\otimes H_n$

且记 $A_j = A_{1j}$. 则 $\Phi = A_1 \otimes T_1 + \cdots + A_m \otimes T_m$ 为紧算子.

因为 A_1 不是 $A_2, \cdots, A_m$ 的线性组合, 因此存在向量 $x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_s$ 使得当 $j = 1$ 时, 有 $\sum_{k=1}^{s} \langle A_j x_k, y_k \rangle = 1$ 且当 $j \neq 1$ 时, 有 $\sum_{k=1}^{s} \langle A_j x_k, y_k \rangle = 0$. 因而对任意的 $f, g \in K$, 我们有

$$\langle T_1 f, g \rangle = \sum_{k=1}^{s} \langle \Phi(x_k \otimes f), y_k \otimes g \rangle. \tag{9.3.1}$$

现在如果 $\{f_t\}$ 是 K 中的标准正交向量列, 则 $\{x_k \otimes f_t\}$ $(k = 1, \cdots, s)$ 是 $H_1 \otimes K$ 中的有界正交列. 因为 Φ 紧, 因此对每个 k, 我们有 $\lim_{t\to\infty} \| \Phi(x_k \otimes f_t) \| = 0$. 令 $g_t = T_1 f_t$, 则由 (9.3.1) 式,

$$\lim_{t\to\infty} \| T_1 f_t \|^2 = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{s} \langle \Phi(x_k \otimes f_t), y_k \otimes g_t \rangle = 0. \tag{9.3.2}$$

这表明 T_1 是紧算子. 类似地, $T_2, \cdots, T_m$ 都是紧算子. 现在容易验证 $T_j = A_{2j} \otimes \cdots \otimes A_{nj} \neq 0$ 的紧性蕴涵 A_{ij} $(i > 1)$ 的紧性. 证毕.

由定理 9.3.1 立得下列结论.

定理 9.3.2 设 $\Phi = A_1 \otimes B_1 + \cdots + A_n \otimes B_n \in \mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$.

(i) 如果 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 和 $\{B_1, \cdots, B_n\}$ 都线性无关, 则 Φ 紧当且仅当 A_i 和 B_i 都是紧算子.

(ii) Φ 紧当且仅当存在紧算子 $E_1, \cdots, E_r \in \mathrm{span}\{A_1, \cdots, A_n\}$ 和 $F_1, \cdots, F_r \in \mathrm{span}\,\{B_1, \cdots, B_n\}$ 使得 $\Phi = E_1 \otimes F_1 + \cdots + E_r \otimes F_r$.

下面我们总假定 $A, C \in \mathcal{B}(H_1)$, $B, D \in \mathcal{B}(H_2)$ 且 H_1 和 H_2 都是无限维的.

推论 9.3.3 $A \otimes B + C \otimes D$ 紧当且仅当下列条件之一成立:

(i) 存在算子 E, F 和满足 $ab + cd = 0$ 的数 a, b, c 和 d 使得 $A = aE$, $B = bF$, $C = cE$ 和 $D = dF$;

(ii) A, B, C 和 D 都是紧算子;

(iii) A (或 B) 非紧，存在数 r 使得 $B = rD$ (或 $A = rC$), 但 D 和 $rA + C$ (或 C 和 $rB + D$) 紧；

(iv) C (或 D) 非紧，存在数 r 使得 $D = rB$ (或 $C = rA$), 但 B 和 $rC + B$(或 A 和 $B + rD$) 紧.

证明 由定理 9.3.2 立得. 证毕.

推论 9.3.4 $A \otimes I_2 + I_1 \otimes B$ 紧当且仅当对某个 r, $A = rI_1$ 且 $B = -rI_2$.

关于本质正规的算子张量积，我们有

定理 9.3.5 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$ 是本质正规算子当且仅当下列之一成立：

(i) 对某个 i, $A_i = 0$;

(ii) A_i 都为正规 (或紧) 算子；

(iii) 对某个 i, A_i 本质正规且对所有的 j $(\neq i)$, A_j 都是紧正规的.

证明 由归纳法，我们只需验证 $n = 2$ 的情形.

因为 $A \otimes B$ 本质正规当且仅当 $A^*A \otimes B^*B - AA^* \otimes BB^*$ 紧，故充分性显然. 为证必要性，假定 $A \otimes B$ 本质正规且非零. 如果 A 既不正规也非紧，则由定理 9.3.2, B^*B 和 BB^* 线性相关，从而 B 正规. 这样 $[A] \otimes B^*B$ 紧. 所以 $[A]$ 和 B^*B 紧. 故我们有 A 本质正规且 B 紧正规. 证毕.

推论 9.3.6 假定 $A \otimes B$ 是具有有限重复度的亚正规算子. 则 $\ker A = \ker B = \{0\}$ 且下列陈述之一成立：

(i) A 和 B 是具有有限重复度的正规算子；

(ii) A (或 B) 是具有有限重复度的亚正规算子且 B (或 A) 是紧正规算子.

证明 由定理 9.1.4, 定理 9.3.5 并注意到 $\dim(\ker(A \otimes B)) < \infty$ 蕴涵 A 和 B 是单射. 证毕.

下面定理的证明是显然的.

定理 9.3.7 $A \otimes I_2 + I_1 \otimes B$ 本质正规当且仅当它正规当且仅当 A 和 B 正规.

更一般地，我们有

定理 9.3.8 假定 A 和 C 双交换. 则 $A\otimes B+C\otimes I$ 是本质正规的当且仅当 C 是正规的且下列陈述之一成立:

(i) A 或 B 为零;

(ii) A 和 B 正规 (或紧);

(iii) A (或 B) 本质正规且 B (或 A) 紧正规.

证明 充分性显然. 下证必要性. 假定 A, B 和 C 非零且 $\Phi=A\otimes B+C\otimes I\neq 0$. 注意到只要我们证明 C 是正规的，则定理得证.

用反证法，假定 C 非正规，我们将推出矛盾.

如果 B 正规，则 $[\Phi]=[A]\otimes B^*B+[C]\otimes I$ 紧且 $[A]\neq 0$. 由定理 9.3.2, 存在实数 r 使得 $[C]=r[A]$. 于是 $[\Phi]=[A]\otimes(B^*B+rI)$ 和 B^*B+rI 是紧算子. 令 $s=\sqrt{-r}$, 则我们有 $[C+sA]=0$, 又由于 A 与 C 双交换，此蕴涵 A 和 C 正规，矛盾. 因此 B 非正规.

如果 A 正规，由 $[\Phi]=A^*A\otimes[B]+[C]\otimes I$ 的紧性知，存在常数 $r\neq 0$ 使得 $[C]=rA^*A$. 这表明 $[B]+rI$ 紧，但由命题 1.1.23 知，这是不可能的. 故 A 不是正规算子.

现在由于 $[\Phi]=A^*A\otimes B^*B-AA^*\otimes BB^*+[C]\otimes I$ 紧且 A^*A 和 AA^* 线性无关，因此存在实数 s 和 t 使得

$$[C]=sA^*A-tAA^*. \tag{9.3.3}$$

这导致 B^*B+sI 和 BB^*+tI 都是紧算子. 因此 $s=t\leq 0$ 且由 (9.3.3) 式知， $[C]=s[A]$, 而此将蕴涵 A 和 C 的正规性，与假定矛盾. 证毕.

§9.4 拟正规张量积算子

设 $T\in\mathcal{B}(H)$, 如果 $TT^*T=T^*T^2$, 称 T 是拟正规的. 本节的目的是讨论算子张量积 $A\otimes B+C\otimes D$ 的拟正规性，为此，我们先讨论下面的三阶算子方程组:

$$A^*AC=\alpha A^*A^2+\beta AA^*A, \tag{9.4.1}$$

$$AA^*C = \lambda A^*A^2 + \gamma AA^*A, \tag{9.4.2}$$

其中 A, C 是 Hilbert 空间 H 上的未知算子且 $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{C}$.

假定 $|\alpha| + |\beta| + |\lambda| + |\gamma| \neq 0$.

定理 9.4.1 算子方程 (9.4.1) 和 (9.4.2) 的联列方程组有双交换解 (A, C), 其中 $A \neq 0$, 当且仅当下列条件之一成立.

(i) $\alpha + \beta = \lambda + \gamma \neq 0$, A 正规, $\overline{\mathrm{rng}}(A)$ 约化 C 且 $C|_{\overline{\mathrm{rng}}(A)} = (\alpha+\beta)A|_{\overline{\mathrm{rng}}(A)}$.

(ii) $AC = 0$, 且要么 $\beta = \gamma = 0$, $A^2 = 0$; 要么 $\alpha = -\beta \neq 0$ (或 $\lambda = -\gamma \neq 0$), A 是拟正规算子.

(iii) $\beta = \gamma = 0, \lambda = \alpha \neq 0$, 且存在空间分解 $H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_4$ 使得

$$A = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 N 正规, D 是单射且满足 $D^*F = 0$.

证明 充分性是显然的.

假定 (A, C) 是联列方程 (9.4.1) 和 (9.4.2) 的双交换解. 显然 C^* 与 A^*AC 和 AA^*C 都交换, 从而 $\overline{\mathrm{rng}}(A)$ 和 $\overline{\mathrm{rng}}(A^*)$ 分别约化 C 为正规算子, 即 $C|_{\overline{\mathrm{rng}}(A)}$ 和 $C|_{\overline{\mathrm{rng}}(A^*)}$ 是正规算子. 这个事实将在以后经常使用. 下面分几种情形来考虑.

(a) $AC = 0$. 方程 (9.4.1) 和 (9.4.2) 分别成为

$$\alpha A^*A^2 + \beta AA^*A = 0, \tag{9.4.3}$$

$$\lambda A^*A^2 + \gamma AA^*A = 0. \tag{9.4.4}$$

如果 α 和 β 非零 (或 λ 和 γ 非零), 我们必有 $\alpha = -\beta$ (或 $\lambda = -\gamma$) 且 A 是拟正规的. 否则当 $\beta = \gamma = 0$ 时, 有 $A^2 = 0$ 且当 $\alpha = \lambda = 0$ 时, 有 $A = 0$. 因此定理的情形 (ii) 成立.

从现在起，我们假定 $AC \neq 0$.

(b) A 拟正规. 那么方程 (9.4.1) 和 (9.4.2) 简化为方程

$$A^*AC = (\alpha+\beta)A^*A^2, \tag{9.4.5}$$

$$AA^*C = (\lambda+\gamma)AA^*A, \tag{9.4.6}$$

显然有 $\alpha+\beta=\lambda+\gamma$. 关于分解 $H=\overline{\text{rng}}(A^*)\oplus\ker A$, 我们有

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad C=\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

其中 C_1 正规. 由方程 (9.4.5) 和 (9.4.6) 知, $C_1=(\alpha+\beta)A_1$. 所以 A 正规且定理中的情形 (i) 成立.

(c) A 非拟正规且 $\beta=\gamma=0$. 在这种情形下，方程 (9.4.1) 和 (9.4.2) 简化为下列形式:

$$A^*AC = \alpha A^*A^2, \tag{9.4.7}$$

$$AA^*C = \lambda A^*A^2. \tag{9.4.8}$$

显然 $\lambda=\alpha$ 且 $\overline{\text{rng}}(C^*)$ 约化 A 为正规算子. 关于分解 $H=\overline{\text{rng}}(C^*)\oplus\ker C$, 我们有

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad C=\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 A_1 正规, $C_1A_1=A_1C_1$, $A_2^2=0$, $A_2C_2=C_2A_1=0$ 且 $A_2^*C_2=C_2A_1^*$. 令 $H=\overline{\text{rng}}(A_1)\oplus\ker A_1\oplus\ker A_2\oplus\ker A_2^{\perp}$. 现在容易证明 A 和 C 具有情形 (iii) 中的矩阵表示.

(d) A 非拟正规且 β 或者 γ 不为零.

如果 $\beta\neq 0$, 那么关于分解 $H=\overline{\text{rng}}(A^*)\oplus\ker A$, A 和 C 有矩阵表示

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

其中 C_1 正规, $C_1A_1=A_1C_1$, $A_2C_1=C_2A_2$ 且 $A_2^*C_2=C_1A_2^*$. 方程 (9.4.1) 蕴涵

$$A_2A_1^*A_1+A_2A_2^*A_2=0.$$

注意到如果 P 和 Q 是正算子使得 $P(P+Q)=0$, 则 $P=0$. 所以我们有 $A_2=0$, 即 $\ker A$ 约化 A 且方程 (9.4.1) 和 (9.4.2) 转化为

$$A_1^*A_1C_1=\alpha A_1^*A_1^2+\beta A_1A_1^*A_1, \tag{9.4.9}$$

$$A_1A_1^*C_1=\lambda A_1^*A_1^2+\gamma A_1A_1^*A_1. \tag{9.4.10}$$

如果 C_1 不是单射，那么按照分解 $H=\overline{\operatorname{rng}}(C_1)\oplus\ker C_1$, 我们有

$$C_1=\begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{且} \qquad A_1=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{12} \end{pmatrix},$$

由方程 (9.4.9) 知,

$$\alpha A_{12}^*A_{12}^2+\beta A_{12}A_{12}^*A_{12}=0. \tag{9.4.11}$$

所以 A_{12} 拟正规且 A_{11} 非拟正规. 以后我们假定 C_1 是单射. 注意到 $\lambda\neq 0$ 且由方程 (9.4.9) 和 (9.4.10) 得

$$A_1^*A_1C_1^*=\bar{\alpha}A_1^{*2}A_1+\bar{\beta}A_1^*A_1A_1^*, \tag{9.4.9$'$}$$

$$A_1A_1^*C_1^*=\bar{\lambda}A_1^{*2}A_1+\bar{\gamma}A_1^*A_1A_1^*. \tag{9.4.10$'$}$$

显然 $A_1^*x=0$ 表明 $A_1x=0$, 从而 $x=0$. 这意味着 A_1 是单射且具有稠值域. 于是方程 (9.4.9$'$) 简化为

$$C_1^*A_1=\bar{\alpha}A_1^*A_1+\bar{\beta}A_1A_1^*. \tag{9.4.12}$$

所以

$$C_1C_1^*A_1=|\alpha|^2A_1^*A_1^2+(\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta})A_1A_1^*A_1+|\beta|^2A_1^2A_1^*. \tag{9.4.13}$$

又一次由方程 (9.4.10$'$) 和 (9.4.12), 我们有

$$\beta A_1^2A_1^*=\lambda A_1^*A_1^2+(\gamma-\alpha)A_1A_1^*A_1,$$

且方程 (9.4.13) 化为

$$C_1C_1^*A_1=(|\alpha|^2+\bar{\beta}\lambda)A_1^*A_1^2+(\bar{\alpha}\beta+\bar{\beta}\gamma)A_1A_1^*A_1.$$

于是

$$C_1C_1^* = sA_1^*A_1 + tA_1A_1^*, \tag{9.4.14}$$

其中 $s = |\alpha|^2 + \bar{\beta}\lambda$ 且 $t = \bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\gamma$. 由于 $C_1^*A_1$ 和 $C_1A_1^*$ 线性无关，故由方程 (9.4.12) 和 (9.4.14), 存在常数 a 使得

$$C_1C_1^* = aC_1^*A_1 + \bar{a}C_1A_1^*, \tag{9.4.15}$$

但是这将蕴涵 A_1 正规，矛盾.

如果 $\beta = 0$, 则 $\gamma \neq 0$ 且 $\ker A^*$ 约化 A. 类似的讨论也将导出矛盾. 证毕.

进而，如果我们假定 $\ker A$ 约化 A, 那么定理 9.4.1 有相当简单的形式.

推论 9.4.2 方程 (9.4.1) 和 (9.4.2) 的联列方程组有双交换解 (A, C) 并满足 $\ker A$ 约化 A 当且仅当下列陈述之一成立:

(i) $\alpha + \beta = \lambda + \gamma$, A 正规， $\overline{\mathrm{rng}}A$ 约化 C 且 $C|_{\overline{\mathrm{rng}}A} = (\alpha + \beta)A|_{\overline{\mathrm{rng}}A}$.

(ii) $\alpha = -\beta$, $\lambda = -\gamma$, $AC = 0$ 且 A 拟正规.

现在我们讨论 $H_1 \otimes H_2$ 上张量积算子 $A \otimes B + C \otimes D$ 的拟正规性，其中 $A, C \in \mathcal{B}(H_1)$, $B, D \in \mathcal{B}(H_2)$ 且 H_1 和 H_2 是可分的 Hilbert 空间.

定理 9.4.3 设 $(A, C) \subset \mathcal{B}(H_1)$ 和 $(B, D) \subset \mathcal{B}(H_2)$ 是非零双交换算子对. 则 $\mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$ 上的张量积算子 $A \otimes B + C \otimes D \neq 0$ 是拟正规算子的充分必要条件是下列陈述之一成立:

(i) 存在复数 α 使得 $C = \alpha A$ (或 $D = \alpha B$), 而 A 和 $B + \alpha D$ (或 B 和 $A + \alpha C$) 拟正规.

(ii) A, B, C 和 D 拟正规且满足要么 (1°) $AC = 0$ (或 $BD = 0$) 要么 (2°) $A|_{\overline{\mathrm{rng}}C}$, $C|_{\overline{\mathrm{rng}}A}$, $B|_{\overline{\mathrm{rng}}D}$ 和 $D|_{\overline{\mathrm{rng}}B}$ 正规.

(iii) A (或 B) 正规， C 和 D 拟正规， $D|_{\overline{\mathrm{rng}}B}$ (或 $C|_{\overline{\mathrm{rng}}A}$) 正规且存在复数 α 使得 $C|_{\overline{\mathrm{rng}}A} = \alpha A|_{\overline{\mathrm{rng}}A}$ (或 $D|_{\overline{\mathrm{rng}}B} = \alpha B|_{\overline{\mathrm{rng}}B}$) 并且 $B + \alpha D$ (或 $A + \alpha C$) 拟正规.

(iv) C (或 D) 正规， A 和 B 拟正规， $B|_{\overline{\text{rng}D}}$ (或 $A|_{\overline{\text{rng}C}}$) 正规且存在复数 α 使得 $A|_{\overline{\text{rng}C}} = \alpha C|_{\overline{\text{rng}C}}$ (或 $B|_{\overline{\text{rng}D}} = \alpha D|_{\overline{\text{rng}D}}$) 并且 $\alpha B + D$ (或 $\alpha A + C$) 拟正规.

证明 首先注意到如果 T 和 S 是双交换的，那么 $T+S$ 拟正规当且仅当

$$[T](T+S) = [S](T+S) = 0. \tag{9.4.16}$$

事实上， $T+S$ 拟正规当且仅当

$$[T](T+S) = [S^*](T+S). \tag{9.4.17}$$

注意到拟正规算子是亚正规的，故由定理 9.1.4, T 和 S 是亚正规的，即 $[T] \geq 0$ 且 $[S] \geq 0$. 于是方程 (9.4.17) 成立当且仅当 (9.4.16) 成立. 故 $A\otimes B + C\otimes D$ 拟正规当且仅当

$$A^*A^2 \otimes B^*B^2 - AA^*A \otimes BB^*B + A^*AC \otimes B^*BD - AA^*C \otimes BB^*D = 0, \tag{9.4.18}$$

$$C^*C^2 \otimes D^*D^2 - CC^*C \otimes DD^*D + C^*CA \otimes D^*DB - CC^*A \otimes DD^*B = 0, \tag{9.4.19}$$

且由定理 9.1.4 知， A, B, C 和 D 都是亚正规的.

假定 $A\otimes B + C\otimes D$ 是拟正规的.

如果 $AC = 0$ 或 $BD = 0$, 则方程 (9.4.18) 和 (9.4.19) 简化为

$$A^*A^2 \otimes B^*B^2 - AA^*A \otimes BB^*B = 0,$$

$$C^*C^2 \otimes D^*D^2 - CC^*C \otimes DD^*D = 0,$$

由定理 9.1.1, 容易看到 A, B, C 和 D 都是拟正规的.

如果 A 和 C 线性相关，即存在常数 α 使得 $C = \alpha A$, 于是由 (9.4.18) 和 (9.4.19) 知，

$$A^*A^2 \otimes (B^*B^2 + \alpha B^*BD) - AA^*A \otimes (BB^*B + \alpha BB^*D) = 0,$$

$$C^*C^2 \otimes (D^*D^2 + \alpha^{-1}D^*DB) - CC^*C \otimes (DD^*D + \alpha^{-1}DD^*B) = 0.$$

因为 $A\otimes B + C\otimes D \neq 0$, 再次应用定理 9.1.1, 我们有 A 拟正规. 又

$$[B](B + \alpha D) = 0,$$

$$[D](B+\alpha D)=0,$$

即 $B+\alpha D$ 也是拟正规的.

B 和 D 线性相关的情形可类似考虑.

现在假定 AC 和 BD 非零且 A 与 C (或 B 与 D) 线性无关.

如果 A, B, C 和 D 全是拟正规的, 由方程 (9.4.18) 和 (9.4.19) 知,

$$A^*AC\otimes B^*BD-AA^*C\otimes BB^*D=0,$$

$$C^*CA\otimes D^*DB-CC^*A\otimes DD^*B=0.$$

根据定理 9.1.1, A^*AC 和 AA^*C 必线性相关, 从而 $\overline{\mathrm{rng}C}$ 约化 A 为正规算子, 即 $A|_{\overline{\mathrm{rng}C}}$ 是正规算子. 类似地, $B|_{\overline{\mathrm{rng}D}}$, $C|_{\overline{\mathrm{rng}A}}$ 和 $D|_{\overline{\mathrm{rng}B}}$ 也是正规算子.

如果 B 不是拟正规的, 那么要么 B^*B^2, BB^*B, B^*BD 线性无关要么 B^*B^2, BB^*B, BB^*D 线性无关. 事实上, 我们有 B^*B^2 与 BB^*B 线性无关. 如果存在复数 α, β, λ 和 γ 使得

$$B^*BD=\alpha B^*B^2+\beta BB^*B,$$

$$BB^*D=\lambda B^*B^2+\gamma BB^*B,$$

则由推论 9.4.2, B 是正规的, 矛盾. 现在假定 B^*B^2, BB^*B, B^*BD 线性无关. 由定理 9.1.1 和方程 (9.4.18) 知, 存在 $\beta, \lambda, \gamma\in\mathbb{C}$ 使得

$$A^*A^2=\beta AA^*C, \tag{9.4.20}$$

$$AA^*A=\lambda AA^*C, \tag{9.4.21}$$

$$A^*AC=\gamma AA^*C. \tag{9.4.22}$$

显然 $\beta=\lambda$ 且 $\gamma=1$. 所以 A 拟正规且 $A|_{\overline{\mathrm{rng}C}}$ 正规. 进而方程 (9.4.21) 表明 $A|_{\overline{\ker C^*}}=0$. 因此 A 正规且 $C|_{\overline{\mathrm{rng}A}}=\alpha A|_{\overline{\mathrm{rng}A}}$ 而 $\alpha=\beta^{-1}$. 于是方程 (9.4.18) 和 (9.4.19) 转化为方程

$$[B](B+\alpha D)=0, \tag{9.4.23}$$

$$C^*C^2 \otimes D^*D^2 - CC^*C \otimes DD^*D + |\alpha|^2 A^*A^2 \otimes [D]B = 0. \quad (9.4.24)$$

显然, C^*C^2 与 A^*A^2 线性无关. 从而由定理 9.1.1, 存在常数 t 使得

$$D^*D^2 = DD^*D, \quad (9.4.25)$$

$$[D]B = tDD^*D, \quad (9.4.26)$$

$$C^*C^2 - CC^*C + t|\alpha|^2 A^*A^2 = 0. \quad (9.4.27)$$

然而, (9.4.27) 蕴涵 $t = 0$. 所以 C 和 D 拟正规且 $[D]B = 0$. 此与 (9.4.23) 一起蕴涵

$$([B] + [D])(B + \alpha D) = 0,$$

即, $B + \alpha D$ 拟正规. $D|_{\overline{\text{rng}B}}$ 的正规性是显然的.

B^*B^2, BB^*B 和 BB^*D 线性无关的情形可类似地讨论.

最后, 由 (9.4.18) 和 (9.4.19) 式关于 A, B, C 和 D 的对称性, 必要性得证.

充分性的证明是直接的, 从略. 证毕.

下面的推论与定理 9.4.3 的几个特殊情形有关.

推论 9.4.4 张量积 $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n \neq 0$ 拟正规当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 拟正规.

证明 在定理 9.4.3 中, 令 $C = A$ 且 $B = D$. 我们得到 $A \otimes B \neq 0$ 拟正规当且仅当 A 和 B 拟正规. 现在由归纳法可证之. 证毕.

推论 9.4.5 $A \otimes B - I \otimes I$ 拟正规当且仅当下列条件之一成立:

(i) A 和 B 正规.

(ii) 存在复数 α 和投影 P 使得 $A = \alpha P$ (或 $B = \alpha P$) 且 $B - \alpha^{-1}I$ (或 $A - \alpha^{-1}I$) 拟正规.

推论 9.4.6 $A \otimes I - I \otimes B$ 拟正规当且仅当下列之一成立:

(i) A 和 B 正规.

(ii) 存在复数 α 使得 $A=\alpha I$ (或 $B=\alpha I$) 且 $B-\alpha I$ (或 $A-\alpha I$) 拟正规.

推论 9.4.7 $A\otimes I-I\otimes A$ 拟正规当且仅当 A 正规当且仅当 $A\otimes I-I\otimes A$ 正规.

§9.5 $\mathcal{C}_p$ 类张量积算子

设 $H_1,\cdots,H_n$ 为可分复 Hilbert 空间, $A_{ij}\in\mathcal{B}(H_i)$, $A_{ij}\neq 0$. 令 $\Phi=\sum_{j=1}^{m}A_{1j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$ 为张量积空间 $H_1\otimes\cdots\otimes H_n$ 上的算子. 本节的目的是导出 Φ 为 $\mathcal{C}_p$ 类算子的充分必要条件.

定理 9.5.1 设 $A_k\in\mathcal{B}(H_k)$, $A_k\neq 0$, $k=1,\cdots,n$. 则算子张量积 $A_1\otimes\cdots\otimes A_n$ 为 $\mathcal{C}_p$ 类算子 $(1\leq p\leq+\infty)$ 当且仅当 $A_1,\cdots,A_n$ 均为 $\mathcal{C}_p$ 类算子.

证明 由定理 9.3.1, 只需对 $1\leq p<\infty$ 的情形证之. 首先假定 $n=2$. 如果 A_1, A_2 均为 $\mathcal{C}_p$ 类算子, 设 $\{s_i(A_1)\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{s_i(A_2)\}_{i=1}^{\infty}$ 分别为 A_1 和 A_2 的 s- 数, 则存在标准正交基 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}\subset H_1$, $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}\subset H_2$ 使得 $|A_1|u_i=(A_1^*A_1)^{\frac{1}{2}}u_i=s_i(A_1)u_i$, $|A_2|w_i=s_j(A_2)w_i$, 且 $\sum_{i=1}^{\infty}[s_i(A_k)]^p<\infty$, $k=1,2$. 由于 $\{u_i\otimes w_j\}_{i,j=1}^{\infty}$ 是 $H_1\otimes H_2$ 的标准正交基且

$$|A_1\otimes A_2|^2(u_i\otimes w_j)=A_1^*A_1u_i\otimes A_2^*A_2w_j=s_i^2(A_1)s_j^2(A_2)u_i\otimes w_j,$$

故有

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{\infty}\langle|A_1\otimes A_2|^p(u_i\otimes w_j),u_i\otimes w_j\rangle\\=&\sum_{i,j=1}^{\infty}s_i^p(A_1)s_j^p(A_2)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}s_i^p(A_1)\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}s_j^p(A_2)\right)<\infty,\end{aligned}$$

即 $A_1\otimes A_2$ 为 $H_1\otimes H_2$ 上的 $\mathcal{C}_p$ 类算子.

反之，设 $A_1\otimes A_2$ 为 $\mathcal{C}_p$ 算子，定理 9.3.1 蕴涵 A_1, A_2 为紧算子. 记 A_k 的 s- 数为 $\{s_i(A_k)\}_{i=1}^{\infty}$, $k=1,2$, 并取标准正交基 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}\subset H_1$, $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}\subset H_2$ 使得 $|A_1|u_i=s_i(A_1)u_i$, $|A_2|w_j=s_j(A_2)w_j$. 由于

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}s_i^p(A_1)\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}s_j^p(A_2)\right)$$
$$=\sum_{i,j=1}^{\infty}\langle|A_1\otimes A_2|^p(u_i\otimes w_j),u_i\otimes w_j\rangle<\infty,$$

从而必有 $\sum_{i=1}^{\infty}s_i^p(A_k)<\infty$, $k=1,2$. 因此 A_1, A_2 为 $\mathcal{C}_p$ 类算子.

现在对 n 用归纳法，不难看出定理 9.5.1 成立. 证毕.

由定理 9.5.1 知，若每个 A_{ij} 均为 $\mathcal{C}_p$ 类算子，则 $\Phi=\sum_{j=1}^{m}A_{1j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$ 必为 $\mathcal{C}_p$ 类算子. 反之，若 Φ 为 $\mathcal{C}_p$ 类算子，一般说来 A_{ij} 可能不再是 $\mathcal{C}_p$ 类算子，但我们有如下结论:

引理 9.5.2 设 $\Phi=\sum_{j=1}^{m}A_{1j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$ 为 $H_1\otimes\cdots\otimes H_n$ 上的张量积算子，$A_{ij}\neq 0$ 且存在某个 r $(1\leq r\leq n)$ 使得 $\{A_{r1},\cdots,A_{rm}\}$ 线性无关. 如果 Φ 是 $\mathcal{C}_p$ 类算子 $(1\leq p\leq\infty)$, 则对所有的 i $(\neq r)$ 及 j, A_{ij} 均为 $\mathcal{C}_p$ 类算子.

证明 当 $p=\infty$, 应用定理 9.3.1. 故可设 $1\leq p<\infty$. 不失一般性，设 $r=1$, 即 $\{A_{11},\cdots,A_{1m}\}$ 线性无关. 记 $A_j=A_{1j}$, $T_j=A_{2j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$, $K=H_2\otimes\cdots\otimes H_n$, 则 $\Phi=\sum_{j=1}^{m}A_j\otimes T_j$ 为 $H_1\otimes K$ 上的算子. 因 $A_1\notin\mathrm{span}\{A_2,\cdots,A_m\}$, 存在向量 $x_1,\cdots,x_s$, $y_1,\cdots,y_s\in H_1$ 使得

$$\sum_{k=1}^{s}\langle A_jx_k,y_k\rangle=\begin{cases}1, & j=1,\\ 0, & j=2,\cdots,m,\end{cases}\tag{9.5.1}$$

于是对任意的 $f, g \in K$, 有

$$\sum_{k=1}^{s}\langle\Phi(x_k\otimes f), y_k\otimes g\rangle = \langle T_1 f, g\rangle. \tag{9.5.2}$$

由定理 1.1.20 知, 对于 $1 \le p < +\infty$, 算子 $B \in \mathcal{B}(H,K)$ 为 $\mathcal{C}_p$ 类算子当且仅当对所有的 $X \in \mathcal{B}(l_2,H)$ 及 $Y \in \mathcal{B}(l_2,K)$ 都有 $\{\langle BXe_k, Ye_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \in l_p$ 成立, 其中 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 l_2 的一组标准正交基. 根据这一结果及 (9.5.2) 式, 我们来证明 T_1 为 $\mathcal{C}_p$ 类算子. 对 (9.5.2) 式中的向量 $x_1,\cdots,x_s$, $y_1,\cdots,y_s \in H_1$, 取 S, $T \in \mathcal{B}(l_2,H_1)$ 使得 $Se_k = x_k, Te_k = y_k, k = 1,\cdots,s$. 则对任意的 $X, Y \in \mathcal{B}(l_2,K)$, 由于 Φ 是 $H_1\otimes K$ 上的 $\mathcal{C}_p$ 类算子, 故有

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{\infty}|\langle T_1Xe_l, Ye_l\rangle|^p\\
&=\sum_{l=1}^{\infty}|\sum_{k=1}^{s}\langle\Phi(S\otimes X)(e_k\otimes e_l),(T\otimes Y)(e_k\otimes e_l)\rangle|^p\\
&\le s^p\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{s}|\langle\Phi(S\otimes X)(e_k\otimes e_l),(T\otimes Y)(e_k\otimes e_l)\rangle|^p\\
&\le s^p\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\langle\Phi(S\otimes X)(e_k\otimes e_l),(T\otimes Y)(e_k\otimes e_l)\rangle|^p<\infty,
\end{aligned}$$

所以 T_1 是 K 上的 $\mathcal{C}_p$ 类算子.

同理可证 $T_2,\cdots,T_m$ 是 $\mathcal{C}_p$ 类算子. 再由定理 9.5.1, 每个 A_{ij} $(i>1)$ 都是 $\mathcal{C}_p$ 类算子. 证毕.

定理 9.5.3 如果存在 r, s 使得 $r \neq s$, $\{A_{r1},\cdots,A_{rm}\}$ 和 $\{A_{s1},\cdots,A_{sm}\}$ 线性无关, 则 $\Phi = \sum_{j=1}^{m} A_{1j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$ 为 $\mathcal{C}_p$ 类算子 $(1\le p\le +\infty)$ 的充分必要条件是每个 A_{ij} 均为 $\mathcal{C}_p$ 类算子. 进而, 当 Φ 为迹类算子时, 也有

$$\mathrm{tr}(\Phi) = \sum_{j=1}^{m}\mathrm{tr}(A_{1j})\cdots\mathrm{tr}(A_{nj}). \tag{9.5.3}$$

证明 由定理 9.5.1 和引理 9.5.2 立知本定理的条件是充分必要的，而当 Φ 为 $\mathcal{C}_1$ 类算子时，(9.5.3) 式可由迹的定义直接计算而得. 证毕.

特别地，对于 $n=2$ 的情形，有

推论 9.5.4 设 $\Phi=\sum_{i=1}^{m}A_i\otimes B_i$ 为 $H_1\otimes H_2$ 上的张量积算子，$1\leq p\leq+\infty$.

(1) 如果 $\{A_1,\cdots,A_m\}$, $\{B_1,\cdots,B_m\}$ 线性无关，则 Φ 为 $\mathcal{C}_p$ 类算子当且仅当每个 A_i, B_i 均为 $\mathcal{C}_p$ 类算子;

(2) Φ 为 $\mathcal{C}_p$ 类算子的充分必要条件是存在 $A_1',\cdots,A_r'\in\operatorname{span}\{A_1,\cdots,A_m\}$, $B_1',\cdots,B_r'\in\operatorname{span}\{B_1,\cdots,B_m\}$ 使得 $\Phi=\sum_{i=1}^{r}A_i'\otimes B_i'$ 且 A_i', B_i' 均为 $\mathcal{C}_p$ 类算子.

证明 应用定理 9.5.3 及事实: 对于 $\Phi=\sum_{i=1}^{m}A_i\otimes B_i$, 总存在线性无关的算子组 $\{A_1',\cdots,A_r'\}\subset\operatorname{span}\{A_1,\cdots,A_m\}$, $\{B_1',\cdots,B_r'\}\subset\operatorname{span}\{B_1,\cdots,B_m\}$ 使得 $\Phi=\sum_{i=1}^{r}A_i'\otimes B_i'$. 证毕.

更一般地，我们有

定理 9.5.5 $\Phi=\sum_{j=1}^{m}A_{1j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$ 为 $\mathcal{C}_p$ 类算子 $(1\leq p\leq+\infty)$ 的充分必要条件是存在 $\mathcal{C}_p$ 类算子 $A_{i1}',\cdots,A_{ir}'\in\operatorname{span}\{A_{i1},\cdots,A_{im}\}$ $(i=1,\cdots,n)$ 使得 $\Phi=\sum_{j=1}^{r}A_{1j}'\otimes\cdots\otimes A_{nj}'$.

证明 条件的充分性显然，下证必要性. 由推论 9.5.4 (2) 知当 $n=1,2$ 时条件是必要的. 现在假设对 $n-1$ 条件也是必要的. 我们来证明对于 n 条件是必要的，于是由归纳法知，定理的条件是必要的. 为此，记 $A_j=A_{1j}$, $T_j=A_{2j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$, 于是有 $\Phi=A_1\otimes T_1+\cdots+A_m\otimes T_m$, 且存在线性无关的算子组 $\{B_1,\cdots,B_t\}\subset\operatorname{span}\{A_1,\cdots,A_m\}$, $\{S_1,\cdots,S_t\}\subset\operatorname{span}\{T_1,\cdots,T_m\}$ 使得 $\Phi=B_1\otimes S_1+\cdots+B_t\otimes S_t$. 根据推论 9.5.4, 若 Φ 为 $\mathcal{C}_p$ 类

算子，则 B_i 和 S_i 都是 $\mathcal{C}_p$ 类算子. 注意到每个 S_i 都具有形式 $S_i=\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_{ij}A_{2j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$, 其中 α_{ij} 为复数. 应用归纳假设于 S_i, 存在 $\mathcal{C}_p$ 类算子组 $\{A_{lj}^{(i)}\}\subset\mathrm{span}\{A_{l1},\cdots,A_{lm}\}$ $(l=2,\cdots,n)$ 使得 $S_i=\sum\limits_{j}A_{2j}^{(i)}\otimes\cdots\otimes A_{nj}^{(i)}$. 将此代入 $\Phi=\sum\limits_{i=1}^{t}B_i\otimes S_i$, 即知存在 $\mathcal{C}_p$ 类算子 $A'_{i1},\cdots,A'_{ir}\in\mathrm{span}\{A_{i1},\cdots,A_{im}\}$ $(i=1,\cdots,n)$ 使得 $\Phi=\sum\limits_{j=1}^{r}A'_{1j}\otimes\cdots\otimes A'_{nj}$. 证毕.

§9.6 有限秩张量积算子

现在我们转向对有限秩张量积算子 $\Phi=\sum\limits_{j=1}^{m}A_{1j}\otimes\cdots\otimes A_{nj}$ 的讨论. 为叙述方便，以下称 $H_1\otimes\cdots\otimes H_n$ 中形如 $x_1\otimes\cdots\otimes x_n$ 的向量为一秩向量，而有限个一秩向量的线性组合称为有限秩向量.

显然，一秩算子 A 和 B 的张量积 $A\otimes B$ 仍为一秩算子. 由此易知，若 A,B 为有限秩算子. 则 $A\otimes B$ 也为有限秩的. 反过来，如果 $A\otimes B$ 为非零有限秩算子，则 A 和 B 必都为有限秩算子. 事实上，若 $\{Ax_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $\mathrm{rng}(A)$ 中线性无关的子集，则对任意的 $By\neq 0$, $\{Ax_k\otimes By\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathrm{rng}(A)$ 中线性无关的子集，这里 $\mathrm{rng}(A)$ 代表算子 A 的值域. 进而，如果 $A\otimes B$ 是一秩的，则存在向量 $u,v\in H_1\otimes H_2$ 使得 $A\otimes B=\langle\cdot,v\rangle u$. 任取 $x\otimes y$ 使得 $Ax\otimes By=\langle x\otimes y,v\rangle u\neq 0$, 由此易见 u 为 $H_1\otimes H_2$ 中的一秩向量，即存在 $x_1\in H_1$, $y_1\in H_2$ 使得 $u=x_1\otimes y_1$. 考虑一秩算子 $A^*\otimes B^*=(A\otimes B)^*=\langle u,\cdot\rangle v$, 知 v 也是一秩元且 $v=x_2\otimes y_2$. 所以我们有 $A\otimes B=(x_1\otimes y_1)\otimes(x_2\otimes y_2)$, 再应用定理 9.1.1, A, B 必都为一秩算子. 现在应用归纳法，事实上我们已证明了如下的事实.

定理 9.6.1 算子张量积 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \neq 0$ 为有限秩算子 (或一秩算子) 的充分必要条件是 $A_1, \cdots, A_n$ 都为有限秩算子 (或一秩算子).

因有限个有限秩算子的线性组合仍是有限秩的, 故由定理 9.6.1, 若 A_{ij} 都是有限秩算子, 则 $\Phi = \sum_{j=1}^{m} A_{1j} \otimes \cdots \otimes A_{nj}$ 也是有限秩的. 反之, 我们有

引理 9.6.2 如果存在 r 使得 $\{A_{r1}, \cdots, A_{rm}\}$ 线性无关, 则张量积算子 $\Phi = \sum_{j=1}^{m} A_{1j} \otimes \cdots \otimes A_{nj}$ 为有限秩算子蕴涵每个 A_{ij} $(i \neq r)$ 均为有限秩算子.

于是类似于定理 9.5.3 和定理 9.5.5 的论证易知下述定理成立.

定理 9.6.3 如果存在相异的 r, s 使得 $\{A_{r1}, \cdots, A_{rm}\}$, $\{A_{s1}, \cdots, A_{sm}\}$ 线性无关, 则算子张量积 $\Phi = \sum_{j=1}^{m} A_{1j} \otimes \cdots \otimes A_{nj}$ 成为有限秩算子的充分必要条件是每个 A_{ij} 均为有限秩算子.

定理 9.6.4 $\Phi = \sum_{j=1}^{m} A_{1j} \otimes \cdots \otimes A_{nj}$ 为有限秩算子的充分必要条件是存在有限秩算子 $A'_{i1}, \cdots, A'_{ir} \in \mathrm{span}\{A_{i1}, \cdots, A_{im}\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ 使得 $\Phi = \sum_{j=1}^{r} A'_{1j} \otimes \cdots \otimes A'_{nj}$.

下面证明引理 9.6.2.

证明 不妨设 $r = 1$. 采用引理 9.5.2 证明中的记号, 我们有 $\Phi = A_1 \otimes T_1 + \cdots + A_m \otimes T_m$ 且存在 $x_1, \cdots, x_s$, $y_1, \cdots, y_s$ 使得 (9.5.1) 式成立, 把 $H_1 \otimes K$ 中的一秩向量 $x \otimes g$ 看作如下定义的 $\mathcal{B}(H_1, K)$ 中的一秩算子: 对任意的 $y \in H_1$, $(x \otimes g)y = \langle y, x \rangle g$. 则由 (9.5.1) 式, 对任意的 $f \in K$, 有

$$\sum_{k=1}^{s} \Phi(x_k \otimes f) y_k = \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{m} (A_j x_k \otimes T_j f) \right) y_k$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s} \langle y_k, A_j x_k \rangle T_j f = T_1 f. \tag{9.6.1}$$

因 Φ 为有限秩的，故

$$\dim \operatorname{span}\{\Phi(x_k \otimes f) \mid f \in K,\ k = 1, \cdots, s\} \leq \dim \operatorname{rng}(\Phi) < \infty,$$

从而

$$\dim \operatorname{span}\{\Phi(x_k \otimes f) y_k \mid f \in K,\ k = 1, \cdots, s\} < \infty.$$

结合 (9.6.1) 式，易知 $\dim \operatorname{rng}(T_1) < \infty$, 即 T_1 为有限秩的.

类似地， $T_2, \cdots, T_m$ 也是有限秩的. 于是根据定理 9.6.1, A_{ij} $(i > 1)$ 都是有限秩的. 证毕.

定理 9.6.5 $\Phi = \sum_{j=1}^{m} A_{1j} \otimes \cdots \otimes A_{nj}$ 为一秩算子的充分必要条件是存在正整数 s, t 以及向量 $\{f_{ik}\}_{k=1}^{s}$, $\{g_{il}\}_{l=1}^{t} \subset H_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ 使得一秩算子

$$D_{ikl} = \langle \cdot, g_{il} \rangle f_{ik} \in \operatorname{span}\{A_{i1}, \cdots, A_{im}\}$$

且 $\Phi = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{t} D_{1kl} \otimes \cdots \otimes D_{nkl}$.

证明 设定理的条件成立. 令 $u = \sum_{k=1}^{s} f_{1k} \otimes \cdots \otimes f_{nk}$, $v = \sum_{l=1}^{t} g_{1l} \otimes \cdots \otimes g_{nl}$, 则对任意的 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ 都有

$$\Phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{s} D_{1kl} x_1 \otimes \cdots \otimes D_{nkl} x_n = \langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, v \rangle u,$$

故 $\Phi = \langle \cdot, v \rangle u$ 为一秩算子.

反之，设 Φ 为一秩算子，于是存在向量 $u, v \in H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$ 使得 $\Phi(\cdot) = \langle \cdot, v \rangle u$. 因对任意的 $x_1, \cdots, x_n$, 有 $\Phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{j=1}^{m} A_{1j} x_1 \otimes \cdots \otimes A_{nj} x_n = \langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, v \rangle u$, 故 u 必为有限秩向

量. 类似地, 因 Φ^* 也是一秩算子, v 必为有限秩向量. 所以 v, u 可表示为 $u = \sum_{k=1}^{s} f_{1k} \otimes \cdots \otimes f_{nk}$, $v = \sum_{l=1}^{t} g_{1l} \otimes \cdots \otimes g_{nl}$. 于是对任意的 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in H_1 \otimes \cdots \otimes H_n$, 有

$$\begin{aligned}\Phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= \left(\sum_{l=1}^{t} \langle x_1, g_{1l}\rangle \cdots \langle x_n, g_{nl}\rangle\right) \sum_{k=1}^{s} f_{1k} \otimes \cdots \otimes f_{nk} \\ &= \sum_{l=1}^{t}\sum_{k=1}^{s} D_{1kl}x_1 \otimes \cdots \otimes D_{nkl}x_n \\ &= \left(\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{t} D_{1kl} \otimes \cdots \otimes D_{nkl}\right)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n),\end{aligned}$$

其中, $D_{ikl} = \langle \cdot, g_{il}\rangle f_{ik}$ 为一秩算子. 从而有

$$\Phi = \sum_{j=1}^{m} A_{1j} \otimes \cdots \otimes A_{nj} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{t} D_{1kl} \otimes \cdots \otimes D_{nkl}.$$

最后, 利用引理 9.1.1 不难推出, 对于 $i = 1, \cdots, n$, 都有 $D_{ikl} \in \mathrm{span}\{A_{i1}, \cdots, A_{im}\}$. 证毕.

推论 9.6.6 设 $\{A_1, \cdots, A_m\}, \{B_1, \cdots, B_m\}$ 为线性无关算子组, 则张量积算子 $\Phi = A_1 \otimes B_1 + \cdots + A_m \otimes B_m$ 为一秩算子的充分必要条件是存在正整数 s, t 以及线性无关向量组 $\{x_1, \cdots, x_s\}$, $\{y_1, \cdots, y_t\} \subset H_1$, $\{f_1, \cdots, f_s\}$, $\{g_1, \cdots, g_t\} \subset H_2$ 使得 $st = m$, $C_{kl} = \langle \cdot, y_l\rangle x_k \in \mathrm{span}\{A_1, \cdots, A_m\}$, $D_{kl} = \langle \cdot, g_l\rangle f_k \in \mathrm{span}\{B_1, \cdots, B_m\}$ 且 $\Phi = \sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{t} C_{kl} \otimes D_{kl}$.

推论 9.6.7 设 $\{A_1, \cdots, A_m\}, \{B_1, \cdots, B_m\}$ 线性无关且 m 是素数. 则 $\Phi = A_1 \otimes B_1 + \cdots + A_m \otimes B_m$ 为一秩算子的充分必要条件是下列陈述之一成立:

(1) 存在 $x_1, \cdots, x_m, y_0 \in H_1$ 及 $f_1, \cdots, f_k, g_0 \in H_2$ 使得一秩算子 $C_k = \langle \cdot, y_0\rangle x_k \in \mathrm{span}\{A_1, \cdots, A_m\}$, $D_k = \langle \cdot, g_0\rangle f_k$

$\in\text{span}\{B_1,\cdots,B_m\}$ 且有 $\Phi=\sum_{k=1}^{m}C_k\otimes D_k$;

(2) 存在 $x_0,y_1,\cdots,y_m\in H_1$ 及 $f_0,g_1,\cdots,g_m\in H_2$ 使得 $C_k=\langle\cdot,y_k\rangle x_0\in\text{span}\{A_1,\cdots,A_m\}$, $D_k=\langle\cdot,g_k\rangle f_0\in\text{span}\{B_1,\cdots,B_m\}$ 且有 $\Phi=\sum_{k=1}^{m}C_k\otimes D_k$.

§9.7 应用:$\mathcal{C}_2$ 上的初等算子

设 H 为可分无限维复 Hilbert 空间, A_i, $B_i\in\mathcal{B}(H)$, $i=1,\cdots,m$, $\Delta(\cdot)=\sum_{i=1}^{m}A_i(\cdot)B_i$ 为 $\mathcal{B}(H)$ 上的初等算子. 由于 H 上的 Hilbert-schmidt 类 $\mathcal{C}_2=\mathcal{C}_2(H)$ 等距同构于张量积空间 $H\otimes\overline{H}$, 其中 $\overline{H}$ 为 H 的共轭空间, 且算子 $\tau_{AB}:X\mapsto AXB$ $(X\in\mathcal{C}_2)$ 酉等价于张量积 $A\otimes B^*$. 故 §9.1—§9.6 中所得有关算子张量积的结果可应用于 $\mathcal{C}_2$ 上的初等算子 Δ, 从而得到 Δ 在 $\mathcal{C}_2$ 上为自伴算子、正规算子、亚正规算子、拟正规算子、$\mathcal{C}_p$ $(1\le p\le+\infty)$ 类算子、有限秩算子以及一秩算子的充分必要条件. 例如, 我们有

定理 9.7.1 初等算子 $\Delta=\sum_{i=1}^{m}A_i(\cdot)B_i$ 为 $\mathcal{C}_2$ 上自伴算子、$\mathcal{C}_p$ 类算子 $(1\le p\le+\infty)$ 或有限秩算子的充分必要条件是存在相应类型的算子 $A_1',\cdots,A_r'\in\text{span}\{A_1,\cdots,A_m\}$, $\{B_1',\cdots,B_r'\}\in\text{span}\{B_1,\cdots,B_m\}$ 使得 $\Delta(\cdot)=\sum_{i=1}^{r}A_i'(\cdot)B_i'$.

定理 9.7.2 设 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{B_i\}_{i=1}^n$ 都是双交换的算子组. 则初等算子 $\Delta(\cdot)=\sum_{i=1}^{n}A_i(\cdot)B_i$ 是 $\mathcal{C}_2$ 上亚正规算子 (或正规算子) 的充分必要条件是每个 A_i 和 B_i^* $(i=1,2,\cdots,n)$ 都是亚正规算子 (或正规算子).

$\mathcal{C}_2$ 上初等算子成为其他一些类型算子的条件也可根据前几节的相应结果仿照上面两个定理给出, 就不再一一列出了.

§9.8 注　记

初等算子在算子理想 $\mathcal{C}_2$ 上的性质 20 世纪 70 年代以来有许多文献予以讨论, 例如参见 [70], [119], [147—148] 和 [202] 等, 后来演变为算子张量积的相应研究. 本章的内容主要来源于 Hou [101], [102] 及 [104].

§9.1—9.3 主要取材于 Hou [102]. 初等算子等于 0 的充分必要条件首先是由 Fong, Sourour [72] 给出, 定理 9.1.1 是其算子张量积形式. 定理 9.1.4 可看作是文献 Li Shaokuan, Yan Shaozong [148] 中结论的推广, 那里给出亚正规初等算子的刻画. 次正规的广义导算子的刻画是 Magajna [153] 得到的, 而定理 9.2.3 及其推论则属于 Hou [102]. 问题 9.2.1 仍未得到解决, 有兴趣的读者不妨一试. 长度为 2 的初等算子成为拟正规算子的充分必要条件先由 Li [147] 获得, 定理 9.4.3 及其更简明的证明则由 Hou [101] 得到. 定理 9.1.3 以及 §9.5—§9.7 中内容可在 Hou [104] 中找到, 其前期的一些工作见冯文英 [70].

第十章　算子代数上的可乘映射

前面几章都是讨论各种算子代数上的线性或可加映射，研究在什么样的条件下线性映射和可加映射具有可乘性．乘法运算也是一种最基本的代数运算，自然可以提出类似的乘法保持问题，即研究算子代数上的保持某个给定算子性质不变的抽象可乘映射(满足条件 $\Phi(TS)=\Phi(T)\Phi(S)$ 的映射) 如何刻画的问题．这正是本章将要介绍的内容．

第一节先讨论矩阵代数上的保秩可乘映射，并给出可乘映射的一个结构定理．应用第一节的结果，第二节讨论复矩阵代数上保谱半径、保数值半径、保自伴性和保正规性等可乘映射的刻画问题．第三节处理无限维的情形，获得 $\mathcal{B}(X)$ (X 为 Banach 空间) 上秩一不增及保秩可乘映射的结构性质；在此基础上，第四节利用可乘映射的一些保持性给出 $\mathcal{B}(X)$ 上自同构的刻画．第五节则给出 $\mathcal{B}(H)$ 上 *- 自同构的一些刻画．可以看到，在适当的条件下，映射的可乘性蕴涵其可加性或线性．本章最后一节，即第六节，在一般 Banach 代数情形考虑保恒等和可乘映射的刻画问题．

§10.1　矩阵代数上的保秩可乘映射

本节总假定 $\mathbb{F}$ 是任意域，我们讨论矩阵代数 $M_n(\mathbb{F})$ 上的保秩可乘映射，并给出其上一般可乘映射的结构性质．

定义 10.1.1　设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的代数，τ 是域 $\mathbb{F}$ 上的同态．若 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 为环同态且满足对任意的 $\lambda\in\mathbb{F}$ 及 $T\in\mathcal{A}$，有 $\Phi(\lambda T)=\tau(\lambda)\Phi(T)$，则称 Φ 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的 τ- 代数同态．

我们首先刻画矩阵代数上秩一不增的可乘映射．

定理 10.1.1　设 $\Phi:M_n(\mathbb{F})\to M_n(\mathbb{F})$ 为可乘映射．如果 Φ 把某个一秩矩阵映成秩至多为 1 的矩阵，则 Φ 具有下列三种形式之

一:

(1) Φ 把秩至多为 1 的矩阵映为 0 矩阵;

(2) 存在非奇异矩阵 R 并且存在某个把秩至多为 1 的矩阵映成 0 矩阵的可乘映射 $\Phi_0 : M_n(\mathbb{F}) \to M_{n-1}(\mathbb{F})$ 使得对任意的 $T \in M_n(\mathbb{F})$, 有

$$\Phi(T) = R^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Phi_0(T) \end{pmatrix} R;$$

(3) 存在 $\mathbb{F}$ 上保单位元的单射环同态 τ 和非奇异矩阵 $R \in M_n(\mathbb{F})$ 使得 $\Phi((t_{ij})) = R^{-1}(\tau(t_{ij}))R$ 对所有的 $(t_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ 成立. 特别地, Φ 是 $M_n(\mathbb{F})$ 的 τ- 代数同态.

证明 充分性显然, 我们只需证明必要性.

任给一秩矩阵 $T = x \otimes f$, 存在 $y \in \mathbb{F}^n$, $g \in (\mathbb{F}^n)'$ 使得 $\langle x, g\rangle = \langle y, f\rangle = 1$. 对任意的一秩矩阵 $S = z \otimes h$, 我们有

$$\Phi(S) = \Phi(z \otimes g \cdot x \otimes f \cdot y \otimes h) = \Phi(z \otimes g)\Phi(T)\Phi(y \otimes h). \quad (10.1.1)$$

若存在一秩矩阵 T 使得 $\Phi(T) = 0$, 则对任意的一秩矩阵 S, 都有 $\Phi(S) = 0$. 进而, 对任意的一秩矩阵 $x \otimes f$, 我们有 $\Phi(0)\Phi(x \otimes f) = \Phi(x \otimes f)\Phi(0) = \Phi(0)$, 于是 $\text{rng}(\Phi(0)) \subseteq \text{rng}(\Phi(x \otimes f)) = \{0\}$. 所以 $\Phi(0) = 0$, 从而定理中的形式 (1) 成立.

由上面的证明知, 如果存在一秩矩阵 T 使得 $\Phi(T) \neq 0$, 则对每个一秩矩阵 S, 都有 $\Phi(S) \neq 0$. 在这种情形下, 由于 Φ 把某个一秩矩阵映成秩至多为 1 的矩阵, 再由 (10.1.1) 式知, Φ 保秩一性. 因此, 以后我们总假定 Φ 保秩一性, 并且证明 Φ 具有定理中陈述的形式 (2) 或 (3).

若 $\Phi(0) \neq 0$, 则 $\Phi(0)$ 必为一秩幂等元, 且满足对任意的 $T \in M_n(\mathbb{F})$, 有 $\Phi(0)\Phi(T) = \Phi(T)\Phi(0) = \Phi(0)$. 所以存在非奇异矩阵 R 使得对任意的 T, 都有

$$\Phi(0) = R^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R$$

且 $\Phi(T)=R^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \Phi_0(T)\end{pmatrix}R$, 其中 $\Phi_0: M_n(\mathbb{F})\to M_{n-1}(\mathbb{F})$ 是可乘映射满足把每个秩至多为 1 的矩阵映成 0 矩阵. 所以 Φ 具有定理中的形式 (2).

若 $\Phi(0)=0$, 我们将证明 Φ 具有形式 (3). 对于 $j=1,\cdots,n$, 定义 $P_j:\mathbb{F}\to M_n(\mathbb{F})$ 为

$$P_j(b)=\operatorname{diag}\{0,0,\cdots,0,b,0,\cdots,0\},$$

即 $P_j(b)$ 是 (j,j) 处的元为 b 而其余元为 0 的对角矩阵. 因 $\Phi(P_j(1))$ 是一秩幂等元, 故存在单位向量 w_j 使得 $\Phi(P_j(1))w_j=w_j$. 如果 $i\neq j$, 则 $\Phi(P_j(1))w_i=\Phi(P_j(1))\Phi(P_i(1))w_i=\Phi(0)w_i=0$. 显然 $\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一组基. 定义矩阵 $W(e_i)=\omega_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 容易验证 $\Phi(P_j(1))=WP_j(1)W^{-1}$ $(j=1,2,\cdots,n)$.

对任意一秩矩阵 A, 存在一秩矩阵 R 使得 $A=ARA$. 因为 Φ 保秩一性, 由方程

$$\Phi(\lambda A)=\Phi(\lambda ARA)=\Phi(A)\Phi(\lambda R)\Phi(A),$$

我们有 $\Phi(\lambda A)=\tau_A(\lambda)\Phi(A)$, 其中 $\tau_A:\mathbb{F}\to\mathbb{F}$ 是数值函数. 我们断言 τ_A 与 A 的选取无关. 如果 B 是一秩矩阵满足 $BA\neq 0$ 且 τ_B 是与 B 相应的数值函数, 则

$$\tau_B(\lambda)\Phi(B)\Phi(A)=\Phi(\lambda BA)=\Phi(B\lambda A)=\tau_A(\lambda)\Phi(B)\Phi(A),$$

上式蕴涵 $\tau_A=\tau_B$. 若 C 是一秩矩阵且满足 $CA=0$, 那么我们可选择一秩矩阵 B 使得 $CB\neq 0$ 且 $BA\neq 0$. 再次我们得到 $\tau_A=\tau_C=\tau_B$. 故 τ_A 与 A 的选取无关, 以后我们用 τ 来表示这个数量函数. 即存在 $\mathbb{F}$ 上的函数 τ 使得 $\Phi(\lambda T)=\tau(\lambda)\Phi(T)$ 对所有的 $\lambda\in\mathbb{F}$ 及任意的一秩矩阵 $T\in M_n(\mathbb{F})$ 成立. 显然 τ 是可乘的.

对于 $j=1,2,\cdots,n$ 及 $b\neq 0$, 有

$$\begin{aligned}\Phi(P_j(b))&=\Phi(bP_j(1))=\tau(b)\Phi(P_j(1))\\&=\tau(b)WP_j(1)W^{-1}=WP_j(\tau(b))W^{-1}.\end{aligned}$$

Φ 保秩一性蕴涵, 如果 $b \neq 0$, 则有 $\tau(b) \neq 0$. 对于 $i, j = 1, 2, \cdots, n$,

$$E_{ij}e_k = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ e_i, & k = j. \end{cases}$$

如果 $k \neq j$, 则 $E_{ij}P_k(1) = 0$, 因此 $\Phi(E_{ij})w_k = \Phi(E_{ij}P_k(1))w_k = 0$. 由于 $\text{rank}(E_{ij}) = 1$, 我们必须有 $\Phi(E_{ij})w_j \neq 0$. 令 $\Phi(E_{ij})w_j = b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_nw_n$. 如果 $k \neq i$, 则 $P_k(1)E_{ij} = 0$, $b_kw_k = \Phi(P_k(1)E_{ij})w_j = \Phi(0)w_j = 0$ 且 $b_k = 0$. 所以

$$\Phi(E_{ij})w_k = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ b_{ij}w_i, & k = j. \end{cases}$$

进而, $E_{mr}E_{rs} = E_{ms}$ 蕴涵 $b_{mr}b_{rs} = b_{ms}$ 且因为 $b_{ij}b_{ji} = b_{ii} = 1$, $b_{ij} \neq 0$ (注意到 $E_{ii} = P_i(1)$). 令 $v_i = b_{i1}w_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 则 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一组基. 定义矩阵 R 为 $R: v_i \mapsto e_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 易验证对于 $j = 1, 2, \cdots, n$,

$$\Phi(P_j(b)) = R^{-1}P_j(\tau(b))R.$$

$$\begin{aligned}\Phi(E_{ij})v_k &= \Phi(E_{ij})b_{k1}w_k = b_{k1}\Phi(E_{ij})\Phi(P_k(1))w_k \\ &= \begin{cases} 0, & \text{如果 } k \neq j, \\ b_{k1}b_{ij}w_i = b_{i1}w_i = v_i, & \text{如果 } k = j. \end{cases}\end{aligned}$$

因此

$$\Phi(E_{ij}) = R^{-1}E_{ij}R \qquad \forall i,\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

如果对任意的 $S = (s_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$, 有 $R\Phi(S)R^{-1} = (t_{ij})$. 因为 $E_{ij}SE_{ij} = s_{ji}E_{ij} = P_i(s_{ji})E_{ij}$, 因此

$$\begin{aligned}\Phi(E_{ij}SE_{ij})v_j &= \Phi(P_i(s_{ji})E_{ij})v_j = \Phi(P_i(s_{ji}))\Phi(E_{ij})v_j \\ &= R^{-1}P_i(\tau(s_{ji}))Rv_i = \tau(s_{ji})v_i\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\Phi(E_{ij})\Phi(S)\Phi(E_{ij})v_j &= R^{-1}E_{ij}RR^{-1}(t_{ij})RR^{-1}E_{ij}Rv_j \\ &= R^{-1}E_{ij}(t_{ij})E_{ij}Rv_j = R^{-1}t_{ji}E_{ij}Rv_j = t_{ji}v_i.\end{aligned}$$

所以 $\tau(s_{ij}) = t_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 且对任意的 $(s_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$, 有 $\Phi((s_{ij})) = R^{-1}(\tau(s_{ij}))R$. 从上面的讨论知, $\tau(\lambda) = 0$ 当且仅当 $\lambda = 0$, 且 $\tau(1) = 1$. 下证 τ 也是可加的. 对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$\Phi(AB) = \Phi\left(\begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= R^{-1}\begin{pmatrix} \tau(\alpha+\beta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}R,$$

$$\Phi(A)\Phi(B)$$

$$= R^{-1}\begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \tau(\beta) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}R$$

$$= R^{-1}\begin{pmatrix} \tau(\alpha)+\tau(\beta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}R.$$

因为 $\Phi(AB)=\Phi(A)\Phi(B)$, 我们得到 $\tau(\alpha+\beta)=\tau(\alpha)+\tau(\beta)$ 对任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ 成立. 因此 τ 是可加的. 从而 τ 是 $\mathbb{F}$ 的保单位元的单射环同态, Φ 是 $M_n(\mathbb{F})$ 的环同态, 且对任意的 $\lambda\in\mathbb{F}$ 及任意的 $T=(t_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$, 有 $\Phi(\lambda T)=\tau(\lambda)\Phi(T)$, $\Phi((t_{ij}))=R^{-1}(\tau(t_{ij}))R$. 故 Φ 具有定理中的形式 (3). 证毕.

注 10.1.1 存在 $M_n(\mathbb{F})$ 上的非平凡可乘映射将每个秩不大于 1 的矩阵映为零矩阵. 例如: 如果 T 是非奇异矩阵, 令 $\Phi(T)=T$; 如果 T 是奇异矩阵, 令 $\Phi(T)=0$.

对任意的 $T=(t_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$, 令 $\overline{T}=(\overline{t_{ij}})$, 其中 $\mathbb{C}$ 是复数域.

推论 10.1.2 令 $\mathbb{F}$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 或有理 (实或复) 数域 (即为 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$). 设 $\Phi: M_n(\mathbb{F})\to M_n(\mathbb{F})$ 是可乘映射. 则 Φ 把某个一秩矩阵映成秩不超过 1 的矩阵当且仅当下列三种形式之一成立:

(1) Φ 把秩不超过 1 的矩阵映为 0 矩阵;

(2) 存在非奇异矩阵 R 并且存在某个把秩至多为 1 的矩阵映成 0 矩阵的可乘映射 $\Phi_0: M_n(\mathbb{F})\to M_{n-1}(\mathbb{F})$ 使得对任意的 $T\in M_n(\mathbb{F})$, 有

$$\Phi(T)=R^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \Phi_0(T)\end{pmatrix}R;$$

(3) 存在非奇异矩阵 $R\in M_n(\mathbb{F})$ 使得 $\Phi(T)=R^{-1}TR$ 对每个 $T\in M_n(\mathbb{F})$ 成立; 或者 $\Phi(T)=R^{-1}\overline{T}R$ 对每个 $T\in M_n(\mathbb{F})$ 成立. 特别地, Φ 是 $M_n(\mathbb{F})$ 的自同构或共轭自同构.

证明 由定理 10.1.1, 我们只需证明在定理 10.1.1 的情形 (3) 中, 对任意的 $\lambda\in\mathbb{F}$, 有 $\tau(\lambda)\equiv\lambda$; 或对任意的 $\lambda\in\mathbb{F}$, 有 $\tau(\lambda)\equiv\overline{\lambda}$.

令 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Q}$. 因为 τ 是 $\mathbb{F}$ 上保单位元的单射环同态, 那么对所有的 $p\in\mathbb{Q}$, 有 $\tau(p)=p$. 此与 τ 的正性一起蕴涵如果 p 和 q 是有理数且 $p\le r\le q$, 那么 $p\le\tau(r)\le q$. 现在有理数的稠密性蕴涵对所有的 $r\in\mathbb{F}$, 有 $\tau(r)=r$. 令 $\mathbb{F}$ 是有理复数域, 即 $\mathbb{F}=\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$. 因为对任意的 $p\in\mathbb{Q}$, 有 $\tau(p)=p$, 且 $\tau(i)^2=\tau(i^2)=\tau(-1)=-1$,

故 $\tau(i)=i$ 或 $\tau(i)=-i$ 且对任意的 $\lambda\in\mathbb{F}$, 有 $\tau(\lambda)=\lambda$, 或对任意的 $\lambda\in\mathbb{F}$, 有 $\tau(\lambda)=\overline{\lambda}$. 证毕.

回顾一下, $\Phi: M_n(\mathbb{F})\to M_n(\mathbb{F})$ 称为保秩 k 的, 如果它把每个秩为 k 的矩阵映成秩为 k 的矩阵, 其中 k 是不大于 n 的正整数; Φ 称为保秩的, 如果它保每个矩阵的秩; Φ 称为幂等元秩不增的如果对任意的幂等元 P, $\mathrm{rank}(\Phi(P))\le\mathrm{rank}(P)$.

由定理 10.1.1 可知, 可乘映射 $\Phi: M_n(\mathbb{F})\to M_n(\mathbb{F})$ 保秩一性当且仅当它具有定理 10.1.1 中的形式 (2) 或 (3).

下述定理给出了保秩可乘映射的几个刻画.

定理 10.1.3 设 $\Phi: M_n(\mathbb{F})\to M_n(\mathbb{F})$ 是可乘映射, 则下列叙述等价:

(1) Φ 保秩.

(2) 存在一秩矩阵 T_0 使得 $\Phi(T_0)\neq 0$ 且 Φ 秩不增.

(3) 存在一秩矩阵 T_0 使得 $\Phi(T_0)\neq 0$ 且 Φ 保幂等元的秩不增.

(4) 存在 $\mathbb{F}$ 上保单位元的单射环同态 τ 和非奇异矩阵 $R\in M_n(\mathbb{F})$ 使得

$$\Phi((t_{ij}))=R^{-1}(\tau(t_{ij}))R$$

对所有的 $(t_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$ 成立. 特别地, Φ 是 $M_n(\mathbb{F})$ 的 τ- 代数同态.

证明 (4)⇒(1)⇒(2)⇒(3) 显然. 我们只需证明 (3)⇒(4).

设 Φ 满足条件 (3), 则 $\Phi(0)=0$ 且 Φ 保秩一性. 由定理 10.1.1 知, (4) 成立. 证毕.

类似定理 10.1.1 的方法, 我们也能得到矩阵代数上一般可乘映射的结构, 其在下一节中要用到.

定理 10.1.4 设 $\Phi: M_n(\mathbb{F})\to M_n(\mathbb{F})$ 是可乘映射, 则下列条件之一成立:

(1) Φ 把秩不超过一的矩阵映为 0 矩阵;

(2) 存在非奇异矩阵 R, 正整数 k ($\le n$), 并且存在可乘映射

$\Phi_0 : M_n(\mathbb{F}) \to M_{n-k}(\mathbb{F})$ 满足把秩至多为 1 的矩阵映成 0 矩阵，使得对任意的 $T \in M_n(\mathbb{F})$, 有

$$\Phi(T) = R^{-1} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \Phi_0(T) \end{pmatrix} R.$$

(3) 存在 $\mathbb{F}$ 上保单位元的单射环同态 τ 和非奇异矩阵 $R \in M_n(\mathbb{F})$ 使得 $\Phi((t_{ij})) = R^{-1}(\tau(t_{ij}))R$ 对所有的 $(t_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ 成立. 特别地，Φ 是 $M_n(\mathbb{F})$ 的 τ- 代数同态.

证明 由 Φ 的可乘性，我们有 $\Phi(P_j(1))$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 是幂等元. 显然对任意的 i, j 满足 $1 \le i \ne j \le n$, 有 $\Phi(P_j(1))\Phi(P_i(1)) = \Phi(P_i(1))\Phi(P_j(1)) = \Phi(0)$. 因为 $\Phi(0) = Q_0$ 与每个 $\Phi(P_i(1))$ 交换，因此存在幂等元 Q_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 使得 $\Phi(P_i(1)) = Q_0 + Q_i$, 其中 $Q_iQ_j = Q_jQ_i = 0$ $(i \ne j)$ 且 $Q_0Q_i = Q_iQ_0 = 0$. 从而 $\text{rank}(Q_0)+\text{rank}(Q_1) + \cdots + \text{rank}(Q_n) \le n$, 故 $\text{rank}(Q_j)$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$ 中至少有一个为 0.

如果 $\text{rank}(Q_0) = k \ne 0$, 令 M_0 和 M_1 分别是 Q_0 和 $I - Q_0$ 的值域. 那么 $\Phi(T)\Phi(0) = \Phi(0)\Phi(T) = \Phi(0) = Q_0$ 蕴涵，关于空间分解 $\mathbb{F}^n = M_0 \oplus M_1$, 有 $\Phi(T) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \Phi_1(T) \end{pmatrix}$, 其中 $\Phi_1 : M_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{L}(M_1) \cong M_{n-k}(\mathbb{F})$ 是可乘映射满足 $\Phi_1(0) = 0$. 因为 $\text{rank}(Q_1) + \cdots + \text{rank}(Q_n) \le n - k$ 并且 $\Phi_1(P_i(1)) = Q_i$, 因此至少存在一个 i 使得 $\Phi_1(P_i(1)) = 0$. 由此推出 Φ_1 把秩至多为 1 的矩阵映为 0 矩阵. 故显然有非奇异矩阵 R 和可乘映射 $\Phi_0 : M_n(\mathbb{F}) \to M_{n-k}(\mathbb{F})$ 使得 Φ 具有形式 (2).

如果 $\text{rank}(Q_0) = 0$, 那么至少有一个 j 使得 $\text{rank}(Q_j) \le 1$, 从而 $\text{rank}(\Phi(P_j(1))) \le 1$, 现在应用定理 10.1.1 可完成证明. 证毕.

§10.2 矩阵代数上保谱及保正规性可乘映射

作为 §10.1 节结果的应用，本节进一步讨论了矩阵代数上的可乘保持问题. 我们总假定 $\mathbb{F}$ 是复数域 $\mathbb{C}$.

对于 $T \in M_n(\mathbb{C})$, 令 $\sigma(T)$ 和 $r(T) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ 分别代表 T 的谱和谱半径. 回顾一下, 映射 $\Phi: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 称为保谱半径, 如果 $r(\Phi(T)) = r(T)$ 对每个 $T \in M_n(\mathbb{C})$ 成立. 显然保谱映射一定保谱半径.

定理 10.2.1 设 $\Phi: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 为可乘映射. 则 Φ 保谱半径的充分必要条件是存在非奇异矩阵 $R \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\Phi(T) = R^{-1}TR$ 对每个 $T \in M_n(\mathbb{C})$ 成立; 或 $\Phi(T) = R^{-1}\overline{T}R$ 对每个 $T \in M_n(\mathbb{C})$ 成立, 即 Φ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的自同构或共轭自同构.

证明 条件的充分性显然. 下证必要性.

设 Φ 是保谱半径的可乘映射, 我们断言 $\Phi(0) = 0$. 否则, $\Phi(0)$ 是非零幂等元且 $r(\Phi(0)) = 1$. 这与 $r(\Phi(0)) = r(0) = 0$ 矛盾. 因 $\Phi(P_i(1))$ 是幂等元且 $1 = r(P_i(1)) = r(\Phi(P_i(1)))$, 于是存在单位向量 $w_i \in \mathbb{C}^n$ 使得 $\Phi(P_i(1))w_i = w_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 如果 $i \neq j$, 则 $\Phi(P_i(1))w_j = \Phi(P_i(1))\Phi(P_j(1))w_j = \Phi(0)w_j = 0$. 故 $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组基. 定义矩阵 A: $w_i \to e_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 易验证 $\Phi(P_i(1)) = A^{-1}P_i(1)A$. 显然 $\Phi(P_i(1))$ 是一秩矩阵 $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 由定理 10.1.1 知存在 $\mathbb{C}$ 上保单位元的单射环同态 τ 及非奇异矩阵 $R \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\Phi((t_{ij})) = R^{-1}(\tau(t_{ij}))R$ 对每个 $(t_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ 成立. 注意到对任意的 $b \in \mathbb{C}$, 有

$$|b| = r(P_i(b)) = r(\Phi(P_i(b))) = r(\tau(b)R^{-1}P_i(1)R) = |\tau(b)|,$$

于是 τ 连续. 故对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有 $\tau(\lambda) = \lambda$; 或对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有 $\tau(\lambda) = \overline{\lambda}$. 证毕.

推论 10.2.2 设 $\Phi: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 为可乘映射. 则 Φ 保谱当且仅当存在非奇异矩阵 $R \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\Phi(T) = R^{-1}TR$ 对每个 $T \in M_n(\mathbb{C})$ 成立, 即 Φ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的自同构.

证明 由定理 10.2.1, 我们只须证明 τ 不是 $\mathbb{C}$ 上的共轭映射. 否则, 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有

$$\{\lambda\} = \sigma(\lambda I) = \sigma(\Phi(\lambda I)) = \sigma(\overline{\lambda} I) = \overline{\lambda},$$

这是不可能的. 因此, $\Phi(T)=R^{-1}TR$ 对任意的 $T\in M_n(\mathbb{C})$ 成立. 证毕.

回顾一下, 矩阵 A 的数值域和数值半径分别定义为 $W(A)=\{\langle Ax,x\rangle \mid x\in\mathbb{C}^n, \|x\|=1\}$ 和 $w(A)=\sup\{|\lambda| \mid \lambda\in W(A)\}$.

定理 10.2.3 设 $\Phi: M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$ 为可乘映射. 则 Φ 保数值半径当且仅当存在酉矩阵 $U\in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\Phi(T)=U^*TU$ 对任意的 $T\in M_n(\mathbb{C})$ 成立; 或 $\Phi(T)=U^*\overline{T}U$ 对任意的 $T\in M_n(\mathbb{C})$ 成立.

证明 注意到 $\Phi(0)=0$. 否则, $\Phi(0)$ 是非零幂等元. 因此 $1\le w(\Phi(0))$, 矛盾. 因对任意的 $b\in\mathbb{C}$ 有 $w(P_j(b))=|b|$ $(j=1,2,\cdots,n)$, 故类似于定理 10.2.1 的证明, 存在非奇异矩阵 $R\in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\Phi(T)=R^{-1}TR$ 对任意的 $T\in M_n(\mathbb{C})$ 成立; 或 $\Phi(T)=R^{-1}\overline{T}R$ 对任意的 $T\in M_n(\mathbb{C})$ 成立.

下证, 若对每个 $T\in M_n(\mathbb{C})$, 有 $\Phi(T)=R^{-1}TR$, 则存在酉矩阵 U 使得对任意的 $T\in M_n(\mathbb{C})$, 有 $\Phi(T)=U^*TU$.

事实上, 对任意的 $x\in\mathbb{C}^n$, 必有 $R^{-1}x$ 与 R^*x 线性相关. 否则, 存在 $x_0\in\mathbb{C}^n$ 使得 $R^{-1}x_0$ 与 R^*x_0 线性无关. 由于 $R^{-1}x_0\otimes R^*x_0$ 是非自伴秩一幂等矩阵, 易证 $W(R^{-1}x_0\otimes R^*x_0)$ 是以 0 和 1 为焦点的椭圆盘. 于是由 Φ 的保数值半径性, 我们得到 $1<w(R^{-1}x_0\otimes R^*x_0)=w(\Phi(x_0\otimes x_0))=w(x_0\otimes x_0)=1$, 矛盾. 利用引理 2.1.3, 存在 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 使得 $R^{-1}=\lambda_0R^*$, 从而 $\lambda_0R^*R=R^{-1}R=I=RR^{-1}=\lambda_0RR^*$, 故 $\lambda_0>0$. 令 $U=\sqrt{\lambda_0}R$, 则 U 是酉矩阵且 $\Phi(T)=U^*TU$ 对任意的 $T\in M_n(\mathbb{C})$ 成立.

现在假定对任意的 $T\in M_n(\mathbb{C})$, 有 $\Phi(T)=R^{-1}\overline{T}R$. 我们将证明存在酉矩阵 U 使得 $\Phi(T)=U^*\overline{T}U$ 对每个 $T\in M_n(\mathbb{C})$ 成立.

注意到 $\overline{TS}=(\overline{T})(\overline{S})$ 且 $\overline{(T^*)}=(\overline{T})^*=T^{tr}$. 因此 R 是酉元 (或 S 自伴) 当且仅当 $\overline{R}$ 是酉元 (或 $\overline{S}$ 自伴). 我们断言对任意的向量 $x\in\mathbb{C}^n$, 有 $\overline{R}^{-1}x$ 与 $(\overline{R})^*x$ 线性相关. 否则若存在 $x_0\in\mathbb{C}^n$ 使得 $\overline{R}^{-1}x_0$ 与 $\overline{R}^*x_0$ 线性无关, 由于 Φ 保数值半径, 我们有 $1<w(\overline{\overline{R}^{-1}x\otimes\overline{R}^*x})=w(\Phi(x\otimes x))=w(x\otimes x)=1$, 又

一次得到矛盾. 也由 2.1.3, 存在 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $R^{-1} = \lambda_0 R^*$. 所以 $\lambda_0 R^* R = R^{-1}R = I = RR^{-1} = \lambda_0 RR^*$, 故 $\lambda_0 > 0$. 令 $U = \sqrt{\lambda_0}R$, 则 U 是酉元且 $\Phi(T) = U^*\overline{T}U$ 对任意的 $T \in M_n(\mathbb{C})$ 成立. 证毕.

推论 10.2.4 设 $\Phi: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 为可乘映射. 则 Φ 保数值域当且仅当存在酉矩阵 $U \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\Phi(T) = U^*TU$ 对每个 $T \in M_n(\mathbb{C})$ 成立.

证明 注意到对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有 $W(\lambda I) = \{\lambda\}$. 因此定理 10.2.3 中的后一种情形不出现. 证毕.

若 $T \geq 0 \Rightarrow \Phi(T) \geq 0$, 则称 Φ 保正性; 若 $T^* = T \Rightarrow \Phi(T)^* = \Phi(T)$, 则称 Φ 保自伴性. 类似地, 可定义保矩阵酉性的映射.

定理 10.2.5 设 $\Phi: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 为可乘映射. 则 Φ 保正 (或保自伴) 性当且仅当下列陈述之一成立:

(1) Φ 保正 (或保自伴) 性且把秩不大于 1 的矩阵映为 0 矩阵.

(2) 存在酉矩阵 $U \in M_n(\mathbb{C})$, 正整数 k $(\leq n)$ 以及保正性 (或保自伴性) 的可乘映射 $\Phi_0 : M_n(\mathbb{C}) \to M_{n-k}(\mathbb{C})$ 满足把每个秩至多为 1 的矩阵映成 0 矩阵, 使得对任意的 $T \in M_n(\mathbb{C})$, 有

$$\Phi(T) = U^* \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \Phi_0(T) \end{pmatrix} U.$$

(3) 存在酉矩阵 $U \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\Phi(T) = U^*TU$ 对所有的 $T \in M_n(\mathbb{C})$ 成立; 或 $\Phi(T) = U^*\overline{T}U$ 对所有的 $T \in M_n(\mathbb{C})$ 成立.

证明 显然只需证明条件是必要的. 由定理 10.1.4, 只需验证 Φ 把某个一秩矩阵映成非零矩阵的情形即可.

假定 $Q_0 = \Phi(0) \neq 0$. 由于 $\Phi(0)$ 是正规幂等矩阵, 因此 Q_0 是投影. 设 $k = \text{rank}(Q_0)$. 则存在酉矩阵 U 使得 $Q_0 = U^* \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U$. 对任意的 T, 令 $\Psi(T) = U\Phi(T)U^*$. 则 Ψ 是保正性 (或保自伴性) 的可乘映射, 并且满足 $\Psi(0) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 注意到 $\Psi(0)\Psi(T) = \Psi(T)\Psi(0) = \Psi(0)$, 此与定理 10.1.4 的证明一起蕴涵存在保正性 (或保自伴性) 的可乘映射 $\Phi_0 : M_n(\mathbb{C}) \to M_{n-k}(\mathbb{C})$, 满足把秩至多

为 1 的矩阵映成 0 矩阵，使得对任意的 $T \in M_n(\mathbb{C})$，有 $\Psi(T) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \Phi_0(T) \end{pmatrix}$. 因此 Φ 具有定理中陈述的形式 (2).

假定 $\Phi(0) = 0$. 则由定理 10.1.4，存在 $\mathbb{C}$ 上保单位元的单射环同态 τ 和非奇异矩阵 $R \in M_n(\mathbb{C})$ 使得对任意的 $(s_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$，有 $\Phi((s_{ij})) = R^{-1}(\tau(s_{ij}))R$.

现在对任意的 $S = (s_{ij})$，定义 $\tau(S) = (\tau(s_{ij}))$. 若 S 是半正定矩阵，则 $\Phi(S)$ 也是，并且我们有

$$R^*\tau(S)^*(R^*)^{-1} = R^{-1}\tau(S)R.$$

因此对所有的半正定矩阵 S，我们有 $RR^*\tau(S)^* = \tau(S)RR^*$. 注意到 $\tau(E_{ii}) = E_{ii}$，于是对任意的 $i = 1, 2, \cdots, n$，$RR^*E_{ii} = E_{ii}RR^*$. 由此易证对某些正数 d_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$，$RR^* = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$.

对满足 $|\lambda| \le 1$ 的任意 $\lambda \in \mathbb{C}$ 及任意的 $k, r \in \{1, 2, \cdots, n\}$，$k \ne r$，令矩阵 $S = (s_{ij})$，其中 $s_{kk} = s_{rr} = 1$，$s_{kr} = \lambda$，$s_{rk} = \overline{\lambda}$，并且当 $i, j \ne k, r$ 时，有 $s_{ij} = 0$，则 $S \ge 0$. 故 $RR^*\tau(S)^* = \tau(S)RR^*$ 蕴涵 $d_k\tau(\overline{\lambda}) = d_r\overline{\tau(\lambda)}$. 从而存在正数 d 使得 $RR^* = dI$ 且对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$，有 $\tau(\overline{\lambda}) = \overline{\tau(\lambda)}$. 令 $U = d^{-\frac{1}{2}}R$，则 U 是酉元且 $\Phi(T) = U^*\tau(T)U$. $T \ge 0$ 蕴涵 $\tau(T) = U\Phi(T)U^*$ 是自伴元，故 $\tau(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. 注意到对任意的 $\beta \in \mathbb{Q}$，有 $\tau(\beta) = \beta$，因此对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$，有 $\tau(\alpha) = \alpha$. 所以要么对所有的 $\lambda \in \mathbb{C}$，$\tau(\lambda) = \lambda$，要么对所有的 $\lambda \in \mathbb{C}$，$\tau(\lambda) = \overline{\lambda}$.

显然如果 Φ 是保自伴性的可乘映射，上述证明也成立. 证毕.

至于保正规性可乘映射或保酉性可乘映射，我们有下列结论.

定理 10.2.6 设 $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 为可乘映射. 则 Φ 保正规 (或保酉) 性当且仅当下列陈述之一成立：

(1) Φ 保正规性 (或保酉性) 且把秩不大于 1 的矩阵映为 0 矩阵.

(2) 存在酉矩阵 $U \in M_n(\mathbb{C})$，正整数 k $(\le n)$ 以及保正规性 (或保酉性) 的可乘映射 $\Phi_0 : M_n(\mathbb{C}) \to M_{n-k}$ 满足把每个秩至多

为 1 的矩阵映成 0 矩阵，使得对任意的 $T\in M_n(\mathbb{C})$，有 $\Phi(T)=U^*\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \Phi_0(T) \end{pmatrix}U$.

(3) 存在酉矩阵 $U\in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\Phi(T)=U^*TU$ 对所有的 $T\in M_n(\mathbb{C})$) 成立；或 $\Phi(T)=U^*\overline{T}U$ 对所有的 $T\in M_n(\mathbb{C})$ 成立.

证明 由定理 10.1.4 和定理 10.2.5 的证明，我们只需考虑情形 $\Phi(0)=0$ 且 Φ 保秩一性，从而证明 Φ 具有形式 (3) 即可.

由定理 10.1.4 知，存在 $\mathbb{C}$ 上保单位元的单射环同态 τ 和非奇异矩阵 $R\in M_n(\mathbb{C})$ 使得对任意的 $(s_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$ 有 $\Phi((s_{ij}))=R^{-1}(\tau(s_{ij}))R$.

假定 Φ 保正规性. 那么对任意的正规矩阵 $S=(s_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$，我们有

$$R^*\tau(S)^*(R^*)^{-1}R^{-1}\tau(S)R=R^{-1}\tau(S)RR^*\tau(S)^*(R^*)^{-1}.$$

所以

$$\tau(S)^*(RR^*)^{-1}\tau(S)RR^*=(RR^*)^{-1}\tau(S)RR^*\tau(S)^*. \tag{10.2.1}$$

注意到 $\tau(E_{ii})=\tau(E_{ii})^*=E_{ii}$，我们有

$$E_{ii}(RR^*)^{-1}E_{ii}RR^*=(RR^*)^{-1}E_{ii}RR^*E_{ii}\qquad \forall i=1,2,\cdots,n. \tag{10.2.2}$$

令 $(RR^*)^{-1}=(w_{ij})$ 且 $RR^*=(v_{ij})$. 由于 $w_{ii}>0$, $v_{ii}>0$ 且 (w_{ij}) 和 (v_{ij}) 的任意主子方阵均是正定的，因此由 (10.2.2) 式，我们有

$$\sum_{k=1}^n w_{ii}v_{ik}E_{ik}=\sum_{k=1}^n w_{ki}v_{ii}E_{ki},$$

此蕴涵如果 $k\neq i$, 则 $w_{ki}=v_{ik}=0$. 所以 $RR^*=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$，其中 $d_i=v_{ii}$. 下证 $d_i=d_j=d$. 如若不然，必存在 $k,l\in 1,2,\cdots,n$ 使得 $d_k\neq d_l$. 令 $S=E_{kl}+E_{lk}$, 则 S 是正规矩阵且 $\tau(S)=\tau(S)^*=S$. 由 (10.2.1) 式，我们有

$$\begin{aligned}&(E_{kl}+E_{lk})(RR^*)^{-1}(E_{kl}+E_{lk})RR^*\\&=(RR^*)^{-1}(E_{kl}+E_{lk})RR^*(E_{kl}+E_{lk}),\end{aligned}$$

故 $d_l d_k^{-1} = d_l^{-1} d_k$, 即 $d_l^2 = d_k^2$, 与 $d_k \neq d_l$ 矛盾. 因此 $RR^* = dI$. 令 $U = d^{-\frac{1}{2}} R$, 则 U 是酉矩阵且对任意的矩阵 T 有 $\Phi(T) = U^* \tau(T) U$. 显然, 若 T 是正规矩阵, 则 $\tau(T)$ 也是. 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 取

$$T = \begin{pmatrix} I & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{\lambda} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

则 T 正规. 因此

$$\tau(T) = \begin{pmatrix} I & \tau(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ \tau(\overline{\lambda}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

也是正规的. 由于 $\tau(T)^* \tau(T) = \tau(T) \tau(T)^*$, 故 $\tau(\overline{\lambda}) = \overline{\tau(\lambda)}$. 进而易证 τ 是恒等映射或共轭映射. 完成保正规性情形的证明.

假定 Φ 保矩阵的酉性, 则对任意酉矩阵 $S = (s_{ij})$ 有

$$\tau(S)^* (RR^*)^{-1} \tau(S) RR^* = (RR^*)^{-1} \tau(S) RR^* \tau(S)^* = I. \quad (10.2.3)$$

令

$$\begin{aligned} U_{kl} = \; & E_{11} + \cdots + E_{(k-1)(k-1)} + E_{kl} + E_{(k+1)(k+1)} \\ & + \cdots + E_{(l-1)(l-1)} + E_{lk} + E_{(l+1)(l+1)} + \cdots + E_{nn}. \end{aligned}$$

显然 U_{kl} 是酉矩阵且 $\tau(U_{kl}) = \tau(U_{kl})^* = U_{kl} = U_{kl}^*$. 故由 (10.2.3), 我们有

$$U_{kl} (RR^*)^{-1} U_{kl} RR^* = (RR^*)^{-1} U_{kl} RR^* U_{kl} = I.$$

这样对任意的 $k, l \in \{1, 2, \cdots n\}$, $U_{kl} RR^* = RR^* U_{kl}$. 记 $RR^* = (v_{ij})$, 通过简单计算得,

$$v_{kk} = v_{11}, v_{kl} = v_{lk}, v_{ik} = v_{il}, v_{ki} = v_{li} \quad 对于 \; (i \neq k, l).$$

因此，存在正数 d 和实数 a 使得 $v_{ii}=d$ 且当 $i\neq j$ 时，有 $v_{ij}=a$. 下证 $a=0$. 任取正整数 m, n, r 使得 $m^2=n^2+r^2$. 令

$$S=\begin{pmatrix} \frac{n}{m} & \frac{r}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{r}{m} & \frac{n}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

则 S 是酉矩阵且 $\tau(S)=S$. 由 (10.2.3) 式得 $SRR^*=RR^*S$. 易证 $\frac{n-r}{m}a=\frac{n+r}{m}a=a$. 故 $a=0$. 所以 $RR^*=dI$. 令 $U=d^{-\frac{1}{2}}R$, 则 U 是酉矩阵且对任意的矩阵 T 有 $\Phi(T)=U^*\tau(T)U$. 而且当 S 是酉矩阵时，我们可证 $\tau(S)$ 也是酉的. 对满足 $|\lambda|=1$ 的任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, 令

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{n}{m} & \frac{r}{m}\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{r}{m}\overline{\lambda} & \frac{n}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

则 S_λ 是酉的，从而

$$\tau(S_\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{n}{m} & \frac{r}{m}\tau(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{r}{m}\tau(\overline{\lambda}) & \frac{n}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

也是酉的. 故 $\tau(\overline{\lambda})=\overline{\tau(\lambda)}$, 且对满足 $|\lambda|=1$ 的任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, 有

$|\tau(\lambda)| = 1$. 对满足 $|t| < 1$ 的任意 $t \in \mathbb{R}$, 令

$$T_t = \begin{pmatrix} t & \sqrt{1-t^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\sqrt{1-t^2} & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

则 T_t 是酉的, 故

$$\tau(T_t) = \begin{pmatrix} \tau(t) & \tau(\sqrt{1-t^2}) & 0 & \cdots & 0 \\ \tau(-\sqrt{1-t^2}) & \tau(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

也是酉的, 从而 $|\tau(t)| < 1$. 因而 τ 有界, 故可证 τ 是恒等映射或共轭映射. 证毕.

推论 10.2.7 设 $\Phi: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ 是可乘映射. 若 $\Phi(0) = 0$ 且 Φ 把某个一秩矩阵映成一秩矩阵, 则下列叙述等价:

(1) Φ 是保正的.

(2) Φ 是保自伴的.

(3) Φ 是保正规的.

(4) Φ 是保酉的.

(5) 存在酉矩阵 $U \in M_n(\mathbb{C})$ 使得 $\Phi(T) = U^*TU$ 对所有的 $T \in M_n(\mathbb{C})$ 成立; 或 $\Phi(T) = U^*\overline{T}U$ 对所有的 $T \in M_n(\mathbb{C})$ 成立.

§10.3 $\mathcal{B}(X)$ 上的保秩可乘映射

本节总假定 X 和 Y 是数域 $\mathbb{F}$ ($= \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的 Banach 空间, 其中 $\dim X = \infty$, 并且讨论 $\mathcal{B}(X)$ 上的保秩一性和保秩可乘映射的刻画.

设 M 是 X 的子空间, 如果存在子空间 $N \subset X$ 使得 $M \cap N = \{0\}$ 且 $M + N = X$, 称 N 是 M 在 X 中的补子空间, 记为 $M \dot{+} N = X$. 令 $\mathcal{F}_1(X)$ 代表 X 上秩不大于 1 的算子全体组成的集合.

定理 10.3.1 设 $\Phi: \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 是可乘映射, M 是包含集合 $\{y \mid$ 存在一秩算子 T 使得 $y \in \text{rng}(\Phi(T))\}$ 的最小闭子空间且具有闭的补子空间 N. 若 Φ 把某个一秩算子映成秩不大于 1 的算子, 并且存在 k $(k \geq 2)$ 秩幂等元 P_0 使得 $\text{rank}(\Phi(P_0)) \leq \text{rank}(P_0)$, 则 Φ 具有下列形式之一:

(1) Φ 把秩不超过 1 的算子映为 0.

(2) 按照空间分解 $Y = Y_1 \dot{+} Y_0$, 对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$, 都有

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} \Phi_0(T) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中, $Y_0 = \text{rng}(\Phi(0))$ 并且 $\dim Y_0 = 1$, $\Phi_0: \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y_1)$ 是把秩不超过 1 的算子映为 0 的可乘映射.

(3) 存在可逆有界线性 (或共轭线性) 算子 $A: X \to M$ 和把秩不超过 1 的算子映为 0 的可乘映射 $\Phi_0: \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(N)$, 并且存在映射 $\Phi_{12}: \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(N, M)$ 满足 $\Phi_{12}(0) = 0$ 和

$$\Phi_{12}(T) = ATA^{-1}A_0 + \Phi_{12}(T)P_1 \qquad \forall T \in \mathcal{B}(X),$$

其中 $A_0 = \Phi_{12}(I)$, $P_1 = \Phi_0(I)$, $A_0 P_1 = 0$, 使得关于空间分解 $Y = M \dot{+} N$, 对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$, 都有

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} ATA^{-1} & \Phi_{12}(T) \\ 0 & \Phi_0(T) \end{pmatrix}.$$

证明 由 Φ 的可乘性知, 若存在一个一秩算子 T 使得 $\Phi(T) = 0$, 则对任意的一秩算子 S 都有 $\Phi(S) = 0$. 事实上, 设存在 $x \in X$, $f \in X^*$ 使得 $\Phi(x \otimes f) = 0$. 取 $x_0 \in X$, $f_0 \in X^*$ 使得 $\langle x, f_0 \rangle = \langle x_0, f \rangle = 1$. 则对任意的一秩算子 $S = u \otimes h$, 我们有 $\Phi(u \otimes h) =$

$\Phi((u\otimes f_0)(x\otimes f)(x_0\otimes h))=\Phi(u\otimes f_0)\Phi(x\otimes f)\Phi(x_0\otimes h)$. 又注意到对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$ 有 $\Phi(0)\Phi(T)=\Phi(T)\Phi(0)=\Phi(0)$, 所以在这种情形下 Φ 具有形式 (1).

现在假设存在一秩算子 T 使得 $\Phi(T)\neq 0$, 则对任意一秩算子 S 有 $\Phi(S)\neq 0$. 由于 Φ 使得某个一秩算子 (不妨设为 T_0) 秩不增, 所以 $0\neq\text{rank}(\Phi(T_0))\leq 1$, 故 $\text{rank}(\Phi(T_0))=1$. 由 Φ 的可乘性, 易验证 Φ 是保一秩的.

若 $\Phi(0)\neq 0$, 则 $\Phi(0)$ 是非零幂等元. 令 $Y_0=\text{rng}(\Phi(0))$, 则 $\dim(Y_0)=1$, 且 Y_0 有闭的补子空间 Y_1 使得 $Y=Y_1\dot{+}Y_0$. 现在 Φ 的可乘性蕴涵 Φ 具有形式 (2).

若 $\Phi(0)=0$, 我们证明此时 Φ 具有形式 (3).

断言 1 对任意 $T\in\mathcal{F}_1(X)$ 及 $\lambda\in\mathbb{F}$, 有 $\Phi(\lambda T)=\lambda\Phi(T)$ 成立; 或对任意 $T\in\mathcal{F}_1(X)$ 及 $\lambda\in\mathbb{F}$, 有 $\Phi(\lambda T)=\overline{\lambda}\Phi(T)$ 成立.

对任意一秩算子 A, 都存在一秩算子 R 使得 $A=ARA$. 由 Φ 的保一秩性得

$$\Phi(\lambda A)=\Phi(\lambda ARA)=\Phi(A)\Phi(\lambda R)\Phi(A),$$

于是存在数值函数 τ_A 使得

$$\Phi(\lambda A)=\tau_A(\lambda)\Phi(A).$$

下证 τ_A 与 A 无关. 事实上, 若 B 是一秩算子且 $BA\neq 0$, 令 τ_B 是与 B 对应的数值函数, 我们有

$$\tau_B(\lambda)\Phi(B)\Phi(A)=\Phi(\lambda BA)=\Phi(B\lambda A)=\tau_A(\lambda)\Phi(B)\Phi(A),$$

故, $\tau_A=\tau_B$. 若 C 是一秩算子且 $CA=0$, 则可找到一秩算子 B 使得 $CB\neq 0$ 且 $BA\neq 0$, 从而有 $\tau_A=\tau_C=\tau_B$. 故存在数值函数 τ 使得对任意一秩算子 T 及 $\lambda\in\mathbb{F}$, 有 $\Phi(\lambda T)=\tau(\lambda)\Phi(T)$. 于是

$$\tau(\lambda\mu)\Phi(A)=\Phi(\lambda\mu A)=\tau(\lambda)\tau(\mu)\Phi(A),$$

因而 τ 是可乘的. 下证 τ 也具有可加性.

由假设知 P_0 是 k- 秩 ($k \geq 2$) 幂等元且 $\mathrm{rank}(\Phi(P_0)) \leq k$, 故可设 $P_0 = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes f_i$, 其中, $\{x_i\}_{i=1}^{k} \subset X$, $\{f_i\}_{i=1}^{k} \subset X^*$ 且 $\langle x_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$ (Kronecker 符号). 那么

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \Phi(x_i \otimes f_i)\right) \Phi(P_0) = \sum_{i=1}^{k} \Phi(x_i \otimes f_i)$$

$$= \Phi(P_0) \left(\sum_{i=1}^{k} \Phi(x_i \otimes f_i)\right),$$

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{k}(x_i \otimes f_i)\right) = \Phi(P_0) \geq \sum_{i=1}^{k} \Phi(x_i \otimes f_i).$$

又 $\Phi(x_i \otimes f_i)\Phi(x_j \otimes f_j) = \Phi(x_j \otimes f_j)\Phi(x_i \otimes f_i) = 0$ $(i \neq j)$, 故

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{k}(x_i \otimes f_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} \Phi(x_i \otimes f_i) = \Phi(P_0).$$

对任意的 $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $n \leq k$, 我们有

$$\Phi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \otimes f_k\right)$$

$$= \Phi\left(\sum_{i=1}^{k}(x_i \otimes f_i)\right) \Phi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \otimes f_k\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \Phi(x_i \otimes f_i)\right) \Phi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \otimes f_k\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Phi(\lambda_i x_i \otimes f_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tau(\lambda_i) \Phi(x_i \otimes f_k),$$

$$
\begin{aligned}
&\tau\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\Phi(x_1\otimes f_k)\\
&=\Phi\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)x_1\otimes f_k\right)\\
&=\Phi\left(x_1\otimes\left(\sum_{i=1}^{n}f_i\right)\right)\Phi\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\otimes f_k\right)\\
&=\Phi\left(x_1\otimes\left(\sum_{i=1}^{n}f_i\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\tau(\lambda_i)\Phi(x_i\otimes f_k)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\tau(\lambda_i)\Phi(x_1\otimes f_k).
\end{aligned}
$$

于是对任意的 $\lambda_i\in\mathbb{F}$, $n\le k$, 有 $\tau\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\tau(\lambda_i)$, 即 τ 是可加的. 故 τ 是非零环同态. 若 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, 由 τ 的正性及有理数在实数集中的稠密性知 $\tau(\lambda)=\lambda$ $(\lambda\in\mathbb{R})$. 若 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, 我们断言 τ 要么是恒等映射, 要么是共轭映射. 为此只需证 τ 是连续的. 如若不然, 由泛函方程理论中的一个初等结果知, τ 在 0 点的任意邻域都是无界的, 因此存在 $\{\lambda_n\}\in\mathbb{C}$ 使得 $|\lambda_n|\le 2^{-n}$ 且 $|\tau(\lambda_n)|\to\infty$ $(n\to\infty)$. 因 $\dim X=\infty$, 故存在可分空间 $X_1\subset X$. 由 [174; 定理 1] 知, 存在序列 $\{z_n\}\subset X_1$, $\{g_n\}\subset X_1^*$ 使得

(i) $g_n(z_m)=\delta_{mn}$ (Kronecker 符号) $(n,m=1,2,\cdots)$;

(ii) $\sup_n\|z_n\|\|g_n\|\le b<+\infty$.

若 $X_1=X$, 则令 $f_n=g_n\in X^*$ $(n\in\mathbb{N})$. 若 $X_1\ne X$, 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $f_n.\in X^*$ 使得 $\|f_n\|=\|g_n\|$ 且 $f_n(x)=g_n(x)$ $(x\in X_1,n\in\mathbb{N})$. 令 $P_n=z_n\otimes f_n$, 则 $\{P_n\}$ 是相互正交的一秩幂等元序列. 令 $T=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_nP_n)$, 那么 $T\in\mathcal{B}(X)$. 因为

$$\|T\|\le\sum_{n=1}^{\infty}\|\lambda_nP_n\|\le b\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\le b<\infty,$$

所以 $\Phi(T) \in \mathcal{B}(Y)$. 但是对任意单位向量 $y \in \mathrm{rng}(\Phi(P_n))$, 由于 $\Phi(P_n)$ 是一秩幂等元，故有

$$\begin{aligned}\|\Phi(T)\| &\geq \|\Phi(T)y_n\| \\ &= \left\|\Phi\left(\sum \lambda_m P_m\right)\Phi(P_n)y_n\right\| \\ &= \|\Phi(\lambda_n P_n)y_n\| = |\tau(\lambda_n)| \to \infty,\end{aligned}$$

这是一个矛盾. 所以 τ 是连续的非零环同态.

不失一般性，可设 $\tau(\lambda) \equiv \lambda$. 对于 $\tau(\lambda) \equiv \overline{\lambda}$ 的情形，可类似地证明. 对任意 $x \in X, f \in X^*$, 定义 $L_x = \{x \otimes h \mid h \in X^*\}$, $R_f = \{u \otimes f \mid u \in X\}$.

断言 2 对任意 $x \in X$, $f \in X^*$, 存在 $y \in Y$, $g \in Y^*$ 使得 $\Phi(L_x) \subset L_y$, $\Phi(R_f) \subset R_g$.

任意固定 $x \in X$, 取 $f \in X^*$ 使得 $\langle x, f\rangle = 1$, 则存在 $y \in Y$, $g \in Y^*$, 使得 $\Phi(x \otimes f) = y \otimes g$. 对任意的 $x \otimes h \in L_x$, 令 $\Phi(x \otimes h) = v \otimes l$, 则有

$$v \otimes l = \Phi(x \otimes h) = \Phi(x \otimes f \cdot x \otimes h) = y \otimes g \cdot v \otimes l = \langle v, g\rangle y \otimes l.$$

故 $\Phi(x \otimes h) \in L_y$, 即 $\Phi(L_x) \subset L_y$. 同理可证 $\Phi(R_f) \subset R_g$.

断言 3 令 $Z_0 = \{g \mid 存在一秩算子 T 使得 \Phi(T) = y \otimes g\}$, 则对任意的非零向量 $y \in M$, 存在 $g \in Z_0$ 使得 $\langle y, g\rangle \neq 0$. 即 Z_0 决定 M.

令 $M_0 = \{y \in Y \mid 存在一秩算子 T 使得 y \in \mathrm{rng}(\Phi(T))\}$. 对任意的 $y \in M_0$, 存在 $x \in X$ 使得 $\Phi(L_x) \subset L_y$. 取 $f \in X^*$ 满足 $\langle x, f\rangle = 1$, 且令 $\Phi(x \otimes f) = y \otimes g$. 注意到 Φ 保幂等元，故 $\langle y, g\rangle = 1 \neq 0$.

由断言 1 易证 $\mathbb{F}M_0 = M_0$. 任取 $y_1, y_2 \in M_0$, 若 y_1, y_2 线性相关，则 $y_1 + y_2 \in M_0$, 进而存在 $g \in Z_0$ 使得 $\langle y_1 + y_2, g\rangle \neq 0$. 若 y_1, y_2 线性无关，则存在线性无关的 x_1, $x_2 \in X$ 使得 $\Phi(L_{x_i}) \subset L_{y_i}$ $(i = 1,2)$. 取 f_1, $f_2 \in X^*$ 使得 $\langle x_i, f_j\rangle = \delta_{ij}$ $(i,j = 1,2)$. 令

$\Phi(x_i\otimes f_i)=y_i\otimes g_i$, 则 $\langle y_i,g_j\rangle=\delta_{ij}\ (i,j=1,2)$ 且 $\langle y_1+y_2,g_1\rangle\neq 0$. 因此， $\mathrm{span}M_0$ 在相对拓扑 $\sigma(\mathrm{span}M_0,Z_0)$ 下是 Hausdorff 空间，进而 $\mathrm{span}M_0$ 在此拓扑下的完备化是包含 M 的 Hausdorff 空间，所以 Z_0 决定 M.

断言 4 Φ 限制在 R_f 上是可加的，进而当 $\tau(\lambda)\equiv\lambda$ 时是线性的.

设 $x_i\otimes f\in R_f\ (i=1,2)$. 由断言 2, 可令 $\Phi(x_i\otimes f)=y_i\otimes g$, $\Phi((x_1+x_2)\otimes f)=y_{12}\otimes g$. 因为

$$\begin{aligned}&\Phi(u\otimes h\cdot(x_1+x_2)\otimes f)=\langle x_1+x_2,h\rangle\Phi(u\otimes f)\\=&\Phi(u\otimes h\cdot x_1\otimes f)+\Phi(u\otimes h\cdot x_2\otimes f),\end{aligned}$$

有

$$v\otimes l\cdot y_{12}\otimes g=v\otimes l\cdot(y_1+y_2)\otimes g,$$

即

$$\langle y_{12},l\rangle v\otimes g=\langle y_1+y_2,l\rangle v\otimes g,$$

这里， $v\otimes l=\Phi(u\otimes h)$. 由 u 和 h 的任意性并应用断言 3, 立得 $y_{12}=y_1+y_2$. 所以，对任意的 x_1 和 x_2, 都有

$$\Phi((x_1+x_2)\otimes f)=\Phi(x_1\otimes f)+\Phi(x_2\otimes f),$$

故当 $\tau(\lambda)\equiv\lambda$ 时， Φ 限制在 R_f 上是线性的.

断言 5 $M\in\mathrm{Lat}\{\Phi(T)\mid T\in\mathcal{B}(X)\}$, 其中 $\mathrm{Lat}\mathcal{S}$ 是算子集 $\mathcal{S}$ 的不变子空间全体构成的集合.

断言 6 定义 $\Phi_1:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(M)$ 为 $\Phi_1(T)=\Phi(T)|_M$, 则当 $\tau(\lambda)\equiv\lambda$ 时， Φ_1 限制在 L_x 上是线性的.

类似于断言 4 的论证，只需证明 Φ 在 L_x 上的可加性. 设 $\Phi(L_x)\subseteq L_y$, 对于给定的 f_1, $f_2\in X^*$ 及任意一秩算子 $u\otimes g$, 可记 $\Phi(x\otimes f_i)=y\otimes g_i$, $\Phi(x\otimes(f_1+f_2))=y\otimes g_{12}$, $\Phi(u\otimes h)=v\otimes l$. 根据断言 1 得

$$\Phi(x\otimes(f_1+f_2)\cdot u\otimes h)=\Phi(x\otimes f_1\cdot u\otimes h)+\Phi(x\otimes f_2\cdot u\otimes h),$$

因此 $\langle v,g_{12}\rangle=\langle v,g_1+g_2\rangle$ 对任意的 $v\in M$ 都成立，而此蕴涵

$$g_{12}|_M=g_1|_M+g_2|_M,$$

故当 $\tau(\lambda)\equiv\lambda$ 时， Φ_1 在 L_x 上是线性的.

断言 7 存在可逆有界线性算子 $A:X\to M$ 使得对任意一秩算子 $x\otimes f$, 有 $\Phi_1(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$, 其中 $C=(A^*)^{-1}$.

对任意非零的 $x\in X$ 及 $f_1,f_2\in X^*$, Φ_1 是 R_{f_i} (或 $R_{f_1+f_2}$) 到某个 R_{g_i} (或 $R_{g_1+g_2}$) 中的线性映射，因而存在线性映射 $A_i:X\to M$ (或 $A_{12}:X\to M$) 使得 $\Phi_1(x\otimes f_i)=A_ix\otimes g_i$ (或 $\Phi_1(x\otimes(f_1+f_2))=A_{12}x\otimes(g_1+g_2)$), $i=1,2$. 不失一般性，可假设 f_1 与 f_2 线性无关. 因为 Φ_1 限制在 L_x 上是到某个 L_y 的线性单射，故 g_1 和 g_2 也线性无关. 于是由

$$A_{12}x\otimes(g_1+g_2)=\Phi_1(x\otimes(f_1+f_2))=A_1x\otimes g_1+A_2x\otimes g_2$$

得

$$A_{12}x=A_1x=A_2x.$$

故存在线性单射 $A:X\to M$ 使得 $\Phi_1(x\otimes f)=Ax\otimes g_f$.

类似可证存在线性单射 $C:M^*\to X^*$ 使得 $\Phi_1(x\otimes f)=Ax\otimes Cf$.

进而, 由于 $\langle Ax,Cf\rangle Au\otimes Ch=\Phi_1(u\otimes f\cdot x\otimes h)=\langle x,f\rangle Au\otimes Ch$, 易见对每个 $x\in X$ 及 $f\in X^*$, 都有

$$\langle Ax,Cf\rangle=\langle x,f\rangle. \tag{10.3.1}$$

设 $x_n\to x$, $Ax_n\to y$, 则有

$$\langle Ax_n,Cf\rangle\to\langle y,Cf\rangle,$$

$$\langle Ax_n,Cf\rangle=\langle x_n,f\rangle\to\langle x,f\rangle=\langle Ax,Cf\rangle.$$

所以，对所有的 $f\in X^*$, 都有

$$\langle Ax,Cf\rangle=\langle y,Cf\rangle.$$

又因 $Ax,y\in M$ 且由断言 3, $\mathrm{rng}(C)$ 张成的线性子空间在 M^* 中稠，故必有 $Ax=y$ 成立，所以 A 是闭的，从而有界. 又由 (10.3.1) 式， $A^*C=I$. 根据 M 和 A 的定义，知 A 已经是有界单射稠值域算子，故 A 可逆且 $C=A^{*-1}$.

断言 8 对任意 $T \in \mathcal{B}(X)$, 有 $\Phi_1(T) = ATA^{-1}$ 成立.

事实上, 对任何算子 T, 任何向量 x 及泛函 f, 有

$$\Phi_1(T)Ax \otimes Cf = \Phi_1(Tx \otimes f) = ATx \otimes Cf.$$

因而, $\Phi_1(T)A = AT$, 故 $\Phi_1(T) = ATA^{-1}$.

断言 9 Φ 具有形式 (3).

根据上述断言, 因为 M 是每个算子 $\Phi(T)$ 的不变子空间而且可补, 其补空间为 N. 关于空间分解 $Y = M \oplus N$, $\Phi(T)$ 可表示为 2×2 算子矩阵

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} \Phi_1(T) & \Phi_{12}(T) \\ 0 & \Phi_0(T) \end{pmatrix},$$

其中 $\Phi_1(T) \in \mathcal{B}(M)$, $\Phi_0(T) \in \mathcal{B}(N)$, $\Phi_{12}(T) \in \mathcal{B}(N, M)$. 显然 $\Phi_1(T) = ATA^{-1}$ 对任意 $T \in \mathcal{B}(X)$ 成立; $\Phi_0 : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(N)$ 是可乘的, 满足条件 $\Phi_0(\alpha I) = \alpha\Phi_0(I)$, 且把每个一秩算子映为 0; $\Phi_{12} : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(N, M)$ 满足条件

$$\Phi_{12}(\alpha T) = \alpha\Phi_{12}(T),$$

$$\Phi_{12}(TS) = ATA^{-1}\Phi_{12}(S) + \Phi_{12}(T)\Phi_0(S). \tag{10.3.2}$$

在 (10.3.2) 式中令 $T = I$ 并记 $A_0 = \Phi_{12}(I)$, 得

$$A_0\Phi_0(S) = 0 \qquad \forall S \in \mathcal{B}(X). \tag{10.3.3}$$

显然 (10.3.3) 式成立当且仅当 $A_0P_0 = 0$, 其中 $P_0 = \Phi_0(I)$ 是 $\mathcal{B}(N)$ 中的幂等算子. 在 (10.3.2) 式中令 $S = I$ 则得

$$\Phi_{12}(T) = ATA^{-1}A_0 + \Phi_{12}(T)P_0 \tag{10.3.4}$$

对所有的 $T \in \mathcal{B}(X)$. 证毕.

注 10.3.1 存在非平凡可乘映射 Φ 使得对任意 $T \in \mathcal{F}_1(X)$ 有 $\Phi(T) = 0$ 成立. 例如, 令 H 是 Hilbert 空间, $\mathcal{K}(H)$ 是 H 上的紧算子全体, $\pi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ 是典则映射. $\tau : \mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$

$\to \mathcal{B}(K)$ 是 C^*- 代数 $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}(H)$ 在 K 上的表示. 则易证 $\Phi = \tau \circ \pi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是把所有紧算子映为 0 的可乘映射.

对于 $T \in \mathcal{B}(X)$, 线性子空间 $N \subset X$, 令 $T|_N$ 表示 T 在 N 上的限制.

定理 10.3.2 设 $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 为可乘映射, M 的定义同定理 10.3.1. 则下列叙述等价:

(1) Φ 是保秩的.

(2) 存在一秩算子 T_0 使得 $\Phi(T_0) \neq 0$, 且 Φ 是秩不增的.

(3) 存在一秩算子 T_0 使得 $\Phi(T_0) \neq 0$, 且 Φ 保持幂等元的秩不增.

(4) 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A : X \to M$ 以及与 rng(Φ) 中元均交换, 值域为 M 的幂等算子 $Q \in \mathcal{B}(Y)$, 使得关于空间分解 $Y =$rng$(Q)\dot{+}$rng$(I - Q)$, 对每个 $T \in \mathcal{B}(X)$, 都有

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} ATA^{-1} & 0 \\ 0 & \Phi_2(T) \end{pmatrix},$$

其中 $\Phi_2(\cdot) = (I - Q)\Phi(\cdot)|_{\mathrm{rng}(I-Q)}$ 是把有限秩算子映为 0 的可乘映射.

证明 (4) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的, 我们只证明 (3) $\Rightarrow$ (4).

设 Φ 满足条件 (3). 下面分几步证之.

断言 1 Φ 保秩一性.

由条件 (3) 知存在一秩算子 T_0 使得 $\Phi(T_0) \neq 0$, 从定理 10.3.1 的证明过程知对任意一秩算子 S 有 $\Phi(S) \neq 0$. 又 Φ 保持幂等元的秩不增, 故 Φ 保一秩幂等元, 再由 Φ 的可乘性易得 Φ 是保一秩的.

断言 2 按照空间分解 $Y = M\dot{+}N$, 对任意 $T \in \mathcal{B}(X)$ 有

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} ATA^{-1} & \Phi_{12}(T) \\ 0 & \Phi_0(T) \end{pmatrix},$$

其中 $A:X\to M$ 为可逆有界线性或共轭线性算子，$\Phi_0:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(N)$ 为可乘映射且对任意 $T\in\mathcal{F}_1(X)$, 有 $\Phi_0(T)=0$, 映射 $\Phi_{12}:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(N,M)$ 使得 $\Phi_{12}(0)=0$ 且满足方程

$$\Phi_{12}(T)=ATA^{-1}A_0+\Phi_{12}(T)P_1 \qquad \forall T\in\mathcal{B}(X),$$

其中 $A_0=\Phi_{12}(I)$, $P_1=\Phi_0(I)$ 且 $A_0P_1=0$.

因 $\Phi(0)=0$, 再由定理 10.3.1 知此断言成立.

断言 3 Φ 是秩不增的.

对任意 $T\in\mathcal{F}(X)$, 存在幂等元 P 使得 $T=PT$ 且 $\mathrm{rng}(T)=\mathrm{rng}(P)$, 因此 $\Phi(T)=\Phi(P)\Phi(T)$, 由于 Φ 不增加幂等元的秩，我们有

$$\mathrm{rank}\Phi(T)\le\mathrm{rank}\Phi(P)\le\mathrm{rank}P=\mathrm{rank}T.$$

断言 4 对任意 $T\in\mathcal{F}(X)$ 有 $\Phi_0(T)=0$ 且 $\mathrm{rng}(\Phi_{12}(T))\subset\mathrm{rng}(ATA^{-1})$.

如若不然,则存在 $T\in\mathcal{F}(X)$ 使得 $\Phi_0(T)\ne 0$ 或 $\mathrm{rng}(\Phi_{12}(T))\not\subset\mathrm{rng}(ATA^{-1})$. 故

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} ATA^{-1} & \Phi_{12}(T)\\ 0 & \Phi_0(T)\end{pmatrix}>\mathrm{rank}T,$$

与断言 3 矛盾.

断言 5 存在幂等元 Q 使得 $\mathrm{rng}(Q)=M$ 且对任意 $T\in\mathcal{B}(X)$ 有 $Q\Phi(T)=\Phi(T)Q$.

记 $P\in\mathcal{B}(Y)$ 为从 Y 沿 N 到 M 上的投影, 令 $N_1=\ker(\Phi_0(I))$, $N_2=\mathrm{rng}(\Phi_0(I))$. 对任意 $T\in\mathcal{B}(X)$, 令 $\Phi_{12}^{(1)}(T)=P\Phi_{12}(T)|_{N_1}$, $\Phi_{12}^{(2)}(T)=P\Phi_{12}(T)|_{N_2}$. 由断言 2, 关于空间分解 $Y=M\dot{+}N_1\dot{+}N_2$, 我们有

$$\Phi(T)=\begin{pmatrix} ATA^{-1} & ATA^{-1}A_1 & \Phi_{12}^{(1)}(T)\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Phi_1(T)\end{pmatrix},$$

其中 $A_1=\Phi_{12}^{(2)}(I)$, $\Phi_{12}^{(2)}:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(N_2,M)$, 满足等式

$$\Phi_{12}^{(1)}(TS)=ATA^{-1}\Phi_{12}^{(1)}(S)+\Phi_{12}^{(1)}(T)\Phi_1(S)$$

且 $\Phi_1:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(N_2)$ 是可乘映射. 因 Φ 是秩不增的, 故对任意 $T\in\mathcal{F}(X)$, 我们有

$$\Phi(T)=\begin{pmatrix} ATA^{-1} & ATA^{-1}A_1 & ATA^{-1}A_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=CTD,$$

其中 $A_2=\Phi_{12}^{(1)}(I)$,

$$C=\begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{B}(X,Y),$$

$$D=\begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1}A_1 & A^{-1}A_2 \end{pmatrix}\in\mathcal{B}(Y,X).$$

容易证明 $DC=I$. 令 $Q=CD$, 则 $Q^2=CDCD=CD=Q$, 即 Q 是幂等元, 且 $\mathrm{rng}(Q)=\mathrm{rng}(C)=M$,

$$Q\Phi(T)=CDCTD=CTD=CTDCD=\Phi(T)Q \qquad \forall T\in\mathcal{F}(X).$$

因为 $\mathcal{F}(X)$ 在 $\mathcal{B}(X)$ 中是弱稠的, 故存在算子网 $\{T_\lambda\}\subset\mathcal{F}(X)$ 使得 $I=\text{w-lim}_\lambda T_\lambda$. 所以 $Q=CD=\text{w-lim}_\lambda CT_\lambda D$. 对任意 $T\in\mathcal{B}(X)$, 我们有

$$\begin{aligned}
Q\Phi(T)&=\text{w-}\lim_\lambda(CT_\lambda D\Phi(T))=\text{w-}\lim_\lambda\Phi(T_\lambda T)\\
&=\text{w-}\lim_\lambda CT_\lambda TD=CTD,\\
\Phi(T)Q&=\Phi(T)(\text{w-}\lim_\lambda(CT_\lambda D))=\text{w-}\lim_\lambda(\Phi(T)CT_\lambda D)\\
&=\text{w-}\lim_\lambda(\Phi(T)\Phi(T_\lambda))=\text{w-}\lim_\lambda\Phi(TT_\lambda)\\
&=\text{w-}\lim_\lambda CTT_\lambda D=CTD,
\end{aligned}$$

即 Q 与 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中元交换, 故 $\Phi(T)=Q\Phi(T)Q+(I-Q)\Phi(T)(I-Q)$, 从而 Φ 满足 (4). 证毕.

在定理 10.3.1 和 10.3.2 中，若去掉 M 有闭的补子空间的假设，则对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$, $\Phi(T)$ 的矩阵表示仍成立，但 M 的补子空间 N 可能不闭， $\Phi_{12}(T), \Phi_0(T), \Phi_2(T)$ 不可能总是有界线性算子， Q 可能也不是有界的. 进而我们有下述定理，这些定理在后几节中将多次用到. 对任意的线性空间 N, M, 用 $\mathcal{L}(N,M)$ (当 $M=N$ 时简记为 $\mathcal{L}(N)$) 表示从 N 到 M 所有线性变换的集合.

定理 10.3.1′ 设 $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(Y)$ 是可乘映射， M 是包含集合 $\{y\mid$ 存在一秩算子 T 使得 $y\in\mathrm{rng}(\Phi(T))\}$ 的最小闭子空间，N 是 M 的补子空间. 若 Φ 使得某个一秩算子秩不增且存在 k- 秩 $(k\geq 2)$ 幂等元 P_0 使得 $\mathrm{rank}(\Phi(P_0))\leq k$, 那么 Φ 具有下列形式之一：

(1) 对任意 $T\in\mathcal{F}_1(X)$, 有 $\Phi(T)=0$,

(2) 按照空间分解 $Y=Y_1\dot{+}Y_0$, 对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$, 有

$$\Phi(T)=\begin{pmatrix}\Phi_0(T) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

其中 $Y_0=\mathrm{rng}(\Phi(0))$ 且 $\dim(Y_0)=1$, $\Phi_0:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(Y_1)$ 是把秩不超过 1 的算子映为 0 的可乘映射.

(3) 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A:X\to M$, 可乘映射 $\Phi_0:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{L}(N)$, 并且存在映射 $\Phi_{12}:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{L}(N,M)$ 满足 $\Phi_{12}(T)=ATA^{-1}A_0+\Phi_{12}(T)P_1$ $(\forall T\in\mathcal{B}(X))$, 其中 $A_0=\Phi_{12}(I)$, $P_1=\Phi_0(I)$ 且 $A_0P_1=0$, 使得按照空间分解 $Y=M\dot{+}N$, 对任意 $T\in\mathcal{B}(X)$ 有

$$\Phi(T)=\begin{pmatrix}ATA^{-1} & \Phi_{12}(T)\\ 0 & \Phi_0(T)\end{pmatrix}.$$

定理 10.3.2′ 设 $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(Y)$ 是可乘映射， M 的定义如定理 10.3.1′ 所述，则下列叙述等价：

(1) Φ 保秩.

(2) 存在一秩算子 $T_0\in\mathcal{B}(X)$ 使得 $\Phi(T_0)\neq 0$ 且 Φ 是秩不增的.

(3) 存在一秩算子 $T_0 \in \mathcal{B}(X)$ 使得 $\Phi(T_0) \neq 0$ 且 Φ 保幂零元的秩不增.

(4) 存在值域为 M 且与 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中每个元都交换的幂等算子 $Q: Y \to Y$, 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A: X \to M$, 使得按照空间分解 $Y = \mathrm{rng}(Q) \dot{+} \mathrm{rng}(I-Q)$, 对任意 $T \in \mathcal{B}(X)$, 都有

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} ATA^{-1} & 0 \\ 0 & \Phi_2(T) \end{pmatrix},$$

其中 $\Phi_2(\cdot) = (I-Q)\Phi(\cdot)|_{\mathrm{rng}(I-Q)}$ 是把所有有限秩算子映为零的可乘映射.

推论 10.3.3 映射 $\Phi: \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 是弱连续且保一秩的环同态的充分必要条件是 Φ 是可乘的长度为一的初等算子 (或共轭初等算子), 即要么存在有界线性算子 $C: X \to Y$ 及 $D: Y \to X$ 满足 $DC = I$, 使得 $\Phi(T) = CTD$ 对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$ 成立; 要么存在有界共轭线性算子 $C: X \to Y$ 及 $D: Y \to X$ 满足 $DC = I$, 使得 $\Phi(T) = CTD$ 对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$ 成立.

注 10.3.2 令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是 Banach 空间 X 和 Y 上的标准算子代数, $\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为可乘映射, 则定理 10.3.1, 10.3.2, 10.3.1′, 10.3.2′ 均成立. 其中 X 上的标准算子代数 $\mathcal{A}$ 是包含 I 和 $\mathcal{F}(X)$ 的 $\mathcal{B}(X)$ 的闭子代数.

设 $T \in \mathcal{B}(X)$, 如果 $\dim(X/\mathrm{rng}(T)) = n < \infty$, 则称 T 具有余秩 n, 记为 $\mathrm{corank}(T) = n$. 应用定理 10.3.2, 下面给出保余秩可乘映射的刻画.

定理 10.3.4 设 H, K 为 Hilbert 空间, $\Phi: \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 是保算子余秩的可乘映射. 令 M 为定理 10.3.1 中所述的子空间. 如果存在有限秩算子 T_0 使得 $\Phi(T_0) \neq 0$, 则下列叙述之一成立:

(1) $K_0 = \mathrm{rng}(\Phi(0))$ 是 1 维的, 且存在 K_0 的补空间 K_1, 使得按照空间分解 $K = K_1 \dot{+} K_0$, 对每个 $T \in \mathcal{B}(H)$ 都有

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} \Phi_0(T) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\Phi_0:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K_1)$ 是把秩不大于 1 的算子映为 0 的保余秩可乘映射.

(2) 存在值域为 M 且与 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中每个元都交换的幂等算子 $Q:K\to K$, 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A:H\to M$, 使得按照空间分解 $K=\mathrm{rng}(Q)\dot{+}\mathrm{rng}(I-Q)$, 对任意 $T\in\mathcal{B}(X)$, 都有

$$\Phi(T)=\begin{pmatrix} ATA^{-1} & 0 \\ 0 & \Phi_2(T) \end{pmatrix},$$

其中 $\Phi_2(\cdot)=(I-Q)\Phi(\cdot)|_{\mathrm{rng}(I-Q)}$ 满足 $\Phi_2(I)=I-Q$, 是把所有有限秩算子映为零且把所有余有限秩算子映为满值域算子的可乘映射.

证明 首先证明 Φ 是保秩一的. 令

$$\mathcal{S}=\{m\in\mathbb{N}\mid \text{存在非零有限秩投影 } P \\ \text{使得 } \Phi(P)\neq 0 \text{ 且 } \mathrm{rank}(P)=m\}.$$

令 P_0 是与 T_0 有相同值域的投影, 那么 $T_0=P_0T_0$. 由假设 $\Phi(T_0)\neq 0$, 我们有 $\Phi(P_0)\neq 0$, 故 $\mathrm{rank}(P_0)\in\mathcal{S}$. 设 $\mathcal{S}$ 中的最小元为 n. 于是存在 n 秩投影 Q_0 使得 $\Phi(Q_0)\neq 0$. 令 P 是任意 n 秩投影, 则存在始投影为 Q_0, 终投影为 P 的部分等距 V 使得 $Q_0=V^*PV$. 由此可得 $\Phi(V^*)\Phi(P)\Phi(V)=\Phi(Q_0)\neq 0$, 因此 $\Phi(P)\neq 0$. 进而, 我们断言 $\Phi(P)$ 的秩为 1. 取 Q 为一秩投影使得 $(I-Q)P=P(I-Q)$ 是 $n-1$ 秩的, 则 $\Phi(I-Q)$ 和 $\Phi(P)$ 是正交的, 而且 $\Phi(P)\leq I-\Phi(I-Q)$. 由于 $\Phi(I-Q)$ 的余秩是 1, $0\neq\mathrm{rank}(\Phi(P))\leq\mathrm{rank}(I-\Phi(I-Q))=1$, 即 $\mathrm{rank}(\Phi(P))=1$. 下证 P 的秩也是 1. 用反证法. 假设 $\mathrm{rank}(P)=n>1$. 令 R 为 $n+1$ 秩的投影. 类似于上述讨论易知, $\Phi(R)$ 的秩最多为 2. 取 $n+1$ 个 n 秩投影 $P_1,P_2,\cdots,P_{n+1}\leq R$ 使得它们中任何两个的乘积都是 $n-1$ 秩的. 于是 $\{\Phi(P_1),\Phi(P_2),\cdots,\Phi(P_{n+1})\}$ 是秩一幂等算子的正交集, 并且 $\Phi(P_1)+\Phi(P_2)+\cdots+\Phi(P_{n+1})\leq\Phi(R)$. 所以 $1<n+1\leq 2$, 从而 $n=1$. 注意由 Φ 的可乘性, 我们有 $\mathrm{rank}(Q)=\mathrm{rank}(Q')$ 蕴涵 $\mathrm{rank}(\Phi(Q))=\mathrm{rank}(\Phi(Q'))$. 因此 Φ 是保秩一的.

情形 1 $\Phi(0) \neq 0$.

由定理 10.3.1 易知本定理的结论 (1) 成立.

情形 2 $\Phi(0) = 0$.

我们断言 Φ 保投影的秩. 对任意的 n 秩投影 P, 把 P 表示为 $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$, 其中 $\{P_i\}$ 是秩一投影的正交集. 容易验证 $\Phi(P_1) + \cdots + \Phi(P_n) \leq \Phi(P)$. 因为 $\Phi(P)\Phi(I-P) = \Phi(I-P)\Phi(P) = 0$, 故有 $\Phi(P) \leq I - \Phi(I-P)$. 又由于 Φ 是保余秩的, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\Phi(P)) &\leq \operatorname{rank}(I - \Phi(I-P)) \\ &\leq \operatorname{corank}(\Phi(I-P)) \\ &= \operatorname{corank}(I-P) \\ &= n.\end{aligned}$$

由此可知, $\Phi(P_1) + \cdots + \Phi(P_n) = \Phi(P)$, 从而 $\operatorname{rank}(\Phi(P)) = n$.

现在容易看出 Φ 是保秩的. 由定理 10.3.2, 存在可逆有界线性或有界共轭线性算子 $A: H \to M$, 存在与 $\operatorname{rng}(\Phi)$ 中每个算子都交换的幂等算子 $Q \in \mathcal{B}(K)$, 使得关于空间分解 $K = \operatorname{rng}(Q) + \operatorname{rng}(I-Q)$,

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} ATA^{-1} & 0 \\ 0 & \Phi_2(T) \end{pmatrix} \qquad \forall\, T \in \mathcal{B}(H),$$

其中 $\Phi_2(\cdot) = (I-Q)\Phi(\cdot)|_{\operatorname{rng}(I-Q)}$ 是把有限秩算子映为 0 的可乘映射. 因为 Φ 是保余秩的, Φ_2 显然把有限余秩算子映为 $\operatorname{rng}(I-Q)$ 上的满值域算子. 又因为 $\Phi(I)$ 是余秩为 0 的幂等算子, 故必有 $\Phi(I) = I$, 从而 $\Phi_2(I) = I - Q$. 证毕.

H 上算子 A 的余秩还可定义为 $\operatorname{corank}(A) = \dim(\operatorname{rng}(A))^{\perp}$. 按此定义的余秩, 定理 10.3.4 仍成立, 仅有的改动是 Φ_2 把有限余秩算子映为稠值域算子.

§10.4 $\mathcal{B}(X)$ 上可乘映射及同构的刻画

令 X 和 Y 是 Banach 空间, 且 $\dim X = \infty$. 本节我们应用

§10.3 节的结果进一步讨论 $\mathcal{B}(X)$ 上的乘法保持问题，同时给出一些从 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y)$ 上同构或共轭同构的刻画.

令 $\mathcal{F}_1(X)$ 为 X 上秩不大于 1 的算子全体构成的集合. 如果可乘映射 Φ 在 $\mathcal{S}\subset\mathcal{B}(X)$ 上满足条件 $T_1\neq T_2\Rightarrow\Phi(T_1)\neq\Phi(T_2)$，则称 Φ 是 $\mathcal{S}$ 上的可乘单射.

定理 10.4.1 设 $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(Y)$ 为可乘映射. 若 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 包含 Y 上所有的一秩幂等元且 Φ 在 $\mathcal{F}_1(X)\cup\{T\in\mathcal{B}(X)\mid\Phi(T)=0\}$ 上是单射，则 Φ 是从 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y)$ 上的同构或共轭同构，即存在有界线性或共轭线性算子 $A:X\to Y$ 使得对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$，有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$ 成立.

证明 我们分几步来证明.

断言 1 $\Phi(0)=0$.

由 Φ 的可乘性得 $\Phi(0)^2=\Phi(0)$ 且对任意的 $S\in\mathcal{B}(X)$，有 $\Phi(0)\Phi(S)=\Phi(S)\Phi(0)=\Phi(0)$. 因 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 包含 Y 上的所有一秩幂等元，故对 Y 上的任意一秩幂等元 T，有 $\Phi(0)\leq T$，进而 $\mathrm{rank}(\Phi(0))=0$ 或 1. 若 $\mathrm{rank}(\Phi(0))=1$，则存在 $y\in Y$, $g\in Y^*$ 使得 $\langle y,g\rangle=1$ 且 $\Phi(0)=y\otimes g$. 令 $T=u\otimes h$，其中 $u\in Y$, $h\in Y^*$ 且 $\langle y,h\rangle=0$，于是 $y\otimes g=\Phi(0)=T\Phi(0)=(u\otimes h)(y\otimes g)=0$，矛盾. 所以 $\mathrm{rank}(\Phi(0))=0$，即 $\Phi(0)=0$.

断言 2 Φ 是保一秩的.

注意到 $\mathrm{rng}\Phi$ 包含 Y 上的所有一秩幂等元，所以存在非零算子 T 使得 $\mathrm{rank}(\Phi(T))=1$. 由 Φ 的可乘性知 Φ 是秩一不增的，又因 Φ 在 $\mathcal{F}_1(X)$ 上是单射，故 Φ 保一秩.

断言 3 Φ 保幂等元的秩.

令 P 是 n 秩幂等元，则存在 n 个相互正交的一秩幂等元 P_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 使得 $P=P_1+P_2+\cdots+P_n$，由 Φ 的可乘性易验证 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Phi(P_i)\leq\Phi(P)$. 又 $\Phi(P_i)\Phi(P_j)=\Phi(P_j)\Phi(P_i)=\Phi(0)=0$ $(i\neq j)$. 由断言 2, 我们有 $n=\mathrm{rank}(\sum\limits_{i=1}^{n}\Phi(P_i))\leq\mathrm{rank}(\Phi(P))$. 若

$\text{rank}(\Phi(P)) > n$, 则存在 $n+1$ 个相互正交的幂等元 $e_i \otimes f_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 使得 $\Phi(P)(e_i \otimes f_i) = (e_i \otimes f_i)\Phi(P) \neq 0$. 因为 $e_i \otimes f_i \in \text{rng}(\Phi)$ $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 且 Φ 在 $\{T \in \mathcal{B}(X) \mid \Phi(T) = 0\}$ 上是单射, 故存在 Q_i 使得 $\Phi(Q_i) = e_i \otimes f_i$ 且 $Q_iQ_j = 0$ $(i \neq j)$. 对任意一秩算子 T, 我们有 $\Phi(PQ_iT) = \Phi(Q_iPT)$, 所以 $PQ_iT = Q_iPT$ $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$. 因此, $PQ_i = Q_iP \neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$. 然而这与 $\text{rank}(P) = n$ 矛盾. 所以 $\text{rank}(\Phi(P)) = n = \text{rank}(P)$.

断言 4 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A: X \to Y$ 使得 $\Phi(T) = ATA^{-1}$ 对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$ 成立.

设 $M \subset X$ 与定理 10.3.2′ 中的相同, 由断言 2 和 3, Φ 满足定理 10.3.2′ 中的条件 (3), 所以按照空间分解 $Y = M \dot{+} N$, 对任意 $T \in \mathcal{B}(X)$ 有

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} ATA^{-1} & 0 \\ 0 & \Phi_2(T) \end{pmatrix},$$

其中 $A: X \to M$ 是可逆有界线性或共轭线性算子. 事实上, $N = 0$. 否则, 存在线性泛函 $f \in M^{\perp}$ 及向量 $x \in N$ 使得 $\langle x, f \rangle = 1$. 而一秩幂等元 $x \otimes f$ 关于 $Y = M \dot{+} N$ 有矩阵表示

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \otimes f \end{pmatrix}.$$

另一方面, 因 $x \otimes f \in \text{rng}(\Phi)$, 故存在 $P \in \mathcal{B}(X)$ 使得

$$\Phi(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \otimes f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} APA^{-1} & 0 \\ 0 & \Phi_2(P) \end{pmatrix}.$$

注意到 $APA^{-1} \neq 0$, 所以 $N = 0$, 且 $\Phi(T) = ATA^{-1}$ 对所有的 $T \in \mathcal{B}(X)$ 成立. 证毕.

注 10.4.1 定理 10.4.1 中的条件 “ $\text{rng}(\Phi)$ 包含 Y 上所有一秩幂等元” 不能去掉. 例如, 令 H 是可分 Hilbert 空间, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的一组标准正交基. 在这组基下, H 上的有界线性算子可

表示成矩阵的形式. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & \cdots & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & \cdots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

定义 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ 使得对任意 $T \in \mathcal{B}(H)$ 有 $\Phi(T) = ATB$. 则易验证 Φ 是 $\mathcal{F}_1(H) \cup \{T \in \mathcal{B}(H) \mid \Phi(T) = 0\}$ 上的可乘单射且 $e_1 \otimes e_1 \notin \mathrm{rng}(\Phi)$. 但 $B \neq A^{-1}$. 然而, 在定理 10.4.1 中, 若 X 和 Y 均是 Hilbert 空间, 此条件可减弱为 " $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中包含 Y 上的所有一秩投影".

推论 10.4.2 设 $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 是可乘映射, 且 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 包含 Y 上所有的一秩幂等元, 则下列叙述等价:

(1) Φ 在 $\mathcal{F}_1(X) \cup \{T \in \mathcal{B}(X) \mid \Phi(T) = 0\}$ 上是单射.

(2) Φ 是保秩的.

(3) 存在一秩算子 $T_0 \in \mathcal{B}(X)$ 使得 $\Phi(T_0) \neq 0$ 且 Φ 是秩不增的.

(4) 存在一秩算子 $T_0 \in \mathcal{B}(X)$ 使得 $\Phi(T_0) \neq 0$ 且 Φ 保幂等元的秩不增.

(5) Φ 是从 $\mathcal{B}(X)$ 到 $\mathcal{B}(Y)$ 上的同构或共轭同构.

证明 利用定理 10.3.2′ 和 10.4.1 的证明及结果易得. 证毕.

引理 10.4.3 设 $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 是可乘映射. 若 Φ 使某个一秩算子的秩不增且存在 $T_0 \in \mathcal{F}_1(X)$ 使得当 $\Phi(\lambda T_0) = \Phi(T_0)$

时，有 $\lambda=1$, 则 Φ 在 $\mathcal{F}_1(X)\cup\{T\in\mathcal{B}(X)\mid\Phi(T)=0\}$ 上是单射.

证明 由假设易证 $\Phi(T_0)\neq 0$, 类似于定理 10.3.1 相应部分的证明可得 Φ 是保一秩的且存在 $\mathbb{C}$ 上的数值函数 τ 满足 $\tau(1)=1$, 使得 $\Phi(\lambda T)=\tau(\lambda)\Phi(T)$ 对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 及 $T\in\mathcal{F}_1(X)$ 成立. 下面证明 $\tau(\lambda)=1$ 蕴涵 $\lambda=1$. 否则，存在 $\alpha\neq 1$ 使得 $\tau(\alpha)=1$, 于是 $\Phi(\alpha T_0)=\tau(\alpha)\Phi(T_0)=\Phi(T_0)$, 与假设矛盾. 进而可证得 $\Phi(0)=0$. 事实上, 如若不然, 则对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 有 $\tau(\lambda)\Phi(0)=\Phi(\lambda\cdot 0)=\Phi(0)$, 故 $\tau(\lambda)\equiv 1$, 与假设 $\Phi(\lambda T_0)=\Phi(T_0)$ 推出 $\lambda=1$ 矛盾.

我们断言 $\{T\in\mathcal{B}(X)\mid\Phi(T)=0\}\subset\{0\}$. 事实上，若 $T\neq 0$, 则存在 $x\in X$ 使得 $\|Tx\|\neq 0$. 对任意的非零泛函 $f\in X^*$ 有 $\Phi(Tx\otimes f)\neq 0$, 即 $\Phi(T)\neq 0$, $T\notin\{T\in\mathcal{B}(X)\mid\Phi(T)=0\}$. 由此, Φ 在 $\{T\in\mathcal{B}(X)\mid\Phi(T)=0\}$ 上是单射.

下证 Φ 在 $\mathcal{F}_1(X)$ 上是单射.

否则, 假设存在两个互不相同的一秩算子 T 和 S 使得 $\Phi(T)=\Phi(S)$, 我们考虑下面的三种情形.

情形 1 T 与 S 线性相关.

存在满足 $\lambda\neq 1$ 的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 使得 $T=\lambda S$. 因此,

$$\Phi(S)=\Phi(T)=\Phi(\lambda S)=\tau(\lambda)\Phi(S).$$

从而 $\tau(\lambda)=1$, 故 $\lambda=1$, 矛盾.

情形 2 T 与 S 线性无关，但对任意的 $x\in X$ 有 Tx 与 Sx 线性相关.

由引理 2.1.3, 存在 $y\in X$ 及线性无关的 $g_1, g_2\in X^*$ 使得 $T=y\otimes g_1$, $S=y\otimes g_2$. 取 $x\in X$ 使得 $\langle x,g_1\rangle=1$, $\langle x,g_2\rangle=0$. 于是对任意的 $f\in X^*$, 有

$$\Phi(Tx\otimes f)=\Phi(y\otimes g_1\cdot x\otimes f)=\Phi(y\otimes f)\neq 0,$$

$$\Phi(Sx\otimes f)=\Phi(y\otimes g_2\cdot x\otimes f)=\Phi(0\cdot y\otimes f)=0.$$

这与下式矛盾,

$$\Phi(Tx\otimes f)=\Phi(T)\Phi(x\otimes f)=\Phi(S)\Phi(x\otimes f)=\Phi(Sx\otimes f).$$

情形 3 T 与 S 线性无关，且存在 $x\in X$ 使得 Tx 与 Sx 线性无关.

这种情形下，存在 $f\in X^*$ 使得 $\langle Tx,f\rangle=0$ 而 $\langle Sx,f\rangle=1$. 则

$$\Phi(Tx\otimes f\cdot Sx\otimes f)=\Phi(Tx\otimes f)\neq 0,$$

$$\Phi(Sx\otimes f\cdot Tx\otimes f)=\Phi(0\cdot Sx\otimes f)=0.$$

但

$$\Phi(Tx\otimes f)=\Phi(T)\Phi(x\otimes f)=\Phi(S)\Phi(x\otimes f)=\Phi(Sx\otimes f),$$

矛盾. 故假设不成立. 即 Φ 在 $\mathcal{F}_1(X)$ 上是单射. 证毕.

推论 10.4.4 设 $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(Y)$ 是可乘映射，且 $\operatorname{rng}(\Phi)$ 包含 Y 上的所有一秩幂等元. 若存在 $T_0\in\mathcal{F}_1(X)$ 满足 $\Phi(\lambda T_0)=\Phi(T_0)$ 蕴涵 $\lambda=1$, 则存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A:X\to Y$ 使得 $\Phi(T)=ATA^{-1}$ 对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$ 成立.

证明 由假设条件所有一秩幂等元包含于 $\operatorname{rng}(\Phi)$ 知 $\Phi(\mathbb{C}I)\subset\mathbb{C}I$ 且 $\Phi(I)\neq 0$. 故有 $\mathbb{C}$ 上的数值函数 τ 使得 $\Phi(\lambda I)=\tau(\lambda)I$ 对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 成立. 由 Φ 的可乘性，易得 $\Phi(I)=I$. 进而对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 及 $T\in\mathcal{B}(X)$, 有 $\Phi(\lambda T)=\tau(\lambda)\Phi(T)$. 现在应用引理 10.4.3 及定理 10.4.1 可完成证明. 证毕.

推论 10.4.5 设 $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(Y)$ 是可乘映射. 若对任意一秩幂等元 Q, 其原象 $\Phi^{-1}(Q)$ 存在且仍为一秩算子，则存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A:X\to Y$ 使得 $\Phi(T)=ATA^{-1}$ 对所有的 $T\in\mathcal{B}(X)$ 成立.

证明 由假设知存在一秩算子 T_0 使得 $1=\operatorname{rank}(\Phi(T_0))$. 所以 Φ 是保一秩的. 故存在 $\mathbb{C}$ 上的数值函数 τ 使得 $\tau(1)=1$ 且 $\Phi(\lambda T)=\tau(\lambda)\Phi(T)$ 对所有的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 及 $T\in\mathcal{F}_1(X)$ 成立. 若 $\Phi(0)\neq 0$, 则 $\Phi(0)$ 是一秩幂等元，由假设 $\Phi(0)$ 的原象为一秩算子，这与 $\operatorname{rank}(0)=0$ 矛盾. 若 $T\neq 0$, 则存在 $x\in X$ 使得 $Tx\neq 0$, 所以对任意非零元 $f\in X^*$ 有 $\Phi(Tx\otimes f)$ 是一秩的，于是 $\Phi(T)\neq 0$, 即 $\Phi(T)=0$ 当且

仅当 $T=0$. 设存在满足 $\alpha\neq 1$ 的 $\alpha\in\mathbb{C}$ 使得 $\tau(\alpha)=1$. 取 $x\in X$, $f\in X^*$ 满足 $\langle x,f\rangle=1$, 则 $\Phi(\alpha x\otimes f)=\Phi(x\otimes f)$ 是一秩幂等元, 但 $\alpha x\otimes f\neq x\otimes f$, 与假设矛盾. 所以 $\tau(\lambda)=1$ 当且仅当 $\lambda=1$. 类似于引理 10.4.3, 可证 Φ 在 $\mathcal{F}_1(X)\cup\{T\in\mathcal{B}(X)\mid\Phi(T)=0\}$ 上是单射, 再由定理 10.4.1, 该推论得证. 证毕.

下面我们讨论保谱可乘映射, 为此要求 Banach 空间是复的. 对任意 $\mathcal{S}\subset\mathcal{B}(X)$, 令 Lat$\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{S}$ 中算子的公共不变子空间全体组成的集合, 且 Y_F 为 Y 的有限维子空间全体组成的集合.

定理 10.4.6 设 $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(Y)$ 为可乘映射, rng(Φ) 包含两个不同的一秩算子且 Lat(rng(Φ)) $\subset Y_F\cup Y$, 则下列叙述等价:

(1) Φ 保谱.

(2) Φ 保点谱.

(3) Φ 保一秩算子的谱.

(4) 存在可逆有界线性算子 $A:X\to Y$ 使得 $\Phi(T)=ATA^{-1}$ 对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$ 成立.

证明 我们只证明 (3)⇒(4).

令 R,W 是 Y 上的两个不同的一秩算子且 $R,W\in$rng(Φ), 则存在 $S\neq 0$ 使得 $\Phi(S)=R$ 或 W. 不妨设 $\Phi(S)=R$. 注意到 Φ 的可乘性及 Φ 保一秩算子的谱, 易证 Φ 是保一秩的. 事实上, 还有 $\Phi(0)=0$, 否则对任意一秩算子 T 有 $\Phi(T)=\Phi(0)$, 这与假设 rng(Φ) 包含两个不同的一秩算子矛盾.

假定存在 $c\in\mathbb{C}$ 及 $y\in Y$ 使得 $\Phi(cI)y$ 与 y 线性无关, 与定理 10.3.1 证明中的断言 3 一样, 我们可分别定义 M, M_0, Z_0. 显然 $M\in$Lat(rng(Φ)). 令 $\{x_i\}\subset X$ 是一列线性无关的向量, 则存在 $\{y_i\}\subset Y$ 使得 $\Phi(L_{x_i})\subset L_{y_i}$ $(i=1,2,\cdots)$. 因此 $\{y_i\}\subset M$ 且线性无关, 故 $\dim(M)=\infty$, 所以 $M=Y$ 且 $y\in M$. 从而存在非零向量列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M_0$ 使得 $\|y_n-y\|\to 0$ $(n\to\infty)$. 若对任意的自然数 n 存在 $\{\lambda_n\}$ 使得 $\Phi(cI)y_n=\lambda_n y_n$, 则存在 $\{\lambda_n\}$ 的收敛子列 $\{\lambda_{n_k}\}$ 使得 $\lambda_{n_k}\to\lambda_0\neq 0$. 进而有 $\Phi(cI)y=\lim_{n_k\to\infty}\lambda_{n_k}y_{n_k}=\lambda_0 y$, 矛盾. 故可取 $y\in M_0$ 使得 $\Phi(cI)y$ 与 y 线性无关, 由定理 10.3.1 证

明知存在 $g \in Z_0$ 使得 $\langle y,g\rangle = 0$, $\langle \Phi(cI)y,g\rangle = k \neq 0$ 且存在一秩算子 T 使得 $\Phi(T) = y \otimes g$. 所以 $\frac{1}{k}\Phi(cI)y \otimes g = \frac{1}{k}\Phi(cT)$. 于是

$$\{0,1\} = \sigma\left(\frac{1}{k}\Phi(cI)\right) = \frac{c}{k}\sigma(\Phi(T)) = \{0\}.$$

这个矛盾说明存在 $\mathbb{C}$ 上的数值函数 τ 使得 $\Phi(\lambda I) = \tau(\lambda)I$ 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 成立. 令 P 是任意一秩幂等元, 由

$$\{\lambda, 0\} = \sigma(\lambda P) = \sigma(\Phi(\lambda P)) = \tau(\lambda)\sigma(\Phi(P)) = \{\tau(\lambda), 0\}$$

可得对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tau(\lambda) = \lambda$. 再由定理 10.3.1, 此定理得证. 证毕.

定理 10.4.7 设 $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 为可乘映射, M 如定理 10.3.2′ 中所定义, 则 Φ 保有限秩算子的特征值及其重复度的充分必要条件是存在与 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中每个元都交换的值域为 M 的幂等算子 P, 使得关于分解 $Y = \mathrm{rng}(P) \dot{+} \mathrm{rng}(I-P)$, 对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$ 都有

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} ATA^{-1} & 0 \\ 0 & \Phi_2(T) \end{pmatrix},$$

其中 $A : X \to M$ 为可逆有界线性或共轭线性算子, Φ_2 是将有限秩算子映为 0 的可乘映射且对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$, $\Phi_2(T) = (I-P)\Phi(T)|_{\mathrm{rng}(I-P)}$.

证明 我们只需证明必要性. 若 $\Phi(0) \neq 0$, 则 1 是 $\Phi(0)$ 的特征值, 这与 0 无非零特征值矛盾. 取 $x \in X, f \in X^*$ 使得 $\langle x,f\rangle \neq 0$. 令 Q 为任意 n 秩幂等元, 则 $\Phi(Q)$ 是幂等元. 由假设得 $\mathrm{rank}(\Phi(Q)) = n$. 最后利用定理 10.3.2′, 完成该定理的证明. 证毕.

定理 10.4.8 设 $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ 为可乘映射, 则下列叙述等价:

(1) Φ 保谱半径, 存在一秩算子 T_0 使得 Φ 在 $\mathbb{C}T_0$ 上可加, $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中至少包含两个不同的一秩算子且 $\mathrm{Lat}(\mathrm{rng}(\Phi)) \subset Y_F \cup \{Y\}$.

(2) Φ 保一秩算子的谱半径，存在一秩算子 T_0 使得 Φ 在 $\mathbb{C}T_0$ 上可加，$\mathrm{rng}(\Phi)$ 中至少包含两个不同的一秩算子且 $\mathrm{Lat}(\mathrm{rng}(\Phi)) \subset Y_F \cup \{Y\}$.

(3) Φ 保谱半径，存在秩不小于 2 的幂等元 P_0 使得 $\mathrm{rank}(\Phi(P_0)) \leq \mathrm{rank}(P_0)$, $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中至少包含两个不同的一秩算子且 $\mathrm{Lat}(\mathrm{rng}(\Phi)) \subset Y_F \cup \{Y\}$.

(4) Φ 保一秩算子的谱半径，存在秩不小于 2 的幂等元 P_0 使得 $\mathrm{rank}(\Phi(P_0)) \leq \mathrm{rank}(P_0)$, $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中至少包含两个不同的一秩算子且 $\mathrm{Lat}(\mathrm{rng}(\Phi)) \subset Y_F \cup \{Y\}$.

(5) Φ 保谱半径，Φ 在 $\mathbb{T}I$ 上是单射并且 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中包含 Y 上所有一秩幂等元，其中 $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

(6) 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A: X \to Y$ 使得 $\Phi(T) = ATA^{-1}$ 对所有的 $T \in \mathcal{B}(X)$ 成立.

证明 我们只需证明 (2) $\Rightarrow$ (6), (4) $\Rightarrow$ (6) 及 (5) $\Rightarrow$ (6).

(2) $\Rightarrow$ (6). 类似于定理 10.4.6 我们可证明 Φ 是保一秩的，所以由定理 10.3.1 的证明知，存在 $\mathbb{C}$ 上的数值函数 τ 使得 $\Phi(\lambda T) = \tau(\lambda)\Phi(T)$ 对所有的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 及 $T \in \mathcal{F}_1(X)$ 成立. 易证 τ 是可乘的. 因 Φ 保一秩算子的谱半径，则对于 $\lambda \in \mathbb{C}$, 有 $|\tau(\lambda)| = |\lambda|$. 由假设存在 $T_0 \in \mathcal{F}_1(X)$ 使得 Φ 在 $\mathbb{C}T_0$ 上是可加的，于是对任意 λ, $\mu \in \mathbb{C}$ 有

$$\begin{aligned}\tau(\lambda+\mu)\Phi(T_0) &= \Phi((\lambda+\mu)T_0) = \Phi(\lambda T_0) + \Phi(\mu T_0)\\ &= (\tau(\lambda)+\tau(\mu))\Phi(T_0),\end{aligned}$$

故 τ 是 $\mathbb{C}$ 上的连续环同态. 进而 τ 是 $\mathbb{C}$ 上的恒等映射或共轭映射. 下证 $\Phi(0) = 0$. 否则，对任意的一秩算子 T 有 $\Phi(T) = \Phi(0)$, 这与 Φ 保一秩算子的谱半径矛盾. 又 $M \subset \mathrm{Lat}(\mathrm{rng}(\Phi))$ 且 $\dim M = \infty$, 所以 $M = Y$. 由定理 10.3.1$'$, (6) 成立.

(4) $\Rightarrow$ (6). 类似于上述证明我们有 Φ 保一秩，$\Phi(0) = 0$ 且 $M = Y$. 由假设，并利用定理 10.3.1, (6) 成立.

(5) $\Rightarrow$ (6). 若 $\Phi(0)\neq 0$, 则 $\Phi(0)$ 是非零幂等元. 由 Φ 保谱半径得 $1=r(\Phi(0))=r(0)=0$, 矛盾. 所以 $\Phi(0)=0$. 若 $T\neq 0$, 则存在 $x\in X, f\in X^*$ 使得 $\langle Tx,f\rangle=1$. 因

$$1=r(Tx\otimes f)=r(\Phi(Tx\otimes f))=r(\Phi(T)\Phi(x\otimes f)),$$

故 $\Phi(T)\neq 0$, 从而证得 $\Phi(T)=0$ 当且仅当 $T=0$. 对任意的数 λ, 因 $\Phi(\lambda I)$ 与 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中的元交换且 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中包含 Y 上所有一秩幂等元, 故 $\Phi(\mathbb{C}I)\subset\mathbb{C}I$. 特别地, 由 Φ 的可乘性知 $\Phi(I)=I$. 于是存在 $\mathbb{C}$ 上的数值函数 τ 使得 $\Phi(\lambda I)=\tau(\lambda)I$ 对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 成立. 显然, τ 是可乘的, $\tau(1)=1, \tau(0)=0$ 且 $|\tau(\lambda)|=|\lambda|$. 因 Φ 限制在 $\mathbb{T}I$ 上是单射, 其中 $\mathbb{T}$ 代表单位圆周, 类似于引理 10.4.3 可证 Φ 在 $\mathcal{F}_1(X)$ 上是单射. 利用定理 10.4.1, 本定理得证. 证毕.

令 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 到其自身的映射. 若对任意的 $A\in\mathcal{B}(X)$, 存在一列与 A 有关的自同构 $\{\Phi_n\}$ 使得算子列 $\{\Phi_n(A)\}$ 依范数收敛于 $\Phi(A)$, 则称 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 到其自身的局部逼近自同构映射. 若对任意的 $A\in\mathcal{B}(X)$, 存在与 A 有关的自同构 Φ_A 使得 $\Phi(A)=\Phi_A(A)$, 则称 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 到其自身的局部自同构映射.

定理 10.4.9 设 $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(X)$ 为可乘映射且 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中包含 Y 上的所有一秩算子, 则 Φ 是局部逼近自同构的充要条件是 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的自同构.

证明 设 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 到其自身的局部逼近自同构可乘映射. 任取有限秩幂等元 P, 令 $\mathrm{rank}(P)=n$. 则 $\Phi(P)$ 是 n 秩幂等元的范数极限. 下证 $\mathrm{rank}(\Phi(P))\leq n$.

事实上, 存在充分大的 m 使得 $\|\Phi(P)-\Phi_m(P)\|<1/2$. 因对任意的单位向量 $x\in\mathrm{rng}(\Phi(P))$ 有

$$|1-\|\Phi_m(P)x\||\leq\|\Phi(P)x-\Phi_m(P)x\|\leq\|\Phi(P)-\Phi_m(P)\|<1/2.$$

故 $\Phi_m(P)x\neq 0$. 所以 $\Phi_m(P)$ 限制到 $\mathrm{rng}(\Phi(P))$ 上是单射. 于是,

$$\dim\mathrm{rng}(\Phi(P))\leq\dim\mathrm{rng}(\Phi_m(P))=n.$$

即 Φ 保持幂等元的秩不增. 注意到对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 及 $T \in \mathcal{B}(X)$ 有 $\Phi(\lambda T) = \lambda\Phi(T)$. 故由定理 10.3.2′ 和 10.4.1 知，本定理为真. 证毕.

推论 10.4.10 设 $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ 为可乘映射且 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中包含 Y 上的所有一秩算子. 则 Φ 是局部自同构的充要条件是 Φ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上的自同构.

注 10.4.2 令 $\mathcal{A}$ 为 Banach 空间上的标准算子代数，$\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 为可乘映射，则上述结论同样成立.

§10.5 $\mathcal{B}(H)$ 上可乘映射及 *- 同构的刻画

在本节中, 除非特殊说明, 总假定 H 和 K 是复 Hilbert 空间. H 上的自伴幂等元称为投影. 若可乘映射 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 为线性 (或共轭线性) 双射且对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 有 $\Phi(T^*) = \Phi(T)^*$, 则称 Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 上的 *- 同构 (或共轭 *- 同构). 众所周知, Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 上的 *- 同构 (或共轭 *- 同构) 的充分必要条件是存在酉算子 (或共轭酉算子) $U : H \to K$ 使得 $\Phi(T) = UTU^*$ 对所有的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 成立.

定理 10.5.1 设 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 为可乘映射. 若 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中包含 K 上所有的一秩投影，则下列叙述等价:

(1) 对任意的 $A, B \in \mathcal{B}(H)$, $A^*B = 0 \Leftrightarrow \Phi(A)^*\Phi(B) = 0$.

(2) 存在酉算子或共轭酉算子 $U \in \mathcal{B}(H,K)$ 使得 $\Phi(T) = UTU^*$ 对所有的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 成立.

证明 显然只需证明 (1) $\Rightarrow$ (2).

断言 1 对任意投影 P, $\Phi(I-P) = I - \Phi(P)$.

类似于定理 10.4.1 可证 $\Phi(0) = 0$. 若 P 是投影，则

$$\Phi(P)\Phi(I-P) = \Phi(P(I-P)) = \Phi(I-P)\Phi(P) = 0.$$

因此，$\Phi(I-P) \le I - \Phi(P)$. 下证 $\Phi(I-P) + \Phi(P) = I$.

若 $\Phi(I-P) + \Phi(P) < I$, 则存在一秩投影 $Q_1 \in \mathcal{B}(K)$ 使得 $Q_1(\Phi(P) + \Phi(I-P)) = 0$. 因为 $Q_1 \in \mathrm{rng}(\Phi)$, 存在 $R \in \mathcal{B}(H)$ 使得

$\Phi(R) = Q_1$. 由

$$\Phi(R)^*\Phi(P) = 0 = \Phi(R)^*\Phi(I-P)$$

得 $R^*P = R^*(I-P) = 0$. 于是 $R^* = R = 0$, 与 R 的取法矛盾.

断言 2 $\Phi(P)$ 是投影当且仅当 P 是投影.

若 P 是投影, 则 $P^*(I-P) = 0$. 于是 $\Phi(P)^*\Phi(I-P) = \Phi(P)^*(I-\Phi(P))$, 从而 $\Phi(P)^* = \Phi(P)^*\Phi(P)$, 即 $\Phi(P)$ 是投影.

同理可证, 若 $\Phi(P)$ 是投影, 则 P 亦然.

断言 3 $\Phi(P)$ 是一秩投影当且仅当 P 是一秩投影.

先证 P 是一秩投影蕴涵 $\Phi(P)$ 是一秩的. 如若不然, 则存在一秩投影 $P_0 \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $\mathrm{rank}(\Phi(P_0)) \neq 1$. 于是 $\mathrm{rank}(\Phi(P_0)) = 0$ 或 $\mathrm{rank}(\Phi(P_0)) \geq 2$.

若 $\mathrm{rank}(\Phi(P_0)) = 0$, 则 $\Phi(P_0) = 0$ 且 $\Phi(P_0)^*\Phi(P_0) = 0$. 由条件 (1) 知, $P_0 = P_0^*P_0 = 0$, 与假设矛盾.

若 $\mathrm{rank}(\Phi(P_0)) \geq 2$, 则存在两个就范正交向量 $e_1, e_2 \in K$ 使得 $\mathrm{span}\{e_1, e_2\} \subset \mathrm{rng}(\Phi(P_0))$. 因 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 包含 K 上所有的一秩投影, 故存在投影 P_1, P_2 使得 $\Phi(P_i) = e_i \otimes e_i$ $(i = 1, 2)$ 且 $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$. 注意到 $\Phi(P_0)(e_i \otimes e_i) = (e_i \otimes e_i)\Phi(P_0) = e_i \otimes e_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$, 因此 $P_0P_i = P_iP_0 \neq 0$ $(i = 1, 2)$, 与假设 $\mathrm{rank}(P_0) = 1$ 矛盾.

类似可证 $\Phi(P)$ 为一秩投影蕴涵 P 为一秩投影.

断言 4 Φ 是秩不增的.

假设存在 n 秩投影 Q 使得 $\mathrm{rank}(\Phi(Q)) = m > n$. 则存在 m 个就范正交向量 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 使得 $\mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_m\} = \mathrm{rng}(\Phi(Q))$. 由断言 3, 存在一秩投影 Q_i 使得 $\Phi(Q_i) = e_i \otimes e_i, (i = 1, 2, \cdots, m)$, 显然, $Q_iQ_j = 0$ $(i \neq j)$. 我们也有 $\Phi(Q_i)\Phi(Q) = \Phi(Q)\Phi(Q_i) = e_i \otimes e_i \neq 0$, 即 $\Phi(Q_i)\Phi(Q)$ 是非零投影. 由断言 2, Q_iQ 也是非零投影. 这与 $\mathrm{rank}(Q) = n$ 矛盾. 因此, 对任意投影 P 有 $\mathrm{rank}(\Phi(P)) \leq \mathrm{rank}(P)$. 故 Φ 保持投影的秩不增.

对任意有限秩算子 E, 令 P 是 E 的值域投影, 则 $PE = E$, 从而 $\text{rank}\Phi(E) = \text{rank}\Phi(P)\Phi(E) \le \text{rank}\Phi(P) \le \text{rank}P = \text{rank}E$.

断言 5 存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A: H \to K$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 有 $\Phi(T) = ATA^{-1}$.

令 $M \subset K$ 定义同定理 10.3.1. 因 $\text{rng}(\Phi)$ 中包含 K 上所有的一秩投影, 由断言 3 有 $M = K$. 所以 Φ 满足定理 10.3.3 的条件 (2), 故此断言成立.

断言 6 存在酉算子或共轭酉算子 $U: H \to K$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 有 $\Phi(T) = UTU^*$.

只需证明对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T^*) = \Phi(T)^*$. 注意到 Φ 是线性的或共轭线性的, 故只需对自伴算子 T 证明上式成立即可.

令 T 是 H 上的自伴算子. 则 T 是 H 上正交投影实线性组合的极限, 即

$$T = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_{n_k} P_{n_k}.$$

所以 $\Phi(T) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k \Phi(P_{n_k})$ 是 K 上的自伴算子. 再由断言 5 知, Φ 是 $\mathcal{B}(H)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 上的 *- 同构或共轭 *- 同构. 证毕.

定理 10.5.2 设 $\Phi: \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 为保自伴的可乘映射. 若 $\text{rng}(\Phi)$ 中至少包含 K 上的两个一秩投影, 且 $\text{Lat}(\text{rng}(\Phi)) \subset K_F \cup K$, 则下列叙述等价:

(1) Φ 是保谱的.

(2) Φ 是保点谱的.

(3) Φ 保一秩算子的谱.

(4) 存在酉算子 $U: H \to K$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T) = UTU^*$.

证明 由定理 10.4.6 易得. 证毕.

类似地, 我们可以通过讨论保谱半径的可乘映射来刻画 $\mathcal{B}(H)$ 到 $\mathcal{B}(K)$ 上的 *- 同构或共轭 *- 同构.

下面讨论保数值域和数值半径的可乘映射.

定理 10.5.3 设 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 为可乘映射. 则下列叙述等价:

(1) Φ 保数值域且 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中包含 K 上所有的一秩投影.

(2) Φ 保数值域, $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中至少包含 K 上的两个不同的一秩投影, 且 $\mathrm{Lat}(\mathrm{rng}(\Phi)) \subset K_F \cup \{K\}$.

(3) Φ 保一秩算子的数值域, $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中至少包含 K 上的两个不同的一秩投影, 且 $\mathrm{Lat}(\mathrm{rng}(\Phi)) \subset K_F \cup \{K\}$.

(4) 存在酉算子 $U : H \to K$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(T) = UTU^*$.

证明 显然, 我们只需要证明 (1) $\Rightarrow$ (4) 和 (3) $\Rightarrow$ (4).

(1) $\Rightarrow$ (4). 由于 Φ 保数值域, 易证 $\Phi(0) = 0$. 若 $T \neq 0$, 则存在 $x \in H$ 使得 $\|Tx\| = 1$. 于是

$$W(\Phi(T)\Phi(x \otimes x)\Phi(T^*)) = W(\Phi(Tx \otimes Tx)) = W(Tx \otimes Tx) = [0, 1].$$

故若 $T \neq 0$, 则 $\Phi(T) \neq 0$. 注意到,

$$\{\lambda\} = W(\lambda I) = W(\Phi(\lambda I)).$$

所以, $\Phi(\lambda I) = \lambda I$. 从而对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 及 $T \in \mathcal{B}(H)$, 有 $\Phi(\lambda T) = \lambda \Phi(T)$. 类似于引理 10.4.3, 可证 Φ 在 $\mathcal{F}_1(X)$ 上是单射. 利用定理 10.4.1, 存在可逆有界算子 $A \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $\Phi(T) = ATA^{-1}$. 下证, 存在酉算子 $U \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $\Phi(T) = UTU^*$.

事实上, 对任意的 $x \in H$, 必有 $A^{-1}x$ 与 A^*x 线性相关. 否则, 由引理 2.1.3, 存在 $x \in H$ 使得 $(A^{-1})^*x$ 与 Ax 线性无关. 易证 $W(\Phi(x \otimes x)) = W(A(x \otimes x)A^{-1})$ 是椭圆盘. 而 Φ 保数值域蕴涵

$$W(\Phi(x \otimes x)) = W(x \otimes x) = [0, 1],$$

矛盾. 所以存在 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $A = \frac{1}{\lambda_0}(A^{-1})^*$. 故

$$1 = \langle Ax, (A^{-1})^*x \rangle = \langle Ax, \lambda_0 Ax \rangle = \overline{\lambda_0}\|Ax\|,$$

从而 $\lambda_0 > 0$. 令 $U = \sqrt{\lambda_0}R$, 则 U 是酉算子且对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$, $\Phi(T) = UTU^*$.

(3) $\Rightarrow$ (4). 令 M, M_0, Z_0 定义同定理 10.3.1 及其证明中那样. 类似于定理 10.4.6 可证 Φ 是保一秩的, $\Phi(0) = 0$ 且 $M = K$. 下证对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有 $\Phi(\lambda I) = \tau(\lambda)I$. 否则, 存在 $c \in \mathbb{C}$ 及 $y \in K$ 使得 $\Phi(cI)y$ 与 y 线性无关. 再如定理 10.4.6 可证 $y \in M_0$, 且存在 $u \in Z_0$ 及一秩算子 T 使得 $\langle y, u\rangle = 0$, $\langle \Phi(cI)y, u\rangle = k \neq 0$, $\Phi(T) = y \otimes u$, $\frac{1}{k}\Phi(cI)y \otimes u = \frac{1}{k}\Phi(cT)$. 注意到 $W(\frac{1}{k}\Phi(cI)y \otimes u)$ 是椭圆盘或区间 $[0,1]$, 而 $\frac{c}{k}W(y \otimes u)$ 是圆盘, 于是 $W(\frac{1}{k}\Phi(cT)) \neq \frac{c}{k}W(T)$, 这与 Φ 保一秩算子数值域的假设矛盾. 因对任意一秩幂等元 P 有

$$\lambda W(P) = W(\Phi(\lambda P)) = \tau(\lambda)W(\Phi(P)) = \tau(\lambda)W(P),$$

所以, 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有 $\tau(\lambda) \equiv \lambda$.

利用定理 10.3.1, 易证 (4) 成立. 证毕.

下述定理刻画了保数值半径的可乘映射.

定理 10.5.4 设 $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 为可乘映射. 则下列叙述等价:

(1) Φ 保数值半径且存在一秩算子 T_0 使得 Φ 在 $\mathbb{C}T_0$ 上可加, $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中至少包含 K 上的两个一秩投影, 且 $\mathrm{Lat}(\mathrm{rng}(\Phi)) \subset K_F \cup \{K\}$.

(2) Φ 保一秩算子的数值半径且存在一秩算子 T_0 使得 Φ 在 $\mathbb{C}T_0$ 上可加, $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中至少包含 K 上的两个一秩投影, 且 $\mathrm{Lat}(\mathrm{rng}(\Phi)) \subset K_F \cup \{K\}$.

(3) Φ 保数值半径且存在某个 k- 秩 $(k \geq 2)$ 幂等元 P_0 使得 $\mathrm{rank}(\Phi(P_0)) \leq k$, $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中至少包含 K 上的两个一秩投影, 且 $\mathrm{Lat}(\mathrm{rng}(\Phi)) \subset K_F \cup \{K\}$.

(4) Φ 保一秩算子的数值半径且存在某个 k- 秩 $(k \geq 2)$ 幂等元 P_0 使得 $\mathrm{rank}(\Phi(P_0)) \leq k$, $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中至少包含 K 上的两个一秩投影, 且 $\mathrm{Lat}(\mathrm{rng}(\Phi)) \subset K_F \cup \{K\}$.

(5) Φ 保数值半径且 Φ 限制在 $\mathbb{T}I$ 上是可加的， $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中包含 K 上所有的一秩投影.

(6) 存在酉算子或共轭酉算子 $U: H \to K$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 有 $\Phi(T) = UTU^*$.

证明 证明与定理 10.4.8 类似. 只需注意若存在单位向量 x 使得 Ax 与 $(A^{-1})^*x$ 线性无关，则得如下矛盾：

$$1 < w(Ax \otimes (A^{-1})^*x) = w(\Phi(x \otimes x)) = w(x \otimes x) = 1.$$

证毕.

§10.6 保恒等和的可乘映射

设 Φ 是两个含单位元的代数之间的映射，若 $A + B = I$ 推出 $\Phi(A) + \Phi(B) = I$, 称 Φ 保恒等和；若 $A + B = I$ 当且仅当 $\Phi(A) + \Phi(B) = I$, 称 Φ 双边保恒等和. 本节刻画双边保恒等和的可乘映射.

下述定理刻画了有单位的复 Banach 代数上保单位的单射环同态.

定理 10.6.1 令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是含单位元的复 Banach 代数. 设 $\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为可乘映射. 则 Φ 双边保恒等和的充分必要条件是 Φ 是保单位的单射环同态.

证明 设 Φ 双边保恒等和，即 $A + B = I$ 当且仅当 $\Phi(A) + \Phi(B) = I$. 于是有

$$\Phi(I) = \Phi(I)\left(\Phi\left(\frac{1}{2}I\right) + \Phi\left(\frac{1}{2}I\right)\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}I\right) + \Phi\left(\frac{1}{2}I\right) = I,$$

故 Φ 是保单位的. 下证， Φ 是可加的. 令 $A, B \in \mathcal{A}$ 且 $A + B$ 可逆，则

$$A(A+B)^{-1} + B(A+B)^{-1} = I,$$

$$\Phi(A)\Phi((A+B)^{-1}) + \Phi(B)\Phi((A+B)^{-1}) = I.$$

用 $\Phi(A + B)$ 右乘上述等式，则

$$\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B).$$

对任意的 $A\in\mathcal{A}$, 由于 A 的谱 $\sigma(A)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的有界闭集. 所以, 对任意的 $A, B\in\mathcal{A}$ 存在 $\lambda\notin\sigma(A+B)\cup\sigma(B)$, 即 $A+B-\lambda I$ 及 $B-\lambda I$ 均可逆. 因此,

$$\Phi(A+B-\lambda I)=\Phi(A)+\Phi(B-\lambda I)=\Phi(A)+\Phi(B)+\Phi(-\lambda I),$$

$$\Phi(A+B-\lambda I)=\Phi(A+B)+\Phi(-\lambda I).$$

故对任意的 $A,B\in\mathcal{A}$, 有 $\Phi(A+B)=\Phi(A)+\Phi(B)$.

若存在 $T\in\mathcal{A}$ 使得 $\Phi(T)=0$, 则 $\Phi(T)+\Phi(I)=I$. 因此 $T+I=I$, 从而 $T=0$.

反之显然. 证毕.

推论 10.6.2 令 X 和 Y 是复 Banach 空间, $\dim X=\infty$. 设 $\Phi:\mathcal{B}(X)\to\mathcal{B}(Y)$ 为可乘映射, $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中至少包含 Y 上的两个一秩投影, 且 $\mathrm{Lat}(\mathrm{rng}(\Phi))\subset Y_F\cup\{Y\}$. 则 Φ 双边保恒等和的充分必要条件是存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A:X\to Y$ 使得对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$ 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$.

证明 由定理 10.6.1 知 Φ 是保单位的环同态且 $\Phi(0)=0$. 由假设易证 Φ 保一秩且 $M=Y$. 于是由定理 10.3.1′ 可得存在可逆有界线性或共轭线性算子 $A:X\to Y$ 使得对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$ 有 $\Phi(T)=ATA^{-1}$.

反之显然. 证毕.

推论 10.6.3 令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是有单位的复 Banach 代数且 $\mathcal{B}$ 是因子. 设 $\Phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是满的可乘映射. 则 Φ 双边保恒等和的充分必要条件是 Φ 是保单位的 τ- 代数同构, 其中 $\mathbb{C}$ 上的同态 τ 是单射, 且当 λ 是有理复数时有 $\tau(\lambda)\equiv\lambda$ 或 $\tau(\lambda)\equiv\overline{\lambda}$.

证明 由定理 10.6.1 知 Φ 是保单位的单射环同态. 显然对任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 及 $T\in\mathcal{A}$ 有 $\Phi(\lambda T)=\Phi(\lambda I)\Phi(T)=\Phi(T)\Phi(\lambda I)$. 由假设知 Φ 是满射且 $\mathcal{B}$ 是因子, 故 $\Phi(\lambda I)=\tau(\lambda)I$. 显然 τ 是单射环同态.

任取 $q\in\mathbb{Q}$, 有 $\tau(q)=q$. 因 $\tau(i)^2=\tau(-1)=-1$, 故 $\tau(i)=i$

或 $\tau(i) = -i$. 因此，对任意的 $p, q \in \mathbb{Q}$, 有 $\tau(p+iq) = p+iq$ 或 $\tau(p+iq) = p-iq$. 证毕.

推论 10.6.4 令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是有单位的复 Banach 代数且 $\mathcal{B}$ 是因子. 设 $\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是可乘的连续满射. 则 Φ 双边保恒等和的充分必要条件是 Φ 是同构或共轭同构.

证明 由定理 10.6.1 知 Φ 是保单位的环同态. 对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 及 $T \in \mathcal{A}$, 有 $\Phi(\lambda T) = \Phi(\lambda I)\Phi(T) = \Phi(T)\Phi(\lambda I)$. 由假设知 Φ 是满射且 $\mathcal{B}$ 是因子，故 $\Phi(\lambda I) = \tau(\lambda)I$. 显然 τ 是连续的单射环同态. 所以，τ 是恒等映射或共轭映射. 因此，Φ 是同构或共轭同构. 证毕.

推论 10.6.5 令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是有单位的 *-Banach 代数，$\mathcal{B}$ 是因子. 设 $\Phi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为可乘满射. 则下列叙述等价：

(1) Φ 双边保恒等和且 $A^* + B = I \Leftrightarrow \Phi(A)^* + \Phi(B) = I$.

(2) Φ 是 *- 同构或共轭 *- 同构.

证明 由推论 10.6.3, 存在 $\mathbb{C}$ 上的单射环同态 τ, 使得 Φ 是保单位的 τ- 代数同构. 任取 $T \in \mathcal{A}$, 则 $T^* + (I - T^*) = I$. 于是有 $\Phi(T^*)+\Phi(I-T^*) = I$ 且 $\Phi(T)^*+\Phi(I-T^*) = I$. 故 $\Phi(T^*) = \Phi(T)^*$, 即 Φ 保 * 运算. 所以对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有

$$\tau(\bar{\lambda})\Phi(I) = \Phi(\bar{\lambda}I) = \Phi((\lambda I)^*) = \Phi(\lambda I)^* = \overline{\tau(\lambda)}\Phi(I).$$

由上式易知 $\tau(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, 从而 τ 是 $\mathbb{C}$ 上的恒等映射或共轭映射. 故 (2) 成立.

反之显然. 证毕.

定理 10.6.6 令 H 和 K 是复 Hilbert 空间，$\dim H = \infty$. 设 $\Phi: \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ 为可乘映射. 若 $\operatorname{rng}(\Phi)$ 包含 K 上所有的一秩投影，则下列叙述等价：

(1) Φ 双边保恒等和且 $A^* + B = I \Leftrightarrow \Phi(A)^* + \Phi(B) = I$.

(2) Φ 是 *- 同构或共轭 *- 同构，即存在酉算子或共轭酉算子 $U: H \to K$ 使得对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 有 $\Phi(T) = UTU^*$.

证明 设 (1) 成立，由定理 10.6.1 知 Φ 是保单位的单射环同态. 易证 Φ 保 * 运算. 下证，$\Phi(P)$ 是一秩投影当且仅当 P 为一秩投影.

若 P 是一秩投影，显然 $\Phi(P)$ 是投影. 假设 $\operatorname{rank}(\Phi(P)) \geq 2$, 则存在就范正交向量 $e_1, e_2 \in H$ 使得 $(e_i \otimes e_i)\Phi(P) = \Phi(P)(e_i \otimes e_i) = e_i \otimes e_i, (i = 1,2)$. 由于 $\operatorname{rng}(\Phi)$ 包含 K 上所有的一秩投影，故存在 $Q_i \in \mathcal{B}(H)$ 使得 $\Phi(Q_i) = e_i \otimes e_i, (i = 1,2)$. 注意到 Φ 的单射性，我们有 $Q_i P = P Q_i = Q_i$ $(i = 1,2)$. 因 $\operatorname{rank}(P) = 1$, 于是 $Q_1 = Q_2$, 这与 Q_1, Q_2 的取法矛盾. 进而证得 $\operatorname{rank}(\Phi(P)) = 1$.

反之，若 $\Phi(P)$ 是一秩投影，因 Φ 是单射的且 $\Phi(P^2) = \Phi(P)^2 = \Phi(P) = \Phi(P)^*$, 故 $P^2 = P = P^*$, 即 P 是投影. 类似上述证明可得 P 是一秩的.

任取一组相互正交的一秩投影族 $\{P_\alpha\}$, 令 $P = \sum\limits_\alpha P_\alpha$. 下证 $\Phi(P) = \sum\limits_\alpha \Phi(P_\alpha)$. 由 Φ 的可乘性，显然有 $\sum\limits_\alpha \Phi(P_\alpha) \leq \Phi(P)$. 假设 $R = \Phi(P) - \sum\limits_\alpha \Phi(P_\alpha) \neq 0$. 则存在一秩投影 P_0 使得 $\Phi(P_0) \leq R \leq \Phi(P)$. 故

$$\Phi(P_0)\Phi(P) = \Phi(P)\Phi(P_0) = \Phi(P_0), \ P_0 = PP_0.$$

另一方面，因 $\Phi(P_\alpha)\Phi(P_0) = 0$, 所以 $P_\alpha P_0 = 0$, 从而有 $P_0 = PP_0 = 0$, 矛盾.

任取 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则 $\Phi(\lambda I)$ 与 K 上的任意一秩投影均交换. 故存在 $\mathbb{C}$ 上的函数 τ 使得 $\Phi(\lambda I) = \tau(\lambda) I$ $(\forall \lambda \in \mathbb{C})$. 易证 τ 是单射环同态. 令 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足 $|\lambda| \leq 1$, 由 Φ 是保单位的环同态可得

$$(1 - |\tau(\lambda)|^2)I = \Phi(I) - \Phi(\lambda I)^* \Phi(\lambda I) = \Phi((1 - |\lambda|^2)I) \geq 0.$$

故 τ 是有界的. 所以 τ 是 $\mathbb{C}$ 上的恒等映射或共轭映射. 进而对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 有 $\Phi(\lambda T) = \lambda \Phi(T)$; 或对任意的 $T \in \mathcal{B}(H)$ 有 $\Phi(\lambda T) = \overline{\lambda} \Phi(T)$.

由定理 1.1.12 知，欲证 Φ 是满射，只需证明 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中包含 K 上所有的投影.

令 Q 是 K 上的投影. 则存在 K 上的一组相互正交的一秩投影族 $\{Q_\alpha\}$ 使得 $Q=\sum\limits_\alpha Q_\alpha$. 注意到 Φ 的单射性及假设 $\mathrm{rng}(\Phi)$ 中包含 K 上所有的一秩投影，则存在 H 上的一组相互正交的一秩投影族 $\{P_\alpha\}$ 使得 $\Phi(P_\alpha)=Q_\alpha$. 令 $P=\sum\limits_\alpha P_\alpha$, 则 P 是投影且 $\Phi(P)=\sum\limits_\alpha \Phi(P_\alpha)=\sum\limits_\alpha Q_\alpha=Q$, 即 $Q\in\mathrm{rng}(\Phi)$.

综上可得 (2) 成立. 证毕.

§10.7 注 记

早在 1969 年， Jodeit 和 Lam [130] 就对矩阵半群上的可乘映射作了相当深入的探讨；同年， Martindle 在 [156; 推论 1] 中给出一个有关可乘映射的纯代数结果：在许多算子代数 $\mathcal{A}$ (如 $\mathcal{A}$ 是维数不小于 2 的 Banach 空间上的标准算子代数) 上的可乘双射自动具有可加性. 与算子代数上线性映射的情形比较，算子代数上可乘映射方面的成果并不够丰富. 到 1994 年 Hochwald 发表了文章 [121], 证明了矩阵代数上的保谱可乘映射是自同构. 进而，他推测当对映射加上满射性条件时此结论对无限维情形也应成立. 这篇文章首次把可乘映射的研究与保持问题相结合，激发了后来人们对算子代数，尤其是无限维空间算子代数上可乘映射研究的热情. 1998 年， Hou 在 [107] 中刻画了使某个一秩算子秩不增且满足条件 $\Phi(\alpha I)=\alpha\Phi(I)$ 的可乘映射的结构. 在此定理的基础上，获得了保谱，保谱半径，保数值域，保数值半径，保正规性，保正性等可乘满射的具体刻画，从而也肯定地回答了 Hochwald 的上述猜测. 1999 年，Lajos Molnàr 在 [165], [166] 中对 $\mathcal{B}(H)$ 上的可乘映射也进行了讨论，并证明了如下结果：设 $\Phi:\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(H)$ 为保秩的连续可乘映射，其中 H 是维数不小于 3 的可分 Hilbert 空间，则存在有界线性算子或有界共轭线性算子 $T,S:H\to H$ 使

得 $\Phi(A)=TAS$ 对所有 $A\in\mathcal{B}(H)$ 都成立. [166] 中还刻画了保余秩的连续可乘映射及 $\mathcal{B}(H)$ 上的保谱 *- 半群同构. 有关可乘保持问题最近的一些工作可参见 Cheung, Fallat, Li [40].

本章 §10.1—§10.2 的内容主要来源于 An, Hou [4]. §10.1 中有些结果如定理 10.1.4 也可直接由 Jodeit 和 Lam [130] 的结果推出, 但这里的证明方法不同且较简明. §10.3—§10.4 则取材于 An, Hou [3], 其中定理 10.3.1 去掉了 Hou [107] 中的附加条件 $\Phi(\alpha I)=\alpha\Phi(I)$. 定理 10.3.2 则用不同的方法从两个方面推广了 Molnàr [166] 中的主要结果: (1) 对映射去掉了连续性假设. (2) 把空间由可分的 Hilbert 空间情形推广到了一般的 Banach 空间情形. 定理 10.3.4 也是 [166] 中相应结果的推广. §10.5 属于 An, Hou [2]. 值得注意的是许多对线性映射有意义的保持问题对可乘映射却是平凡的. 例如, 保幂零元问题, 保交换性问题, 等等. 自然会提出如下问题: 什么样的保持问题对可乘映射有意义? §10.6 可以说是对这类保持映射所作的一种尝试.

参考文献

[1] J. Aczel and J. Dhombres, Functional equations in several variables, Encyclopedia Math. Appl. 31, Cambridge U. P., 1989

[2] G.-M. An, J.-C. Hou, Characterizations of isomorphisms by multiplicative maps on operator algebras, Northeast Math. J., to appear

[3] G.-M. An, J.-C. Hou, Rank-preserving multiplicative maps on $\mathcal{B}(X)$, Lin. Alg. Appl., 342 (2002), 59—78

[4] G.-M. An, J.-C. Hou, Multiplicative maps on matrix algebras, to appear

[5] C. Apostol, L. A. Fialkow, D. A. Herrero, D. Voiculescu, Approximation of Hilbert space operators II, Research Note in Mathematics, vol. 102, 1984

[6] J. Araujo, and K. Jarosz, Biseparating maps between operator algebras, http://arXiv:math.OA/0106107 vl

[7] W. Arveson, An invitation to C*-algebras, Springer-verlag, New York, 1976

[8] B. Aupetit, Propriétés spectrales des algèbres de Banach, Lecture Notes in Mathematics 735, Springer-Verlag, 1979

[9] B. Aupetit, A Primer On Spectral Theory, Springer, New York, 1991

[10] B. Aupetit, Sur les transformations qui consercent le spectre, Banach Algebras '97 (Walter de Gruyter, Berlin, New York 1998), pp.55—78

[11] B. Aupetit, Spectrum-preserving linear mappings between Banach algebras or Jordan-Banach algebras, J. London Math. Soc. (2) 62 (2000), 917—924

[12] B. Aupetit, H. du T. Mouton, Trace and determinant in Banach algebras, Studia Math., 121 (1996), 115—136

[13] B. Aupetit and H. du Toit Mouton, Spectrum preserving linear mappings in Banach algebras, Studia Math., 109 (1994), 91—100

[14] Z.-F. Bai and J.-C. Hou, Linear maps and additive maps that preserve operators annihilated by a polynomial, J. Math. Anal. Appl., 271(2002), 139—154

[15] Z.-F. Bai and J.-C. Hou, Additive maps preserving nilpotents or spectral radius, to appear

[16] 白朝芳, 侯晋川, 与 $|\cdot|^k$ 交换的可加映射, 数学学报, 45(5), (2002), 863—870

[17] D. Bakič, B. Guljaš, Which operators approximately annihilate orthonormal bases? Acta Sci. Math. (Szged), 64 (1998), 601—607

[18] L. B. Beasley, Rank-k-preservers and preservers of sets of ranks, Lin. Alg. Appl., 55 (1983), 11—17

[19] L. B. Beasley, Linear operators on matrices: The invariances of rank-k matrices, Lin. Alg. Appl., 107 (1988), 161—167

[20] L. B. Beasley, A. H. Kim, W. Y. Lee, On a positive linear map preserving absolute values, 260 (1997), 311—318

[21] J. Bell, A. R. Sourour, Additive rank-one preserving mappings on triangular matrix algebras, Lin. Alg. Appl., 312 (2000), 13—33

[22] R. Bhatia, P. Šemrl, A. R. Sourour, Maps on matrices that preserve the spectral radius distance, Studia Math., 134 (1999), 99—110

[23] P. Botta, S. Pierce, W. Watkins, Linear transformations that preserve the nilpotent matrices, Pacific J. of Math., 104 (1983), 39—45

[24] M. Brešar and C. R. Miers, Commutativity preserving mappings of von Neumann algebras, Can. J. Math., 45(4) (1993), 695—708

[25] M. Brešar, L. Molnàr, P. Šemrl, Elementary operators II, Acta. Sci. Math. (Szeged), 66 (2000), 769—791

[26] M. Brešar, P. Šemrl, Mappings which preserve idempotents, local automorphisms, and local derivations, Can. J. Math., 45 (3) (1993), 483—496

[27] M. Brešar, P. Šemrl, Normal-preserving linear mappings, Canad. Math. Bull., 37(3) (1994), 306—309

[28] M. Brešar, P. Šemrl, On local automorphisms and mappings that preserve idempotents, Studia Math., 113 (2) (1995), 101—108

[29] M. Brešar and P. Šemrl, Linear maps preserving the spectral radius, J. Funct. Anal., 142 (1996), 360—368

[30] M. Brešar, P. Šemrl, Linear preservers on $\mathcal{B}(X)$, Lin. Oper. Banach center publications, 38 (1997), 49—58

[31] M. Brešar and P. Šemrl, Invertibility preserving maps preserve idempotents, Michigan J. Math., 45 (1998), 483—488

[32] M. Brešar, P. Šemrl, Spectral characterization of idempotents and invertibility preserving linear maps, Exposition. Math., 17 (1999), 185—192

[33] M. Brešar, P. Šemrl, Elementary operators, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 129 (1999), 1115—1135

[34] L. G. Brown, G. K. Pedersen, C*-algebras of real rank zero, J. Funct. Anal., 99 (1991) 131—149

[35] C.-G. Cao, X. Zhang, Additive operators preserving idempotent matrices over fields and applications, Lin. Alg. Appl., 248 (1996), 327—338
[36] J.-T. Chan, Numerical radius preserving operators on $\mathcal{B}(H)$, Proc. Amer. Math. Soc., 123(1995), 1437—1439
[37] J.-T. Chan, Numerical radius preserving operators on C*-algebras, Arch. Math. (Basel) 70 (1998), 486—488
[38] G.-H. Chan, M. H. Lim, Linear preserves on powers of matrices, Lin. Alg. Appl., 162—164 (1992), 615—626
[39] P. R. Chernoff, Representations, automorphisms, and derivations of some operator algebras, J. Funct. Anal., 12 (1973), 275—289
[40] W. S. Cheung, S. Fallat, C.-K. Li, Multiplicative preservers on semigroups of matrices, to appear
[41] M.-D. Choi, Completely positive linear maps on complex matrices, lin. Alg. Appl., 10(1975), 285—290
[42] M.-D. Choi, Some assorted inequalities for positive linear maps on C*-algebras, J. Operator Theory, 4(1980), 271—285
[43] M.-D. Choi, Positive linear maps, Proc. Sympos. Pure Math., 38(1982), 583—590
[44] M.-D. Choi, D. Hadwin, E. Nordgren, H. Radjavi and P. Rosenthal, On positive linear maps preserving invertibility, J. Funct. Anal., 59 (1984), 462—469
[45] M.-D. Choi, J.-C. Hou, P. Rosenthal, Completion of partial matrices to square-zero contractions, Lin. Alg. Appl., 256(1997), 1—30
[46] M. D. Choi, A. A. Jafarian, H. Radjavi, Linear maps preserving commutativity, Lin. Alg. Appl., 87 (1987), 227—241
[47] W. Chooi, M. Lim, Linear preservers on triangular matrices, Lin. Alg. Appl., 269 (1998), 241—255
[48] E. Christensen and A. M. Sinclair, A survey of completely bounded operators, Bull. London Math. Soc., 21 (1989), 416—448
[49] E. Christensen, Two generalizations of the Gleason-Kahane-Żelazko theorem, Pacific J. Math., 177 (1997), 27—32
[50] E. Christensen, On invertivity preserving linear mappings, simultaneous triangularization and property L, Lin. Alg. Appl., 301 (1999), 153—170
[51] J. B. Conway, A course in functional analysis, GTM 96, Springer Verlag, 1986
[52] J. B. Conway, W. Szymanski, Linear combinations of hyponormal operators, Rocky Mountain J. Math., 18(1988), 695—705
[53] J.-L. Cui, J.-C. Hou and B.-R. Li, Linear preservers on upper triangular operator matrices, Lin, Alg, Appl., 336 (2001), 29—50

[54] J.-L. Cui and J.-C. Hou, A characterization of homomorphism between Banach algebras, Acta Math. Sinica, to appear

[55] 崔建莲, 侯晋川, 套代数上自同构的刻画, 数学年刊, 23A(4) (2002), 521—530

[56] J.-L. Cui and J.-C. Hou, Linear maps on von Neumann algebras preserving zero products or tr-rank, Bull. Austral. Math. Soc., 65 (2002), 79—91

[57] J.-L. Cui and J.-C. Hou, Linear maps preserving the closure of numerical ranges on maximal atomic nest algerbas, Integr. Equ. Oper. Theory, to appear

[58] J.-L. Cui and J.-C. Hou, The spectrally bounded linear maps on operator algebras, Studia Math., 150(3) (2002), 261—271

[59] J.-L. Cui and J.-C. Hou, Linear maps preserving quasi-affinity or range density of operators on $\mathcal{B}(X)$, Chinese Ann. Math., to appear

[60] J.-L. Cui and J.-C. Hou, Linear maps preserving idempotents on nest algebras, Acta Math. Sinica, to appear

[61] J.-L. Cui and J.-C. Hou, Linear maps between Banach algebras compressing certain spectral functions, The Rocky Mountain Journal of Mathematics, to appear

[62] J.-L. Cui and J.-C. Hou, Additive maps on standard operator algebras preserving parts of the spectrum, to appear

[63] R. E. Curto and D. A. Herrero, On closures of joint similarity orbits, Integral Equations and Operator Theory, 8(4) (1985), 589—556.

[64] K. R. Davidson, Nest Algebra, Ritman Research Notes in Mathematics, Vol. 191, Longman, London/New York, 1988

[65] K. R. Davidson, K. J. Harrison, U. A. Mueller, Rank decomposability in incident spaces, Lin. Alg. Appl., 230 (1995), 3—19

[66] J. Depillis, Linear transformations which preserve hermitian and positive semidefinite operators, Pacific J. Math., 23 (1967), 129—137

[67] J. Dieudonné, Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables, Arch. Math. (Basel), 1 (1949), 282—287

[68] J. Dixmier, Von Neumann Algebras, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1981

[69] R. G. Douglas, On majorization and range inclusion of operators in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966), 413—416

[70] 冯文英, C_2 及 C^* 代数上的初等算子, 数学学报, 35:6 (1992), 809—824

[71] P. A. Fillmore, J. P. Willianms, On operator ranges, Advances in Math., 7(1971), 254—281

[72] C.-K. Fong and A. R. Sourour, On the operator equation $\sum_{i=1}^{n} A_i X B_i \equiv 0$, Canad. J. Math., 31 (1979), 845—857

[73] J. L. Font, S. Hernandez, On separating maps between locally compact spaces, Arch. Math., 63 (1994), 58—165

[74] G. Frobenius, Uber die darstellung der endlichen gruppen durch lineare subsitutionen, I., Sitzungberichte Koniglich Preussischen Akad. Wissenschaften Berlin (1897), 994—1015

[75] T. Furuta, On relaxation of normality in the Fuglede-Putnam theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 77 (3) (1979), 324—328

[76] M.-C. Gao, Numerical range preserving linear maps and spectrum preserving elementary operators on $\mathcal{B}(H)$, Chinese Ann. Math., 14A (3) (1993), 295—301

[77] 高明杵，侯晋川，吕建聪， C*- 代数上的几类线性映射，南京大学学报数学半年刊， 12(1995), no.2, 241—248

[78] L. T. Garnder, Linear maps of C*-algebras preserving the absolute value, Proceedings of Amer. Math. Soc., 76 (2) (1979), 271—278

[79] L.-M. Ge, D. Hadwin, J.-C. Hou, J.-K. Li, Rank nonincreasing linear maps on operator spaces, preprint

[80] A. M. Gleason, A characterization of maximal ideals, J. Analyse Math., 19 (1967), 171—172

[81] R. M. Guralnick, Invertible preservers and algebraic groups, Lin. Alg. Appl., 212/213 (1994), 249—257

[82] A. Guterman, C. K. Li, P. Šemrl, Some general techniques on linear preserver problems, 315 (2000), 61—81

[83] M. Györy, L. Molnàr, P. Šemrl, Linear rank and corank preserving maps on $\mathcal{B}(H)$ and an application to *-semigroup isomorphisms of operator ideals, Lin. Alg. Appl., 280 (1998), 253—266

[84] P. R. Halmos, A Hilbert space problem book, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1982

[85] D. W. Hadwin, Nonseparable approximate equivalence, Trans. Amer. Math. Soc., 266 (1) (1981),203—231

[86] Hadwin Lunch Bunch, Local multiplications on algebras spanned by idempotents. Linear and Multilinear Algebra, 37 (1994), 259—263

[87] D. W. Hadwin and D. R. Larson, Strong limits of similarities, Operator Theory: Advances and Applications, 104, 139—146, 1998 Birkhauser Verlag Basel/Switzerland

[88] D. W. Hadwin, D. R. Larson, Completely rank nonincreasing linear maps, to appear

[89] L. A. Harris and R. V. Kadison, Affine mappings of invertible operators, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996), 2415—2422

[90] D. A. Herrero, Approximation of Hilbert Space Operators, Vol.I, Research Notes in Math., Pitman Advanced Publishing Inc., 1982

[91] D. A. Herrero, Approximation of Hilbert space operators, Research Note in Mathematics, Vol. 224, 1989

[92] I. N. Herstein, Jordan homomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc., 81 (1956), 331—341

[93] I. N. Herstein, Topics in ring theory, Springer, Berlin, 1991

[94] F. Hiai, Similarity preserving linear maps on matrices, Lin. Alg. Appl., 97 (1987), 127—139

[95] R. A. Horn, C. R. Johnson, Topics in matrix Analysis, Cambridge University Press, New York, 1991

[96] C.-J. Hou, D.-G. Han, Derivations and isomorphisms of certain reflexive operator algebras, Acta Mathematica Sinica, 41(5) (1998), 1003—1006

[97] J.-C. Hou, 关于非正规算子的 Putnam-Fuglede 定理，数学学报， 28(1985), no. 3 (333—340), MR 88a. 47024

[98] J.-C. Hou, Rank preserving linear maps on $B(X)$, Sci. in China (ser.A), 32(1989), 929—940

[99] 侯晋川，关于算子的张量积，科学通报， 36(20) (1990), 1533—1535

[100] J.-C. Hou, On operator inequalities and linear combinations of operators, Lin. Alg. Appl., 153(1991), 35—51

[101] J.-C. Hou, Solution of operator equations and tensor products, J. Math. Res. Exp., 12(1992), 479—486

[102] J.-C. Hou, On the tensor products of operators, Acta Math. Sinica (New Ser.), 9(1993), 195—202

[103] J.-C. Hou, Linear interpolation and the elementary operators on $\mathcal{B}(X)$, Science in China (Ser. A), 36(9) (1993), 1025—1035

[104] 侯晋川，算子张量积及 C_2 上的初等算子，数学学报， 38(4) (1995), 467—474

[105] J.-C. Hou, Completion of operator partial matrices to projections, Lin. Alg. Appl., 246(1996), 71—82

[106] J.-C. Hou, Spectrum-preserving elementary operators on $\mathcal{B}(X)$, Chinese Ann. of Math. 19B(4) (1998), 511—516

[107] J.-C. Hou, Multiplicative maps on $\mathcal{B}(X)$, Science in China (Ser. A), 41(1998), 337—345

[108] J.-C. Hou, A characterization of positive elementary operators, J. Operator Theory, 39(1998), 43—58

[109] J.-C. Hou and J.-L. Cui, Completely rank nonincreasing linear maps on nest algebras, Proc. Amer. Math. Soc., to appear

[110] J.-C. Hou and J.-L. Cui, Rank-1 preserving linear maps on nest algebras, Lin. Alg. Appl., to appear

[111] J.-C. Hou and J.-L. Cui, Additive maps on standard operator algebras preserving invertibilities or zero divisors, Lin. Alg. Appl., to appear

[112] J.-C. Hou, M.-C. Gao, Some results on elementary operators acting on prime C^*-algebras, Ann. Math. Res., 26(1) (1993), 1—9

[113] J.-C. Hou, M.-C. Gao, Elements of rank one and multiplications on von Neumann algebras, Chinese J. Comtemporary Math., 15(4)(1994), 367—374

[114] J.-C. Hou, M.-G. Gao, Additive mappings preserving zero products on $\mathcal{B}(H)$, Chinese Science Bull. (Chinese Ser.), 43, 22(1998), 2388—2392

[115] J.-C. Hou, S.-Z. Hou, Linear maps on operator algerbas that preserve elements annihilated by a polynomial, Proc. Amer. Math. Soc., 130 (2002), 2383—2395

[116] J.-C. Hou, H. Radjavi, P. Rosenthal, Idempotent completions of operator partial matrices, Acta, Math. Sinica, English Series, 15(4) (1999), 333—346

[117] J.-C. Hou and P. Šemrl, Linear maps preserving invertibility or related spectral properties, to appear

[118] J.-C. Hou, Y.-M. Wang, k-quasihyponormal operators on the Hilbert-Schmidt class (Chinese), J. Math. Res. Exp., 9(1989), 57—62

[119] S.-Z. Hou, J.-C. Hou, k-potent preserving linear maps on $\mathcal{B}(X)$, Acta Math. Sci., to appear

[120] 侯绳照，侯晋川，$\mathcal{B}(X)$ 上的保 k 次幂线性映射，数学杂志， 19:3(1999), 318—322

[121] S. H. Hochwald, Multiplicative maps on matrices that preserve the spectrum, Lin. Alg. Appl., 212/213 (1994), 339—351

[122] R. Howard, Linear maps that preserve matrices annihiliated by a polynomial, Lin. Alg. Appl., 30 (1980), 167—176

[123] N. Jacobson and C. Rickart, Jordan homomorphisms of rings, Trans. Amer. Math. Soc., 69 (1950), 479—502

[124] A. A. Jafarian and A.R. Sourour, Spectrum-preserving linear maps, J. Funct. Anal., 66 (1986), 255—261

[125] J. S. Jeang, N. C. Wong, Weighted composition operators of $C_0(X)'s$, J. Math. Anal. Appl., to appear

[126] G.-X. Ji, H.-K. Du, Similarity-invariant subspaces and similarity-preserving linear maps, Acta, Math. Sinica, (New Ser.), 18 (2002), 489—498

[127] W. Jing, Spectrum-preserving multiplicative maps. Acta Math. Sinica (N.S.), 14 (1998 suppl.), 719—722

[128] W. Jing, Additive mappings preserving zero products (Chinese), Acta Math. Sinica, 42(6) (1999), 1125—1128

[129] W. Jing, Generalized derivations and local generalized derivations of standard operator algebras, (Chinese) Qufu Shifan Daxue Xuebao (Ziran Kexue Ban), 25(2) (1999), 33—36

[130] M. Jodeit, T. Y. Lam, Multiplicative maps of matrix semi-groups, Arch. Math., 20 (1969), 10—16

[131] B. E. Johnson, Centralisers and operators reduced by maximal ideals, J. London Math. Soc., 43 (1968), 231—233

[132] R. V. Kadison and I. M. Singer, Triangular operator algebras, Amer. J. Math., 82 (1960), 227—259

[133] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, Fundamentals of the theory of operator algebras, Vol. I, II, Academic Press, INC., London, 1986

[134] J. P. Kahane and W. Żelazko, A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras, Studia Math., 29 (1968), 339—343

[135] I. Kaplansky, Algebraic and Analytic Aspects of Operator Algebras, CBMS Regional Conference Series in Math. 1 (Amer. Math. Soc., Providence, 1970)

[136] T. T. Kezlan, A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings, Lin. Alg. Appl., 135 (1990), 181—184

[137] S. O. Kim, Linear maps preserving ideals of C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc., Article electronically published on October 25, 2000

[138] M. Kuczma, A introduction to the theory of functional equations and inequalities , Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985

[139] B. Kuzma, Additive mappings decreasing rank one, Linear Alg. Appl., 348(2002), 175—187

[140] D. R. Larson, Reflexivity, algebraic reflexivity and linear interpolation, Amer. J. Math., 110(1988), 283—299

[141] D. R. Larson, A. R. Sourour, Local derivations and local automorphisms of $\mathcal{B}(X)$, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 187—192

[142] 李炳仁， Banach 代数，科学出版社， 1992 年

[143] C.-K. Li, Linear operators preserving the numerical radius of matrices, Proc. Amer. Math. Soc., 99 (1987), 601—608

[144] C.-K. Li, L. Rodman, P. Šemrl, Linear maps on selfadjoint operators preserving invertibility, positive definiteness, numerical range, to appear

[145] C.-K. Li, S. Pierce, A survey on linear preserver problems, Amer. Math. Monthly, 108 (2001), 591—605

[146] C.-K. Li, P. Šemrl, G. Soares, Linear operators preserving the numerical range (radius) on triangular matrices, preprint

[147] G. Li, Quasinormality of the elementary operators on $\mathcal{C}_2(H)$ (Chinese), Acta Math. Sinica, 32(1989), 219—224

[148] S.-K. Li, S.-Z. Yan, On the Putnam-Fuglede theorem (Chinese), Kexue Tongbao, 11(1985), 810—813

[149] M. H. Lim, Linear maps on second symmetric product spaces that preserve rank less than or equal to one, Linear and Multilinear Algebras, 26 (1990), 187—193

[150] R. Lim, Rank and tensor rank preservers, Linear and Multilinear Algebra, 33: 7—21 (1992)

[151] J. Lindenstrauss, On nonseparable reflexive Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), 967—970

[152] R. Loewy, Linear mappings which are rank-k nonincreasing, Linear and Multilinear Algebras, 34 (1993), 21—32

[153] B. Magajna, On subnormality of generalized derivations and tensor products, Bull. Aust. Math. Soc., 31(1985), 235—243

[154] M. Marcus, R. Purves, Linear transformations on algebras of matrices: The invariances of the elementary symmetric functions, Canad. J. Math., 11 (1959), 383—396

[155] J. E. Marsden, Basic Complex Analysis, W.H. Freeman and Company, San Fracisco, 1973

[156] W. S. Martindale III, When are multiplicative mappings additive?, Proc. Amer. Math. Soc., 21 (1969), 695—698

[157] M. Mathieu, A characterization of positive multiplications on C*-algebras, Math. Japan, 29(1984), 375—382

[158] M. Mathieu, Elementary operators on prime C*-algebras II, Glasgow Math. J., 30(1988), 275—284

[159] M. Mathieu, Elementary operators on prime C*-algebras I, Math. Ann., 284(1989), 223—244

[160] M. Mathieu, How to use primeness to describe properties of elementary operators, Proc. Sympos. Pure Math., 51 (1990), 195—199
[161] M. Mathieu, Characterising completely positive elementary operators, Bull. London Math. Soc., 30 (1998), 603—610
[162] L. Molnàr, Two Characters of Additive $*$ -automorphism of $\mathcal{B}(H)$, Bull. Austral. Math. Soc., 53(2) (1996), 391—400
[163] L. Molnàr, Some linear preserver problems on $\mathcal{B}(H)$ concerning rank and corank, Lin. Alg. Appl., 286 (1999), 311—321
[164] L. Molnàr, Multiplicative maps on ideals of operators which are local automorphisms, Acta Sci. Math. (Szeged), 65(3—4) (1999), 727—736
[165] L. Molnàr, Some multiplicative preservers on $\mathcal{B}(H)$, Lin. Alg. Appl. 301 (1999), 1—13
[166] L. Molnàr, P. Šemrl, Some linear preserver problems on upper triangular matrices, Linear and Multilinear Algebra, 45 (1998), 189—206
[167] L. Molnàr, P. Šemrl, Elementary operators on standard operator algebras, to appear
[168] G. J. Murphy, C*-algebras and operator theory, Academic Press, Inc., Boston, San Diedo, New York, 1990
[169] M. Omladič, On operators preserving commutivity, J. Func. Anal., 66 (1986), 105—122
[170] M. Omladič, On operators preserving the numerical range, Lin. Alg. Appl., 134 (1990), 31—51
[171] M. Omladič, P. Šemrl, Sepctrum-preserving additive maps, Lin. Alg. Appl., 153 (1991), 62—72
[172] M. Omladič, P. Šemrl, Additive mappings preserving operators of rank one, Lin. Alg. Appl., 182 (1993), 239—256
[173] M. Omladič, P. Šemrl, Linear mappings that preserve potent operators, Proc. Amer. Math. Soc., 123 (4) (1995), 1069—1074
[174] R. I. Ovsepian, A. Pelczynski, Existences of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence, Studia Math., 54 (1975), 149—159
[175] V. I. Paulsen, Completely bounded maps and dilations, Pitman Res. Notes Math. Ser., Vol. 146, Longman 1986
[176] C. Pearcy, D. Topping, Sums of small numbers of idempotents, Michigan Math. J., 14 (1967), 453—465
[177] V. Pellegrini, Numerical range preserving operators on a Banach algebras, Studia Math., 54 (1975), 143—147
[178] S. Pierce, et. al., A survey of linear preserver problems, Linear and Multilinear Algebra, 33 (1992), 1—129

[179] A. Pietsch, Operator ideals, North-Holland Pub. Com., Amsterdam, New York, Oxford, 1980

[180] G. Pisier, Completely bounded maps between sets of Banach space operators, Indiana Univ. Math. J., 39(1) (1990), 249—277

[181] H. Radjavi, P. Rosenthal, Invariant subspaces, Springer-Verlag, Berline, Heidelberg, New York, 1973

[182] J. R. Ringrose, On some algerbas of operators II, Proc. London Math. Soc., 15 (3) (1965), 61—83

[183] L. Rodman, Linear preservers of minimal rank, Lin. Alg. Appl., 310 (2000), 73—82

[184] S. Sakai, C*-algebras and W^*-algebras, Springer-Verlag, New York, 1971

[185] P. Šemrl, Two characterizations of automorphisms on $\mathcal{B}(X)$, Studia Math., 105(2) (1993), 143—149

[186] P. Šemrl, Linear mappings preserving square-zero matrices. Bull. Austral. Math., 48(1993), 365—370

[187] P. Šemrl, Linear maps that preserve the nilpotent operators, Acta Sci. Math. (Szged), 61 (1995), 523—534

[188] P. Šemrl, Isomorphisms of standard operator algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 1851—1855

[189] P. Šemrl, Linear mappings that preserve operators annihilated by a polynomial, J. Oper. Theo. 36 (1996), 45—58

[190] P. Šemrl, Spectrally bounded linear maps on $\mathcal{B}(H)$, Quart. J. Math. (Oxford), 49 (1998), 87—92

[191] P. Šemrl, Invertibility preserving linear maps and algebraic reflexivity of elementary operators of length one, Proc. Amer. Math. Soc., to appear

[192] V. S. Shul'man, Operators preserving ideals in C*-algebras, Studia, Math. 109 (1994), 67—72

[193] A.R. Sourour, Invertibility preserving linear maps on $L(X)$, Trans. Amer. Math. Soc., 348 (1996), 13—30

[194] W. F. Stinespring, Positive functions on C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 211—216

[195] E. Stormer, On the Jordan structure of C*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 120 (1965), 438—447

[196] A. E. Taylor, Introduction to functional analysis, Second Edition, John Wiley & Sons, 1980

[197] Q. Wang, Additive maps and elementary operators on $\mathcal{B}(X)$ that preserve the point spectrum, J. Math. (Wuhan), 17(4) (1997), 468—472

[198] Q. Wang and J.-C. Hou, Point-spectrum-preserving elementary operators on $\mathcal{B}(H)$, Proc. Amer. Math. Soc., 126(7) (1998), 2083—2088

[199] W. Watkins, Bilinear transformations on matrices: rank preservers, Lin. Alg. Appl., 250 (1997), 31—38

[200] S.-Y. Wei, S.-Z. Hou, Rank preserving linear maps on nest algebra, J. Operator Theory, 39 (1998), 207—217

[201] M. Wolef, Disjointness preserving operators on C*-algebras, Arch. Math., 62 (1994), 248—253

[202] S.-Z. Yan, J.-Z. Zhu, On operator equation $\lambda A^2 + \mu A^{*2} = \alpha A^* A + \beta AA^*$ (Chinese), Science in China (Ser. A), 11 (1987), 1139—1146

[203] W. Żelazko, A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras, Studia Math., 30 (1968), 83—85

[204] X.-L. Zhang and J.-C. Hou, Positive elementary operators compressing spectrum, Chin. Sci. Bull., 42(4) (1997), 270—273